II.2.1 Kitle Temel Bileşenleri

$\underline{\boldsymbol{X}}' = [X_1 X_2 \ \dots \ X_p]: p \times 1$ boyutlu rastgele değişkenleri vektörünün oluşturduğu kitle için kitle ortalama vektörü $E(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\boldsymbol{\mu}}: p \times 1$, kitle varyans-kovaryans matrisi $Cov(\underline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{\Sigma} : p \times p$ ve kitle korelasyon matrisi $Kor(\underline{\boldsymbol{X}}) = cov(\underline{\boldsymbol{Z}}) = \boldsymbol{\rho} : p \times p$ olsun. $X_k, (k = \overline{1\,,p})$ değişkenlerinin aynı türden (veya farklı türden) ölçüm birimlerine sahip olduğunu ve $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin (veya $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin) de biliniyor olduğunu kabul edelim. Eğer $X_k, (k = \overline{1\,,p})$ değişkenleri aynı türden ölçüm birimlerine sahipse, TB'ler $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisine ait bilgi kullanılarak elde edilir. Eğer $X_k, (k = \overline{1\,,p})$ değişkenleri farklı türden ölçüm birimlerine sahipse, TB'ler $\boldsymbol{\rho}$ matrisine ait bilgi kullanılarak elde edilir. TB'ler, cebirsel anlamda birbirleri ile ilişkili olan $X_k, (k = \overline{1\,,p})$ değişkenlerinin [veya $Z_k, (k = \overline{1\,,p})$ değişkenlerinin] doğrusal fonksiyonları olacağından, j-nci TB; eğer $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisine ait bilgiler kullanılacaksa

$$Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{X}} = a_{j1} X_1 + a_{j2} X_2 + \cdots + a_{j\,p} X_p \ , \ j = 1, 2, \dots, p \tag{2.7}$$

şeklinde, eğer $\boldsymbol{\rho}$ matrisine ait bilgiler kullanılacaksa

$$Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{Z}} = a_{j1} Z_1 + a_{j2} Z_2 + \cdots + a_{j\,p} Z_p \ , \ j = 1, 2, \dots, p \tag{2.8}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda j-nci TB'nin varyansı; Eşitlik (2.7)'ye göre;

$$Var(Y_j) = Var(\underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j Var(\underline{\boldsymbol{X}}) \underline{\boldsymbol{a}}_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \boldsymbol{\Sigma} \underline{\boldsymbol{a}}_j, j = 1, 2, \dots, p \tag{2.9}$$

iken, Eşitlik (2.8)'e göre:

$$Var(Y_j) = Var(\underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{Z}}) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j Var(\underline{\boldsymbol{Z}}) \underline{\boldsymbol{a}}_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \boldsymbol{\rho} \underline{\boldsymbol{a}}_j, j = 1, 2, \dots, p \tag{2.10}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $j \neq t$ olmak üzere j-nci TB $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{X}$ (veya $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{Z}$) ile t-nci TB $Y_t = \underline{\boldsymbol{a}}'_t \underline{\boldsymbol{X}}$ (veya $Y_t = \underline{\boldsymbol{a}}'_t \underline{\boldsymbol{Z}}$) arasındaki kovaryans, $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisine ait bilgiler kullanıldığında;

$$Cov(Y_j\,, Y_t) = Cov(\underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{X}}\,, \underline{\boldsymbol{a}}'_t \underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j Cov(\underline{\boldsymbol{X}}) \underline{\boldsymbol{a}}_t = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \boldsymbol{\Sigma} \underline{\boldsymbol{a}}_t \,, j \neq t = 1, 2, \dots, p \tag{2.11}$$

iken, $\boldsymbol{\rho}$ matrisine ait bilgiler kullanıldığında;

$$Cov(Y_j\,, Y_t) = Cov(\underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{Z}}\,, \underline{\boldsymbol{a}}'_t \underline{\boldsymbol{Z}}) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j Cov(\underline{\boldsymbol{Z}}) \underline{\boldsymbol{a}}_t = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \boldsymbol{\rho} \underline{\boldsymbol{a}}_t \,, j \neq t = 1, 2, \dots, p \tag{2.12}$$

olacaktır.

Eşitlik (2.7) veya Eşitlik (2.8) ile tanımlanan TB'lerin elde edilmesinde izlenecek yol şu şekildedir:

1-nci TB: $Y_1 = \underline{\boldsymbol{a}}'_1\underline{\boldsymbol{X}}$ (veya $Y_1 = \underline{\boldsymbol{a}}'_1\underline{\boldsymbol{Z}}$) ile gösterilirse, bu TB $\underline{\boldsymbol{a}}'_1\underline{\boldsymbol{a}}_1 = 1$ yan şartı altında en büyük varyansa sahip olan Y_j , $(j = 1, 2, \dots, p)$ doğrusal bağıntısı olmalıdır.

2-nci TB: $Y_2 = \underline{\boldsymbol{a}}'_2\underline{\boldsymbol{X}}$ (veya $Y_2 = \underline{\boldsymbol{a}}'_2\underline{\boldsymbol{Z}}$) ile gösterilirse, bu TB $\underline{\boldsymbol{a}}'_2\underline{\boldsymbol{a}}_2 = 1$ ve $\underline{\boldsymbol{a}}'_2\underline{\boldsymbol{a}}_1 = 0$ yan şartları altında Y_1'den sonra ikinci en büyük varyansa sahip olan Y_j , $(j = 1, 2, \dots, p)$ doğrusal bağıntısı olmalıdır.

Bu şekilde devam ederek;

j –nci TB: $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{X}}$ (veya $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{Z}}$) ile gösterilirse, bu TB $\underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{a}}_j = 1$ ve $t = 1, 2, \dots, (j - 1)$ olmak üzere tüm $(j\ , t\ )$ ikilileri için $\underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{a}}_t = 0$ yan şartları altında $Y_1, Y_2, \dots, Y_{(j-1)}$'den sonra j-nci en büyük varyansa sahip olan Y_j , $(j = 1, 2, \dots, p)$ doğrusal bağıntısı olmalıdır.

Bu yolla oluşturulacak olan p tane TB için doğal olarak p-nci TB olan $Y_p = \underline{\boldsymbol{a}}'_p\underline{\boldsymbol{X}}$ (veya $Y_p = \underline{\boldsymbol{a}}'_p\underline{\boldsymbol{Z}}$), $\underline{\boldsymbol{a}}'_p\underline{\boldsymbol{a}}_p = 1$ ve $t = 1, 2, \dots, (p - 1)$ olmak üzere her $(p\ , t\ )$ ikilileri için $\underline{\boldsymbol{a}}'_p\underline{\boldsymbol{a}}_t = 0$ yan şartları altında $Y_1, Y_2, \dots, Y_{(p-1)}$'den sonra j-nci en büyük varyansa bir diğer ifadeyle en küçük varyansa sahip olan Y_p doğrusal bağıntısıdır.

Bu şekilde elde edilen TB'lerin hepsi birlikte düşünüldüğünde, Eşitlik (2.7) ile gösterilen TB'ler matris formunda;

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{X}} \tag{2.13}$$

şeklinde veya Eşitlik (2.8) ile gösterilen TB'ler matris formunda;

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Z}} \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\underline{\boldsymbol{Y}}' = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_p]$: $1 \times p$ boyutlu TB'ler vektörü iken

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{a}}'_1 \\ \underline{\boldsymbol{a}}'_2 \\ \vdots \\ \underline{\boldsymbol{a}}'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ & & \vdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix}$$: $p \times p$ boyutlu TB'ler katsayılar matrisidir.

TB'lerin elde edilmesindeki yan şartlar dikkate alındığında; $\underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{a}}_t = \begin{cases} 1, & j = t \ ise \\ 0, & j \neq t \ ise \end{cases}$, $(j, t = 1, 2, \dots, p)$ olduğundan, her bir TB için katsayı vektörleri birim-normal vektörlerdir. Yani bu vektörler birim uzunluğa sahip ve birbirlerine dik (ortoganal) vektörlerdir. Bu sebeple $\boldsymbol{A}$ matrisi bir ortogonal matristir. Buna göre birbileri ile ilişkili olan değişkenlerin ($X_k, k = 1, 2, \dots, p$ veya $Z_k, k = 1, 2, \dots, p$) oluşturduğu sistemden, TB'leri elde edebilmek için $\underline{X}$ (veya

$\underline{Z}$) değişkenler vektörünü soldan bir ortogonal matris ile çarpmak gerekir. Bu takdirde elde edilecek olan TB'ler birbirleri ile ilişkisiz olacaktır.

Eşitlik (2.13) [veya (2.14)] ile elde edilen TB'ler vektörünün ortalama vektörü ile varyans-kovaryans matrisi sırasıyla (kitle için);

$E(\underline{\boldsymbol{Y}}) = \boldsymbol{A}E(\underline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{\mu}}$ ve

$$Cov(\underline{\boldsymbol{Y}}) = Cov(\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}cov(\underline{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A\Sigma A}' = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{Y_2}^2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{Y_p}^2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

iken, $E(\underline{\boldsymbol{Y}}) = \boldsymbol{A}E(\underline{\boldsymbol{Z}}) = \underline{\boldsymbol{0}}$ ve

$$Cov(\underline{\boldsymbol{Y}}) = Cov(\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}cov(\underline{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A\rho A}' = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{Y_2}^2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{Y_p}^2 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

olacaktır. Özellikle TB'lerin kovaryans matrislerinin elde edilmesinde $\boldsymbol{A}$ matrisinin ortogonal olduğu dikkate alınmıştır.

Şimdi önce Eşitlik (2.7) ile verilen TB'leri temsilen $Y = \underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{X}}$ doğrusal bağıntısını ele alalım. Bu doğrusal bağıntı için Eşitlik (2.9) gereğince $Var(Y) = \underline{\boldsymbol{a}}'\boldsymbol{\Sigma}\underline{\boldsymbol{a}}$ olacaktır. Birinci TB'ni bulmak için bu varyansı, $\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} = 1$ yan şartı altında maksimize etmeliyiz. Burada hem amaç fonksiyonu olan $Var(Y)$ hem de yan şart olan $\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} = 1$ ifadesi ikinci dereceden terimler olduğundan bu optimizasyon probleminin çözümünde Lagrange çarpanları yönteminden yararlanılır. Bu yönteme göre $\lambda > 0$ Lagrange çarpanı olmak üzere Lagrange fonksiyonu;

$$L(\underline{\boldsymbol{a}}, \lambda) = Var(Y) - \lambda(\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} - 1) = \underline{\boldsymbol{a}}'\boldsymbol{\Sigma}\underline{\boldsymbol{a}} - \lambda(\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} - 1)$$

olacaktır. Bu fonksiyonun $\underline{\boldsymbol{a}}$ vektörüne göre türevi alınırsa;

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\boldsymbol{a}}} = 2\boldsymbol{\Sigma}\underline{\boldsymbol{a}} - 2\lambda\underline{\boldsymbol{a}} = 2(\boldsymbol{\Sigma} - \lambda\boldsymbol{I}_p)\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}} \quad \Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \lambda\boldsymbol{I}_p)\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}} \tag{2.17}$$

elde edilir. Burada $\underline{\boldsymbol{a}} \neq \underline{\boldsymbol{0}}$ olduğundan $|\boldsymbol{\Sigma} - \lambda\boldsymbol{I}_p| = 0$ olmak zorundadır. Bu eşitliğin sol tarafındaki determinantın değeri λ'ya göre p-nci dereceden bir polinom olup, bu polinomun kökleri (p-tane), $\mathbf{\Sigma}$ matrisinin özdeğerleridir. $\mathbf{\Sigma}$ matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olduğundan, özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \geq 0$ sıralamasına uygundur. Elde edilen λ_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ özdeğerleri Eşitlik (2.17)'de yerine yazılmak suretiyle oluşturulacak olan; $(\mathbf{\Sigma} - \lambda_j \boldsymbol{I}_p)\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\mathbf{0}}$ homojen lineer denklem sisteminin çözüm vektörü $\mathbf{\Sigma}$ matrisinin λ_j özdeğerine karşılık gelen birim normal özvektörü olacaktır. Bu özvektör $\underline{\boldsymbol{a}}_j$ ile gösterilir. Öyle ki; $j, t = 1, 2, \ldots, p$ için

$$\underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{a}}_t = \begin{cases} 1, & j = t \;\Rightarrow\; \left\|\underline{\boldsymbol{a}}_j\right\| = 1 \\ 0 & j \neq t \;\Rightarrow \underline{\boldsymbol{a}}_j \perp \underline{\boldsymbol{a}}_t \end{cases} \tag{2.18}$$

özelliği sağlanır. $\mathbf{\Sigma}$ matrisinin özdeğerler matrisi $\mathbf{\Lambda} = K\text{öş}\left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\right]$ ile özvektörler matrisi de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{a}}'_1 \\ \underline{\boldsymbol{a}}'_2 \\ \vdots \\ \underline{\boldsymbol{a}}'_p \end{bmatrix}$ ile gösterilirse, $\mathbf{\Sigma}$ matrisi özdeğerleri ve özvektörleri cinsinden;

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{A} \tag{2.19}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazılışa $\mathbf{\Sigma}$ matrisinin Spektral Ayrışımı denir.

Sonuç olarak Eşitlik (2.7) ve (2.9) dikkate alındığında j-nci TB; $\underline{\boldsymbol{a}}'_j$, $\mathbf{\Sigma}$ matrisinin λ_j özdeğerine karşılık gelen birim normal özvektör olmak üzere; $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{X}}$ doğrusal bağıntısıdır. Bu TB'nin varyansı;

$$Var(Y_j) = Var(\underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \mathbf{\Sigma} \underline{\boldsymbol{a}}_j = \lambda_j \;,(j = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.20}$$

dir. Gerçekten; Eşitlik (2.19) dikkate alındığında $\boldsymbol{A}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{A}$ ve **A** **o**rtogonal olduğundan $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \boldsymbol{I}_p$ ve böylece $\boldsymbol{A}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{A} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a}}'_j \mathbf{\Sigma} = \lambda_j \underline{\boldsymbol{a}}'_j \,,(j = 1, 2, \ldots, p)$ olduğundan, Eşitlik (2.18)'den $Var(Y_j) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \mathbf{\Sigma} \underline{\boldsymbol{a}}_j = \lambda_j \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{a}}_j = \lambda_j$ bulunur. Buna göre her bir TB, $\mathbf{\Sigma}$ matrisinin bir $(\lambda_j\,,\ \underline{\boldsymbol{a}}_j), (\,j = 1, 2, \ldots, p)$ özdeğer-özvektör ikilisi ile ilgilidir. Yani;

$$\left.\begin{array}{l} 1.TB \;\Rightarrow\; Y_1 = \underline{\boldsymbol{a}}'_1 \underline{\boldsymbol{X}}\,,\;\; Var(Y_1) = \lambda_1 \\ 2.TB \;\Rightarrow\; Y_2 = \underline{\boldsymbol{a}}'_2 \underline{\boldsymbol{X}}\,,\;\; Var(Y_2) = \lambda_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ p.TB \;\Rightarrow\; Y_p = \underline{\boldsymbol{a}}'_p \underline{\boldsymbol{X}}\,,\;\; Var(Y_1) = \lambda_p \end{array}\right\} \tag{2.21}$$

olacaktır. Üstelik $j \neq k = 1, 2, \ldots, p$ için Eşitlik (2.11)'e göre; Eşitlik (2.19) ve (2.18)'den

$Cov(Y_j\,, Y_k) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \mathbf{\Sigma} \underline{\boldsymbol{a}}_k = \lambda_j \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{a}}_k = 0$ elde edilir, yani TB'ler ilişkisizdir. Ayrıca Eşitlik (2.15) ve (2.19) dikkate alındığında **A** matrisinin ortogonal olması sebebiyle TB'ler için kitle varyans kovaryans matrisi:

$$\mathbf{\Sigma}_{\underline{Y}} = \boldsymbol{A\Sigma A'} = \boldsymbol{AA'\Lambda AA'} = \mathbf{\Lambda} = K\ddot{o}ş[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p] \quad (2.22)$$

olup, böylece $j = 1, 2, \dots, p$ için $\sigma^2_{Y_j} = Var(Y_j) = \lambda_j$ elde edilir.

Şimdi de Eşitlik (2.8) ile verilen TB'leri temsilen $Y = \underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{Z}}$ doğrusal bağıntısını ele alalım. Bu doğrusal bağıntı için Eşitlik (2.10) gereğince $Var(Y) = \underline{\boldsymbol{a}}'\boldsymbol{\rho}\underline{\boldsymbol{a}}$ olacaktır. Birinci TB'ni bulmak için bu varyansı, $\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} = 1$ yan şartı altında maksimize etmeliyiz. Burada hem amaç fonksiyonu olan $Var(Y)$ hem de yan şart olan $\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} = 1$ ifadesi ikinci dereceden terimler olduğundan bu optimizasyon probleminin çözümünde yine Lagrange çarpanları yönteminden yararlanılır. Bu yönteme göre $\lambda > 0$ Lagrange çarpanı olmak üzere Lagrange fonksiyonu;

$$L(\underline{\boldsymbol{a}}, \lambda) = Var(Y) - \lambda(\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} - 1) = \underline{\boldsymbol{a}}'\boldsymbol{\rho}\underline{\boldsymbol{a}} - \lambda(\underline{\boldsymbol{a}}'\underline{\boldsymbol{a}} - 1)$$

olacaktır. Bu fonksiyonun $\underline{\boldsymbol{a}}$ vektörüne göre türevi alınırsa;

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\boldsymbol{a}}} = 2\boldsymbol{\rho}\underline{\boldsymbol{a}} - 2\lambda\underline{\boldsymbol{a}} = 2(\boldsymbol{\rho} - \lambda\boldsymbol{I}_p)\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}} \quad \Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{\rho} - \lambda\boldsymbol{I}_p)\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}} \quad (2.23)$$

elde edilir. Burada $\underline{\boldsymbol{a}} \neq \underline{\boldsymbol{0}}$ olduğundan $|\boldsymbol{\rho} - \lambda\boldsymbol{I}_p| = 0$ olmak zorundadır. Bu eşitliğin sol tarafındaki determinantın değeri λ'ya göre p-nci dereceden bir polinom olup, bu polinomun kökleri (p-tane), $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin özdeğerleridir. $\boldsymbol{\rho}$ matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olduğundan, özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \geq 0$ sıralamasına uygundur. Elde edilen λ_j $(j = 1, 2, \dots, p)$ özdeğerleri Eşitlik (2.23)'de yerine yazılmak suretiyle oluşturulacak olan; $(\boldsymbol{\rho} - \lambda_j\boldsymbol{I}_p)\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}}$ homojen lineer denklem sisteminin çözüm vektörü $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin λ_j özdeğerine karşılık gelen birim normal özvektörü olacaktır. Bu özvektör $\underline{\boldsymbol{a}}_j$ ile gösterilir. Öyle ki; $j, t = 1, 2, \dots, p$ için

$$\underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{a}}_t = \begin{cases} 1, & j = t \;\Rightarrow\; \|\underline{\boldsymbol{a}}_j\| = 1 \\ 0 & j \neq t \;\Rightarrow \underline{\boldsymbol{a}}_j \perp \underline{\boldsymbol{a}}_t \end{cases} \quad (2.24)$$

özelliği sağlanır. $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin özdeğerler matrisi $\mathbf{\Lambda} = K\ddot{o}ş[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$ ile özvektörler matrisi de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{a}}'_1 \\ \underline{\boldsymbol{a}}'_2 \\ \vdots \\ \underline{\boldsymbol{a}}'_p \end{bmatrix}$ ile gösterilirse, $\boldsymbol{\rho}$ matrisi özdeğerleri ve özvektörleri cinsinden;

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{A}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{A} \quad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazılışa da $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin Spektral Ayrışımı denir.

Sonuç olarak Eşitlik (2.8) ve (2.10) dikkate alındığında j-nci TB; $\underline{\boldsymbol{a}}'_j$, $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin λ_j özdeğerine karşılık gelen birim normal özvektör olmak üzere $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{X}}$ doğrusal bağıntısıdır. Bu TB'nin varyansı;

$$Var(Y_j) = Var(\underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\boldsymbol{\rho}\underline{\boldsymbol{a}}_j = \lambda_j\,, (j = 1, 2, \dots, p) \tag{2.26}$$

dir. Gerçekten; Eşitlik (2.25) dikkate alındığında $\boldsymbol{A\rho} = \mathbf{AA'\Lambda A}$ ve $\mathbf{A}$ **o**rtogonal olduğundan $\mathbf{AA'} = \boldsymbol{I}_p$ ve böylece $\boldsymbol{A\rho} = \mathbf{\Lambda A} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a}}'_j\boldsymbol{\rho} = \lambda_j\underline{\boldsymbol{a}}'_j\,, (j = 1, 2, \dots, p)$ olduğundan, Eşitlik (2.24)'den $Var(Y_j) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\boldsymbol{\rho}\underline{\boldsymbol{a}}_j = \lambda_j\underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{a}}_j = \lambda_j$ bulunur. Buna göre her bir TB, $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin bir $(\lambda_j\,,\ \underline{\boldsymbol{a}}_j), (j = 1, 2, \dots, p)$ özdeğer-özvektör ikilisi ile ilgilidir. Yani;

$$\left.\begin{array}{l} 1.TB \ \Rightarrow\ Y_1 = \underline{\boldsymbol{a}}'_1\underline{\boldsymbol{Z}}\,,\ \ Var(Y_1) = \lambda_1 \\ 2.TB \ \Rightarrow\ Y_2 = \underline{\boldsymbol{a}}'_2\underline{\boldsymbol{Z}}\,,\ \ Var(Y_2) = \lambda_2 \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ p.TB \ \Rightarrow\ Y_p = \underline{\boldsymbol{a}}'_p\underline{\boldsymbol{Z}}\,,\ \ Var(Y_1) = \lambda_p \end{array}\right\} \tag{2.27}$$

olacaktır. Üstelik $j \neq t = 1, 2, \dots, p$ için Eşitlik (2.12)'ye göre; Eşitlik (2.25) ve (2.24)'den

$Cov(Y_j\,, Y_t) = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\boldsymbol{\rho}\underline{\boldsymbol{a}}_t = \lambda_j\underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{a}}_t = 0$ elde edilir, yani $\boldsymbol{\rho}$ matrisi kullanılarak standart değişkenlerin doğrusal fonksiyonları şeklinde elde edilen TB'ler de ilişkisizdir. Ayrıca Eşitlik (2.16) ve (2.25) dikkate alındığında **A** matrisinin ortogonal olması sebebiyle TB'ler için kitle varyans kovaryans matrisi:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\underline{Y}} = \boldsymbol{A\rho A'} = \boldsymbol{AA'\Lambda AA'} = \boldsymbol{\Lambda} = K\text{öş}[\lambda_1, \lambda_2, \dots\,,\ \lambda_p] \tag{2.28}$$

olup, böylece $j = 1, 2, \dots, p$ için $\sigma^2_{Y_j} = Var(Y_j) = \lambda_j$ elde edilir.