

7.3 2³ Faktöriyel Tasarım

Bağımlı değişken (Y) nicel türden, sürekli ve en az eşit aralıklı ölçme düzeyine sahip bir değişken olsun. Bu değişkenin her biri ikiye düzeyli üç faktör (A, B, C) tarafından etkilendiğini varsayalım. Her bir faktör için faktör düzeyleri düşük düzey ve yüksek düzey olarak belirlensin, yani faktörler nicel türden, kesikli veya sürekli ve ölçme düzeyleri sıralama olsun. Bu faktörler yardımıyla bağımlı değişkene ait değişimi açıklayabilmek amacı ile kullanılacak olan istatistiksel deney tasarımına 2³ faktöriyel tasarım denir. Bu deney tasarımında deneme kombinasyonlarının sayısı $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ dir. Bu deneme kombinasyonları (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc ile gösterilir. Her bir deneme kombinasyonunda n tekrar olduğunda 2³ faktöriyel tasarımı için model denklemi;

$$Y_{ijtk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \gamma_t + \alpha\gamma_{it} + \beta\gamma_{jt} + \alpha\beta\gamma_{ijt} + \varepsilon_{k(ijt)}, \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \\ t = 1, 2 \\ k = \overline{1, n} \end{cases} \quad (7.11)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

Y_{ijtk} : A faktörünün i-nci düzeyinde, B faktörünün j-nci düzeyinde ve C faktörünün t-nci düzeyinde k-ncı birime ait gözlem değeri

$\mu_{...}$: Genel kitle ortalaması

α_i : A faktörünün i-nci düzey etkisi, ($\alpha_i = \mu_{i...} - \mu_{...}$)

β_j : B faktörünün j-nci düzey etkisi, ($\beta_j = \mu_{.j..} - \mu_{...}$)

$\alpha\beta_{ij}$: A ve B faktörlerinin etkileşim etkisi, ($\alpha\beta_{ij} = \mu_{ij..} - \mu_{i...} - \mu_{.j..} + \mu_{...}$)

γ_t : C faktörünün t-nci düzey etkisi, ($\gamma_t = \mu_{.t.} - \mu_{...}$)

$\alpha\gamma_{it}$: A ve C faktörlerinin etkileşim etkisi, ($\alpha\gamma_{it} = \mu_{i.t.} - \mu_{i...} - \mu_{.t.} + \mu_{...}$)

$\beta\gamma_{jt}$: B ve C faktörlerinin etkileşim etkisi, ($\beta\gamma_{jt} = \mu_{.jt.} - \mu_{.j..} - \mu_{.t.} + \mu_{...}$)

$\alpha\beta\gamma_{ijt}$: A, B ve C faktörlerinin etkileşim etkisi, ($\alpha\beta\gamma_{ijt} = \mu_{ij.t.} - \mu_{ij..} - \mu_{i.t.} - \mu_{.jt.} + \mu_{i...} + \mu_{.j..} + \mu_{.t.} - \mu_{...}$)

$\varepsilon_{k(ijt)}$: Hata terimidir.

2³ faktöriyel tasarımda faktörlerin düzeylerinin özel seçimli olması durumunda model sabit etkili model olup, bu model kapsamında test edilecek hipotezler:

i) A faktörünün etkisinin önemliliği için; $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ $H_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2$	ii) B faktörünün etkisinin önemliliği için; $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ $H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$	iii) AB etkileşim etkisinin önemliliği için; $H_0 : \alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{12} = \alpha\beta_{21} = \alpha\beta_{22} = 0$ $H_1 : \exists \alpha\beta_{ij} \neq 0$
---	--	--

iv) C faktörünün etkisinin önemliliği için; $H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ $H_1 : \gamma_1 \neq \gamma_2$	v) AC etkileşim etkisinin önemliliği için; $H_0 : \alpha\gamma_{11} = \alpha\gamma_{12} = \alpha\gamma_{21} = \alpha\gamma_{22} = 0$ $H_1 : \exists \alpha\gamma_{it} \neq 0$	vi) BC etkileşim etkisinin önemliliği için; $H_0 : \beta\gamma_{11} = \beta\gamma_{12} = \beta\gamma_{21} = \beta\gamma_{22} = 0$ $H_1 : \exists \beta\gamma_{ij} \neq 0$
--	---	---

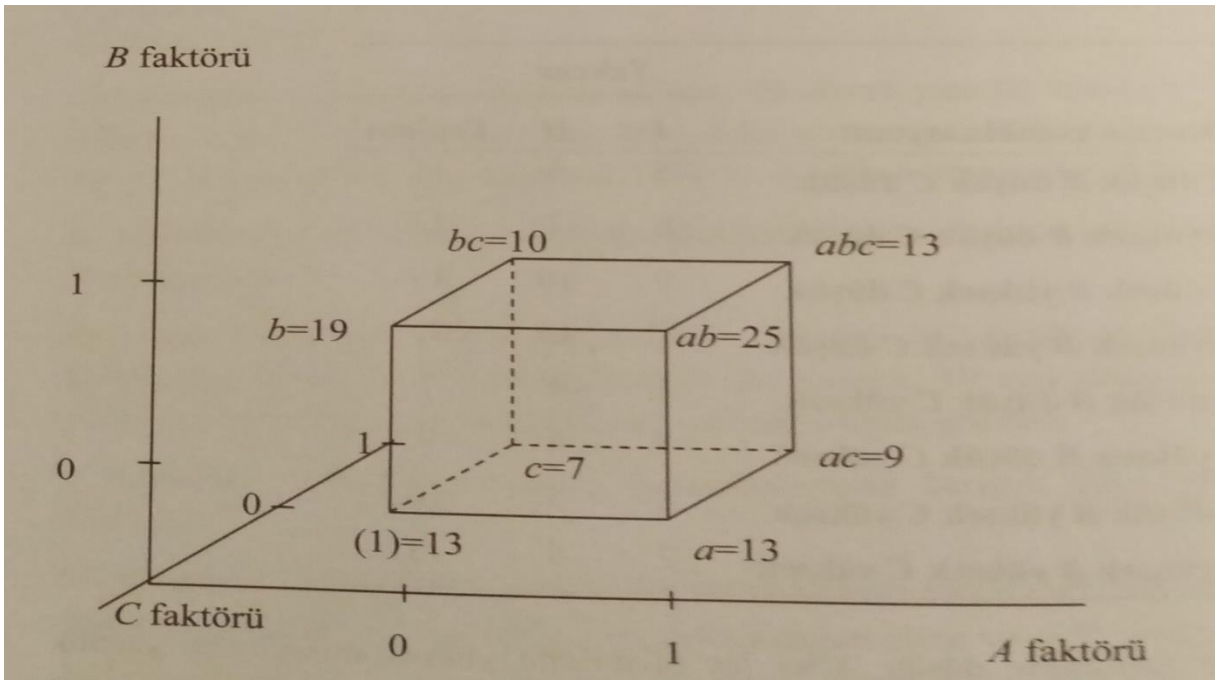
vii) ABC etkileşim etkisinin önemliliği için;

$$H_0 : \alpha\beta\gamma_{111} = \alpha\beta\gamma_{112} = \alpha\beta\gamma_{121} = \alpha\beta\gamma_{122} = \alpha\beta\gamma_{211} = \alpha\beta\gamma_{212} = \alpha\beta\gamma_{221} = \alpha\beta\gamma_{222} = 0$$

$$H_1 : \exists \alpha\gamma_{ijt} \neq 0$$

şeklinde ifade edilir.

2^3 faktöriyel tasarımda deneme kombinasyonlarının grafik gösterimi Şekil 7.2’de verildiği gibi, A, B ve C faktörlerinin düşük ve yüksek düzeyleri koordinat eksenleri üzerinde sırası ile “0 ve 1” olarak gösterilebilir. Burada “0” faktörlerin düşük düzeylerine “1” ise yüksek düzeylerine karşılık gelmektedir. Böylece deneme kombinasyonları ve onlara karşılık gelen yeni notasyonlar Tablo 7.6’deki gibi düzenlenir.



Şekil 7.2 2^3 faktöriyel tasarımda deneme kombinasyonlarının geometrik gösterimi

Tablo 7.6 2^3 Faktöriyel Tasarımda Deneme Kombinasyonları

	Deneme Kombinasyonları	
A düşük B düşük C düşük	000	(1)
A yüksek B düşük C düşük	100	a
A düşük B yüksek C düşük	010	b
A yüksek B yüksek C düşük	110	ab
A düşük B düşük C yüksek	001	c
A yüksek B düşük C yüksek	101	ac
A düşük B yüksek C yüksek	011	bc
A yüksek B yüksek C yüksek	111	abc

Deneme kombinasyonlarında n tekrar olduğunda; A faktörü için faktör etkisinin tahmini, B ve C 'nin farklı düzeyleri için Tablo 7.7'deki gibi verilir.

Tablo 7.7 2^3 Faktöriyel Tasarımda B ve C 'nin farklı düzeylerinde A 'nın etki tahmini

B	C	A'nın etkisinin tahmini
düşük	düşük	$[a - (1)]/n$
yüksek	düşük	$[ab - b]/n$
düşük	yüksek	$[ac - c]/n$
yüksek	yüksek	$[abc - bc]/n$

B faktörü için faktör etkisinin tahmini, A ve C 'nin farklı düzeyleri için Tablo 7.8'deki gibi verilir.

Tablo 7.8 2^3 Faktöriyel Tasarımda A ve C 'nin farklı düzeylerinde B 'nin etki tahmini

A	C	B'nin etkisinin tahmini
düşük	düşük	$[b - (1)]/n$
yüksek	düşük	$[ab - a]/n$
düşük	yüksek	$[bc - c]/n$
yüksek	yüksek	$[abc - ac]/n$

C faktörü için faktör etkisinin tahmini, A ve B 'nin farklı düzeyleri için Tablo 7.9'daki gibi verilir.

Tablo 7.9 2^3 Faktöriyel Tasarımda A ve B 'nin farklı düzeylerinde C 'nin etki tahmini

A	B	C'nin etkisinin tahmini
düşük	düşük	$[c - (1)]/n$
yüksek	düşük	$[ac - a]/n$
düşük	yüksek	$[bc - b]/n$
yüksek	yüksek	$[abc - ab]/n$

Böylece Tablo 7.7'den A faktörünün, Tablo 7.8'den B faktörünün ve Tablo 7.9'dan da C faktörünün ortalama etkileri sırasıyla;

$$A = \frac{1}{4n} \{[a - (1)] + [ab - b] + [ac - c] + [abc - bc]\}$$

$$= \frac{1}{4n} \{- (1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc\} \quad (7.12)$$

$$B = \frac{1}{4n} \{[b - (1)] + [ab - a] + [bc - c] + [abc - ac]\}$$

$$= \frac{1}{4n} \{- (1) - a + b + ab - c - ac + bc + abc\} \quad (7.13)$$

$$C = \frac{1}{4n} \{[c - (1)] + [ac - a] + [bc - b] + [abc - ab]\}$$

$$= \frac{1}{4n} \{- (1) - a - b - ab + c + ac + bc + abc\} \quad (7.14)$$

elde edilir.

AB etkileşim etkisinin bulunması: C düşük düzeyde olduğunda, B 'nin yüksek düzeyinde A 'nın etkisi $[ab - b]/n$ ve B 'nin düşük düzeyinde A 'nın etkisi $[a - (1)]/n$ arasındaki farkın

ortalaması alınır. Yani $\frac{1}{2n} \{[ab - b] - [a - (1)]\}$ 'dir. C yüksek düzeyde olduğunda, B 'nin yüksek düzeyinde A 'nın etkisi $[abc - bc]/n$ ve B 'nin düşük düzeyinde A 'nın etkisi $[ac - c]/n$ arasındaki farkın ortalaması alınır. Yani $\frac{1}{2n} \{[abc - bc] - [ac - c]\}$ 'dir. Bu durum Tablo 7.10'da gösterildi.

Tablo 7.10 2^3 Faktöriyel Tasarımda AB Etkileşim Etkisinin Tahmini

C	B	A 'nın Etkisinin Tahmini	AB Etkileşim Etkisinin Tahmini
Düşük	Yüksek	$[ab - b]/n$	$\frac{1}{2n} \{[ab - b] - [a - (1)]\}$
	Düşük	$[a - (1)]/n$	
Yüksek	Yüksek	$[abc - bc]/n$	$\frac{1}{2n} \{[abc - bc] - [ac - c]\}$
	Düşük	$[ac - c]/n$	

Tablo 7.10'a göre AB etkileşim etkisinin ortalaması son sütundaki iki etkinin ortalaması alınır;

$$AB = \frac{1}{4n} \{(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc\} \quad (7.15)$$

olarak bulunur.

AC etkileşim etkisinin bulunması: B düşük düzeyde olduğunda, C 'nin yüksek düzeyinde A 'nın etkisi $[ac - c]/n$ ve C 'nin düşük düzeyinde A 'nın etkisi $[a - (1)]/n$ arasındaki farkın ortalaması alınır. Yani $\frac{1}{2n} \{[ac - c] - [a - (1)]\}$ 'dir. B yüksek düzeyde olduğunda, C 'nin yüksek düzeyinde A 'nın etkisi $[abc - bc]/n$ ve C 'nin düşük düzeyinde A 'nın etkisi $[ab - b]/n$ arasındaki farkın ortalaması alınır. Yani $\frac{1}{2n} \{[abc - bc] - [ab - b]\}$ 'dir. Bu durum Tablo 7.11'de gösterildi.

Tablo 7.11 2^3 Faktöriyel Tasarımda AC Etkileşim Etkisinin Tahmini

B	C	A 'nın Etkisinin Tahmini	AC Etkileşim Etkisinin Tahmini
Düşük	Yüksek	$[ac - c]/n$	$\frac{1}{2n} \{[ac - c] - [a - (1)]\}$
	Düşük	$[a - (1)]/n$	
Yüksek	Yüksek	$[abc - bc]/n$	$\frac{1}{2n} \{[abc - bc] - [ab - b]\}$
	Düşük	$[ab - b]/n$	

Tablo 7.11'e göre AC etkileşim etkisinin ortalaması son sütundaki iki etkinin ortalaması alınır;

$$AC = \frac{1}{4n} \{(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc\} \quad (7.16)$$

olarak bulunur.

BC etkileşim etkisinin bulunması: A düşük düzeyde olduğunda, C 'nin yüksek düzeyinde B 'nin etkisi $[bc - c]/n$ ve C 'nin düşük düzeyinde B 'nin etkisi $[b - (1)]/n$ arasındaki farkın ortalaması alınır. Yani $\frac{1}{2n}\{[bc - c] - [b - (1)]\}$ 'dir. A yüksek düzeyde olduğunda, C 'nin yüksek düzeyinde B 'nin etkisi $[abc - ac]/n$ ve C 'nin düşük düzeyinde B 'nin etkisi $[ab - a]/n$ arasındaki farkın ortalaması alınır. Yani $\frac{1}{2n}\{[abc - ac] - [ab - a]\}$ 'dir. Bu durum Tablo 7.12'de gösterildi.

Tablo 7.12 2^3 Faktöriyel Tasarımda BC Etkileşim Etkisinin Tahmini

A	C	B'nin Etkisinin Tahmini	BC Etkileşim Etkisinin Tahmini
Düşük	Yüksek	$[bc - c]/n$	$\frac{1}{2n}\{[bc - c] - [b - (1)]\}$
	Düşük	$[b - (1)]/n$	
Yüksek	Yüksek	$[abc - ac]/n$	$\frac{1}{2n}\{[abc - ac] - [ab - a]\}$
	Düşük	$[ab - a]/n$	

Tablo 7.12'ye göre BC etkileşim etkisinin ortalaması son sütundaki iki etkinin ortalaması alınır;

$$BC = \frac{1}{4n}\{(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc\} \quad (7.17)$$

olarak bulunur.

Son olarak C 'nin düşük ve yüksek düzeylerinde elde edilen AB etkileşimleri arasındaki farkın ortalaması ABC etkileşim etkisini vereceğinden;

$$\begin{aligned} ABC &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2n}\{[abc - bc] - [ac - c]\} - [ab - b] + [a - (1)]\right\} \\ &= \frac{1}{4n}\{- (1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc\} \end{aligned} \quad (7.18)$$

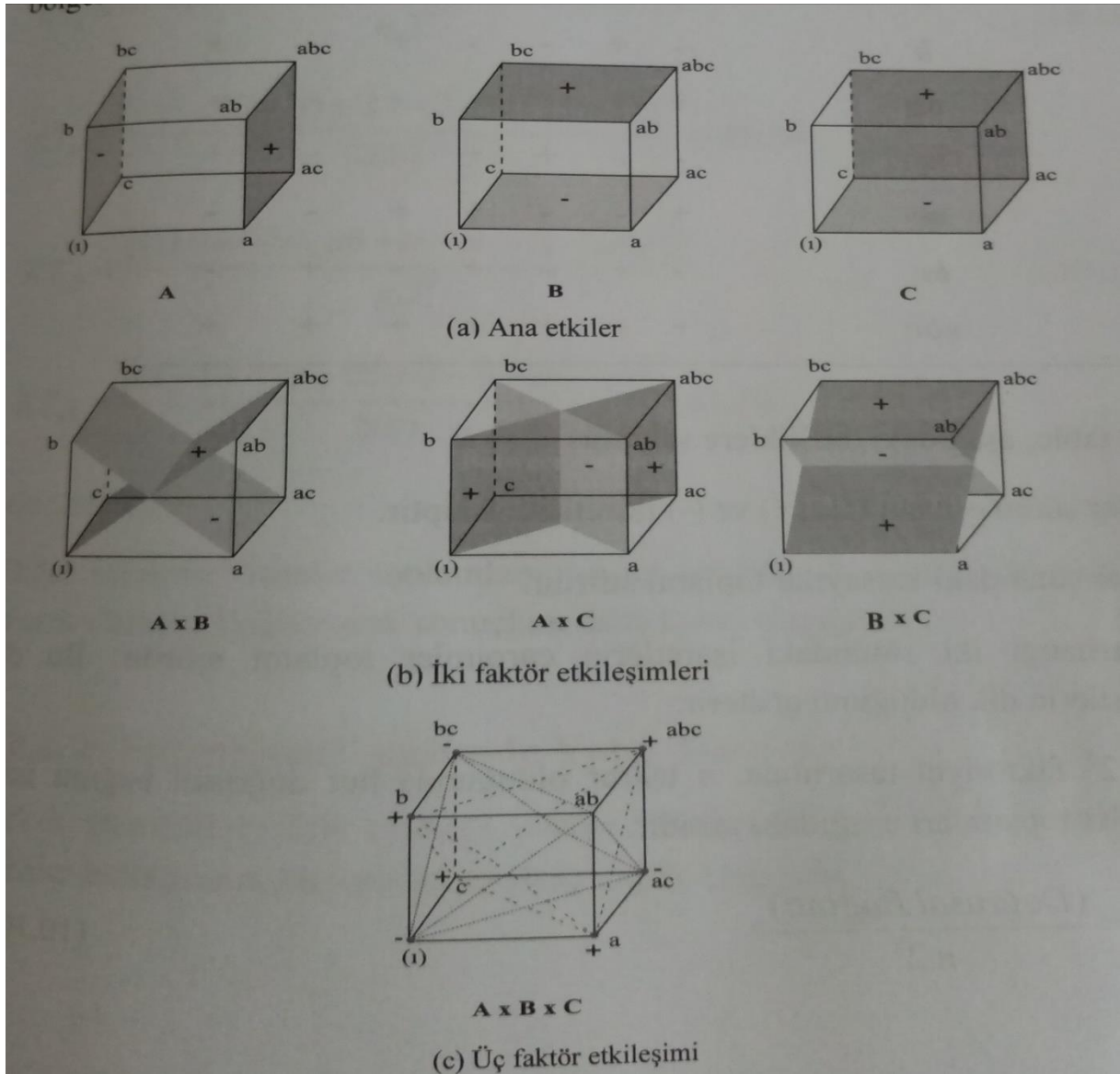
olarak elde edilir.

Ana etkiler (A, B, C), iki faktör etkileşimleri (AB, AC, BC) ve üç faktör etkileşimine (ABC) ait grafiksel gösterimler (Şekil 7.3) yukarıda verilen ortalama etkilerin elde edilmesini anlamada kolaylık sağlamaktadır. Bu grafiksel gösterimlere göre koyu renkli bölgelerden açık renkli bölgeler arasındaki fark alınarak ortalama etkiler belirlenmektedir.

Bir 2^3 faktöriyel tasarımda etkilerin katsayılarının işaretleri Tablo 7.13'de verildiği gibidir.

Tablo 7.13 aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i) Her sütun eşit sayıda (+) ve (-) işaretler dizisine sahiptir.
- ii) Her sütundaki katsayılar toplamı sıfırdır.
- iii) Her hangi iki sütundaki katsayıların çarpımları toplamı sıfırdır. Yani tüm etkiler birbirine diktir.



Şekil 7.3 Ana etkiler ile ikili ve üçlü etkileşimlere ait grafiksel gösterim

Tablo 7.13 Bir 2^3 Faktöriyel Tasarımda Etkilerin Katsayılarının İşaretleri

Deneme Kombinasyonları	Etkiler						
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>AB</i>	<i>C</i>	<i>AC</i>	<i>BC</i>	<i>ABC</i>
(1)	-	-	+	-	+	+	-
a	+	-	-	-	-	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	-	-	-	-
c	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	-	-	+	+	-	-
bc	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+

Bir 2^3 faktöriyel tasarımda deneme kombinasyonlarında n tekrar olduğunda toplam deney (örnek birimi veya gözlem) sayısı $N = 2^3 \times n$ 'dir. Ayrıca tüm etkiler için toplam etki tahminleri Eşitlik (7.12), (7.13), (7.14), (7.15), (7.16), (7.17) ve (7.18) dikkate alındığında sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{cases} 4nA = \{- (1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc\} \\ 4nB = \{- (1) - a + b + ab - c - ac + bc + abc\} \\ 4nC = \{- (1) - a - b - ab + c + ac + bc + abc\} \\ 4nAB = \{(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc\} \\ 4nAC = \{(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc\} \\ 4nBC = \{(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc\} \\ 4nABC = \{- (1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc\} \end{cases} \quad (7.19)$$

Eşitlik (7.19) ile verilen tüm toplam etkiler birer doğrusal bağıntı olup, n tekrarlı 2^3 faktöriyel tasarımda bu doğrusal bağıntılar için kareler toplamları elde edilebilir. Bunun için Eşitlik (7.20) ile verilen genel formülden ya da Yates yönteminden yararlanabiliriz.

$$KT = \frac{(\text{Doğrusal Bağıntı})^2}{N}, \quad (N = 2^3 \times n) \quad (7.20)$$

Buna göre 2^3 faktöriyel tasarımda test edilecek hipotezler için test istatistiklerinin türetilmesinde gerekli olan ve bağımlı değişkene ait genel değişimi gösteren KT_{Genel} ile bu genel değişimin birbirinden bağımsız parçalarını oluşturan tüm değişim kaynaklarına ait kareler toplamları hesaplanabilir.

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{t=1}^2 \sum_{k=1}^n Y_{ijtk}^2 - \frac{(T \dots)^2}{N} \quad (7.21)$$

$$KT_A = \frac{[-(1)+a-b+ab-c+ac-bc+abc]^2}{N} \quad (7.22)$$

$$KT_B = \frac{[-(1)-a+b+ab-c-ac+bc+abc]^2}{N} \quad (7.23)$$

$$KT_{AB} = \frac{[(1)-a-b+ab+c-ac-bc+abc]^2}{N} \quad (7.24)$$

$$KT_C = \frac{[-(1)-a-b-ab+c+ac+bc+abc]^2}{N} \quad (7.25)$$

$$KT_{AC} = \frac{[(1)-a+b-ab-c+ac-bc+abc]^2}{N} \quad (7.26)$$

$$KT_{BC} = \frac{[(1)+a-b-ab-c-ac+bc+abc]^2}{N} \quad (7.27)$$

$$KT_{ABC} = \frac{[-(1)+a+b-ab+c-ac-bc+abcc]^2}{N} \quad (7.28)$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B - KT_{AB} - KT_C - KT_{AC} - KT_{BC} - KT_{ABC} \quad (7.29)$$

Yates yöntemi ile doğrusal bağıntıların ve düzeltme terimi ile etkilere ait kareler toplamlarının elde edilmesi Bölüm 7.2'de verilen yöntemin faktör sayısı kadar tekrarlanarak uygulanması ile mümkündür ve daha kolaydır. Böylece 2^3 faktöriyel tasarımda test edilecek hipotezler için test

istatistiklerinin elde edilmesi için gerekli olan diğer işlemler Tablo 7.14 ile verilen varyans analizi tablosunda özetlenmiştir.

Tablo 7.14 2^3 Faktöriyel Tasarımda Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı	s.d	KT	KO	Test İstatistiği
<i>A</i>	1	KT_A	$KO_A = KT_A/1$	$F_A = KO_A/KO_{Hata}$
<i>B</i>	1	KT_B	$KO_B = KT_B/1$	$F_B = KO_B/KO_{Hata}$
<i>AB</i>	1	KT_{AB}	$KO_{AB} = KT_{AB}/1$	$F_{AB} =$ KO_{AB}/KO_{Hata}
<i>C</i>	1	KT_C	$KO_C = KT_C/1$	$F_C = KO_C/KO_{Hata}$
<i>AC</i>	1	KT_{AC}	$KO_{AC} = KT_{AC}/1$	$F_{AC} =$ KO_{AC}/KO_{Hata}
<i>BC</i>	1	KT_{BC}	$KO_{BC} = KT_{BC}/1$	$F_{BC} =$ KO_{BC}/KO_{Hata}
<i>ABC</i>	1	KT_{ABC}	$KO_{ABC} = KT_{ABC}/1$	$F_{ABC} =$ KO_{ABC}/KO_{Hata}
Hata	$2^3(n-1)$	KT_{Hata}	$KO_{Hata} =$ $KT_{Hata}/2^3(n-1)$	
Genel	$N-1$	KT_{Genel}		

Karar: Önemliliği araştırılan etki için kritik değer α önen seviyesinde $F_t = F_{1; 2^3(n-1); \alpha}$ olmak üzere $F > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve ilgili etkinin önemli olduğuna karar verilir. Eğer $F \leq F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez ve ilgili etkinin önemsiz olduğuna karar verilir.

Örnek 7.2 Yapılan bir çalışmada erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerinin hangi faktör/ler veya etkileşim tarafından etkilendiği araştırılıyor. Bu çalışmada, bağımlı değişkeni etkileyen üç faktör: Yüzücülerin yaşı (*A*), ağırlığı (*B*) ve kondüsyonu (*C*) dur. Yaş faktörünün düzeyleri düşük (yaş<35) ve yüksek (yaş≥35) iken, ağırlık faktörünün düzeyleri düşük (ağırlık<70) ve yüksek (ağırlık≥70) şeklinde ve Kondüsyon faktörünün düzeyleri kondisyon düşük ve kondüsyon yüksek şeklinde belirlenmiş olsun. Deneme kombinasyonlarında 2 tekrar olduğu varsayımı altında elde edilen veriler aşağıda verilmiştir. Buna göre;

- Problemin analizi için uygun deney tasarımını ve model denklemini belirleyiniz.
- Model kapsamında test edilebilecek hipotezleri belirleyiniz.
- Ana etkiler ve etkileşim için ortalama etkileri ve toplam etkileri hesaplayınız.
- Tüm etkilere ait kareler toplamlarını formüller yardımıyla ve Yates yöntemi ile ayrı ayrı hesaplayınız, Varyans analizi tablosunu düzenleyiniz.

- e) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş faktörünün etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz.
- f) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde ağırlık faktörünün etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz.
- g) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş×ağırlık etkileşim etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz.
- h) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde kondüsyon etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz.
- ı) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş×kondüsyon etkileşim etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz.
- i) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde ağırlık×kondüsyon etkileşim etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz.
- j) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş× ağırlık × kondüsyon etkileşim etkisinin önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

Deneme Kombinasyonları	Tekrar			
		I	II	Toplam
A Düşük B Düşük C Düşük	(1)	5	6	11
A Yüksek B Düşük C Düşük	a	6	7	13
A Düşük B Yüksek C Düşük	b	9	10	19
A Yüksek B Yüksek C Düşük	ab	12	13	25
A Düşük B Düşük C Yüksek	c	3	4	7
A Yüksek B Düşük C Yüksek	ac	5	4	9
A Düşük B Yüksek C Yüksek	bc	5	5	10
A Yüksek B Yüksek C Yüksek	abc	7	6	13
$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Y_{ijk}^2$		394	447	$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{t=1}^2 \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 = 841 ;$ $T_{...} = 107;$ $N = 2^3 \times n = 2^3 \times 2 = 16$

Çözüm: a) Bağımlı değişken (Y): Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme süresi (sn)... Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

A Faktörü : Yüzücünün yaşı... Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi sıralama

Faktör düzeyleri: $\begin{cases} \text{Düşük (yaş < 35)} \\ \text{Yüksek (yaş ≥ 35)} \end{cases}$ olup 2 düzeyi var. Bağımsız gruplar

B Faktörü: Yüzücünün ağırlığı... Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi sıralama

Faktör düzeyleri: $\begin{cases} \text{Düşük (ağırlık < 70)} \\ \text{Yüksek (ağırlık ≥ 70)} \end{cases}$ olup 2 düzeyi var. Bağımsız gruplar

C Faktörü: Yüzücünün kondüsyonu... Nitel ve ölçme düzeyi sıralama

Faktör düzeyleri: $\begin{cases} \text{Düşük kondüsyon} \\ \text{Yüksek kondüsyon} \end{cases}$ olup 2 düzeyi var. Bağımsız gruplar

Bu açıklamaların ışığında problemin çözümü için uygun istatistiksel deney tasarımı 2^3 Faktöriyel Tasarımıdır. Deneme kombinasyonlarının sayısı $2^3 = 8$ tanedir. Her deneme kombinasyonunda $n = 2$ tekrar söz konusu olduğundan, bağımlı değişken üzerinde tüm ana etkilerin yanısıra mümkün olan ikili ve üçlü etkileşimlerin etkilerinin de önemliliği araştırılabilir. Bu durumda model denklemi Eşitlik (7.11)'de verildiği gibidir:

$$Y_{ijtk} = \mu \dots + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \gamma_t + \alpha\gamma_{it} + \beta\gamma_{jt} + \alpha\beta\gamma_{ijt} + \varepsilon_{k(ijt)}, \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \\ t = 1, 2 \\ k = \overline{1, n} \end{cases} ; (n = 2)$$

b) Model kapsamında test edilebilecek hipotezler:

A Faktörü (Yüzücünün yaşı) için:

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaşın etkisi önemsizdir)

$H_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaşın etkisi önemlidir)

B Faktörü (Yüzücünün ağırlığı için)

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlığın etkisi önemsizdir)

$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlığın etkisi önemlidir)

AB Etkileşim etkisi için

$H_0 : \alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{12} = \alpha\beta_{21} = \alpha\beta_{22} = 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş ve ağırlığın etkileşim etkisi önemsizdir)

$H_1 : \exists \alpha\beta_{ij} \neq 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş ve ağırlığın etkileşim etkisi önemlidir)

C Faktörü (Yüzücünün kondüsyonu için)

$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlığın etkisi önemsizdir)

$H_1 : \gamma_1 \neq \gamma_2$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlığın etkisi önemlidir)

AC Etkileşim etkisi için

$H_0 : \alpha\gamma_{11} = \alpha\gamma_{12} = \alpha\gamma_{21} = \alpha\gamma_{22} = 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş ve kondüsyon etkileşim etkisi önemsizdir)

$H_1 : \exists \alpha\gamma_{ij} \neq 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş ve kondüsyon etkileşim etkisi önemlidir)

BC Etkileşim etkisi için

$H_0 : \beta\gamma_{11} = \beta\gamma_{12} = \beta\gamma_{21} = \beta\gamma_{22} = 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlık ve kondüsyon etkileşim etkisi önemsizdir)

$H_1 : \exists \beta\gamma_{ij} \neq 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlık ve kondüsyon etkileşim etkisi önemlidir)

ABC Etkileşim etkisi için

$H_0 : \alpha\beta\gamma_{111} = \alpha\beta\gamma_{112} = \alpha\beta\gamma_{121} = \alpha\beta\gamma_{122} = \alpha\beta\gamma_{211} = \alpha\beta\gamma_{212} = \alpha\beta\gamma_{221} = \alpha\beta\gamma_{222} = 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş×ağırlık×kondüsyon etkileşim etkisi önemsizdir)

$H_1 : \exists \alpha\gamma_{ijt} \neq 0$ (Erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş×ağırlık×kondüsyon etkileşim etkisi önemlidir)

c) Ana etkiler, ikili ve üçlü etkileşim için ortalama etkileri Eşitlik (7.12)-(7.18) ile bulunur.

A faktörü için ortalama etki; $A = \frac{1}{4n} \{-(1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc\} = \frac{1}{4 \times 2} [-11 + 13 - 19 + 25 - 7 + 9 - 10 + 13] = 1,625$

B faktörü için ortalama etki; $B = \frac{1}{4n} \{-(1) - a + b + ab - c - ac + bc + abc\} = \frac{1}{4 \times 2} [-11 - 13 + 19 + 25 - 7 - 9 + 10 + 13] = 3,375$

AB etkileşimi için ortalama etki; $AB = \frac{1}{4n} \{(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc\} = \frac{1}{4 \times 2} [11 - 13 - 19 + 25 + 7 - 9 - 10 + 13] = 0,625$

C faktörü için ortalama etki; $C = \frac{1}{4n} \{-(1) - a - b - ab + c + ac + bc + abc\} = \frac{1}{4 \times 2} [-11 - 13 - 19 - 25 + 7 + 9 + 10 + 13] = -3,625$

AC etkileşimi için ortalama etki; $AC = \frac{1}{4n} \{(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc\} = \frac{1}{4 \times 2} [11 - 13 + 19 - 25 - 7 + 9 - 10 + 13] = -0,375$

BC etkileşimi için ortalama etki; $BC = \frac{1}{4n} \{(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc\} = \frac{1}{4 \times 2} [11 + 13 - 19 - 25 - 7 - 9 + 10 + 13] = -1,625$

ABC etkileşimi için ortalama etki; $ABC = \frac{1}{4n} \{-(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc\} = \frac{1}{4 \times 2} [-11 + 13 + 19 - 25 + 7 - 9 - 10 + 13] = -0,375$

Ana etkiler ve etkileşimler için toplam etkiler ise tekrar sayısı $n = 2$ olduğu dikkate alınarak Eşitlik (7.19)'da verilen denklemlerden hesaplanır.

A faktörü için toplam etki; $8A = 8 \times 1,625 = 13$

B faktörü için toplam etki; $8B = 8 \times 3,375 = 27$

AB etkileşimi için toplam etki; $8AB = 8 \times 0,625 = 5$

C faktörü için toplam etki; $8C = 8 \times (-3,625) = -29$

AC etkileşimi için toplam etki; $8AC = 8 \times (-0,375) = -3$

BC etkileşimi için toplam etki; $8BC = 8 \times (-1,625) = -13$

ABC etkileşimi için toplam etki; $8ABC = 8 \times (-0,375) = -3$

d) Tüm etkilere ait kareler toplamlarının formüller [Eşitlik (7.21)-(7.29)] yardımıyla hesaplanması:

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{t=1}^2 \sum_{k=1}^n Y_{ijtk}^2 - \frac{(T \dots)^2}{N} = 841 - \frac{(107)^2}{16} = 125,4375$$

$$KT_A = \frac{[-(1)+a-b+ab-c+ac-bc+abc]^2}{N} = \frac{(13)^2}{16} = 10,5625$$

$$KT_B = \frac{[-(1)-a+b+ab-c-ac+bc+abc]^2}{N} = \frac{(27)^2}{16} = 45,5625$$

$$KT_{AB} = \frac{[(1)-a-b+ab+c-ac-bc+abc]^2}{N} = \frac{(5)^2}{16} = 1,5625$$

$$KT_C = \frac{[-(1)-a-b-ab+c+ac+bc+abc]^2}{N} = \frac{(-29)^2}{16} = 52,5625$$

$$KT_{AC} = \frac{[(1)-a+b-ab-c+ac-bc+abc]^2}{N} = \frac{(-3)^2}{16} = 0,5625$$

$$KT_{BC} = \frac{[(1)+a-b-ab-c-ac+bc+abc]^2}{N} = \frac{(-13)^3}{16} = 10,5625$$

$$KT_{ABC} = \frac{[-(1)+a+b-ab+c-ac-bc+abcc]^2}{N} = \frac{(-3)^2}{16} = 0,5625$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B - KT_{AB} - KT_C - KT_{AC} - KT_{BC} - KT_{ABC} = 3,5$$

Tüm etkilere ait kareler toplamlarının Yates yöntemi ile hesaplanması:

Deneme Kombinasyonları	Toplam	(1)	(2)	(3)	Etki	KT
(1)	11	24	68	107	---	$\frac{T^2 \dots}{N} = \frac{(107)^2}{16} = 715,5625$
a	13	44	39	13	A	$KT_A = \frac{(13)^2}{16} = 10,5625$
b	19	16	8	27	B	$KT_B = \frac{(27)^2}{16} = 45,5625$
ab	25	23	5	5	AB	$KT_{AB} = \frac{(5)^2}{16} = 1,5625$
c	7	2	20	-29	C	$KT_C = \frac{(-29)^2}{16} = 52,5625$
ac	9	6	7	-3	AC	$KT_{AC} = \frac{(-3)^2}{16} = 0,5625$
bc	10	2	4	-13	BC	$KT_{BC} = \frac{(-13)^3}{16} = 10,5625$
abc	13	3	1	-3	ABC	$KT_{ABC} = \frac{(-3)^2}{16} = 0,5625$

2³ Faktöriyel Tasarımı için Varyans analizi tablosu:

Değişim Kaynağı	s.d	KT	KO	Test İstatistiği
A (Yaş)	1	10,5625	10,5625	$F_A = \frac{10,5625}{0,4375} = 24,14$
B (Ağırlık)	1	45,5625	45,5625	$F_B = \frac{45,5625}{0,4375} = 104,14$
AB (Yaş*Ağırlık)	1	1,5625	1,5625	$F_{AB} = \frac{1,5625}{0,4375} = 3,57$
C (Kondüsyon)	1	52,5625	52,5625	$F_C = \frac{52,5625}{0,4375} = 120,14$
AC (Yaş*Kondüsyon)	1	0,5625	0,5625	$F_{AC} = \frac{0,5625}{0,4375} = 1,29$
BC (Ağırlık*Kondüsyon)	1	10,5625	10,5625	$F_{BC} = \frac{10,5625}{0,4375} = 24,14$
ABC (Yaş*Ağırlık*Kondüsyon)	1	0,5625	0,5625	$F_{ABC} = \frac{0,5625}{0,4375} = 1,29$
Hata	8	3,5	0,4375	
Genel	15	125,4375		

e) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş faktörünün etkisinin önemliliği;

$F_A = 24,14$ ve $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1; 2^3(n-1); \alpha} = F_{1; 8; 0,05} = 5,32$ olup, $F_A > F_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Yani erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaşın etkisi önemlidir.

f) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde ağırlık faktörünün etkisinin önemliliği;

$F_B = 104,14$ ve $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1; 2^2(n-1); \alpha} = F_{1; 8; 0,05} = 5,32$ olup, $F_B > F_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Yani erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlığın etkisi önemlidir.

g) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş×ağırlık etkileşim etkisinin önemliliği;

$F_{AB} = 3,57$ ve $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1; 2^3(n-1); \alpha} = F_{1; 8; 0,05} = 5,32$ olup, $F_{AB} < F_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Yani erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş ve ağırlığın etkileşim etkisi önemsizdir.

h) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde kondüsyon faktörünün etkisinin önemliliği;

$F_C = 120,14$ ve $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1; 2^2(n-1); \alpha} = F_{1; 8; 0,05} = 5,32$ olup, $F_C > F_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Yani erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine kondüsyon etkisi önemlidir.

i) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş×kondüsyon etkileşim etkisinin önemliliği;

$F_{AC} = 1,29$ ve $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1; 2^3(n-1); \alpha} = F_{1; 8; 0,05} = 5,32$ olup, $F_{AC} < F_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Yani erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş ve kondüsyon etkileşim etkisi önemsizdir.

i) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde ağırlık×kondüsyon etkileşim etkisinin önemliliği; $F_{BC} = 24,14$ ve $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1; 2^3(n-1); \alpha} = F_{1; 8; 0,05} = 5,32$ olup, $F_{BC} > F_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Yani erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine ağırlık ve kondüsyon etkileşim etkisi önemlidir.

j) Yüzücülerin 100 metreyi yüzme süreleri üzerinde yaş×ağırlık×kondüsyon etkileşim etkisinin önemliliği; $F_{ABC} = 1,29$ ve $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{1; 2^3(n-1); \alpha} = F_{1; 8; 0,05} = 5,32$ olup, $F_{ABC} < F_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Yani erkek yüzücülerin 100 metreyi yüzme sürelerine yaş, ağırlık ve kondüsyon etkileşim etkisi önemsizdir.