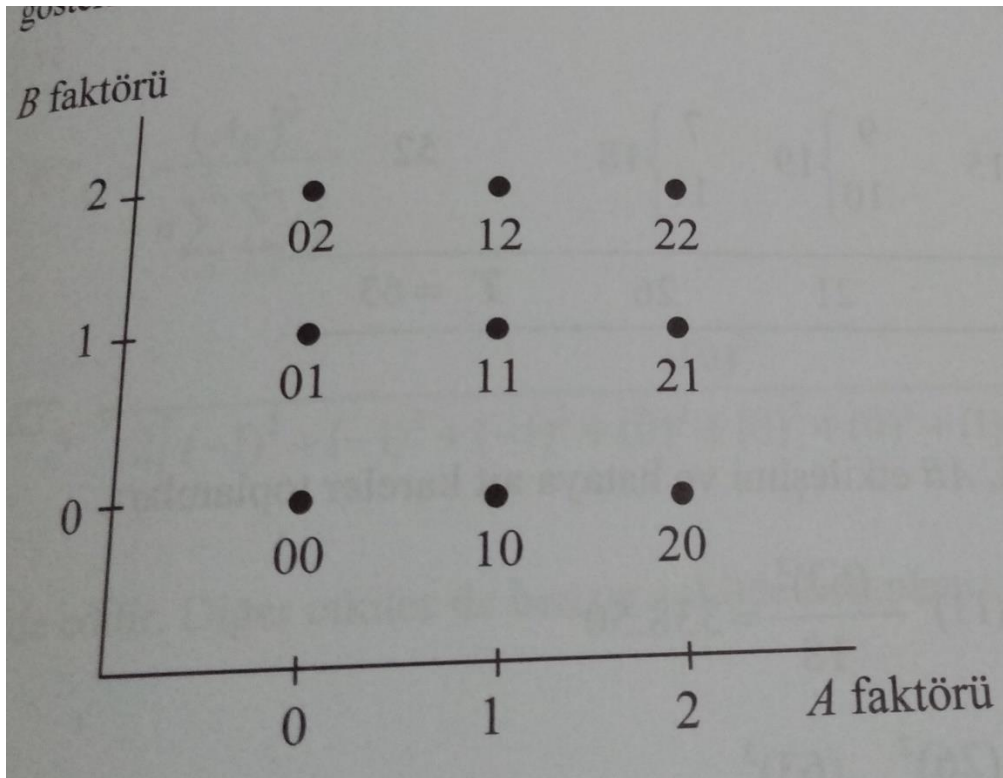


### 7.4 3<sup>2</sup> Faktöriyel Tasarım

Bu faktöriyel tasarımda her biri üçer düzeyli iki faktör söz konusudur. Nicel türden, sürekli ve en az eşit aralıklı ölçme düzeyinde ölçülmüş olan bir bağımlı değişkenin (Y) A ve B iki faktör tarafından etkilendiğini kabul edelim. Bu faktörlerin üçer düzeyi olsun ve faktör düzeylerinin özel seçimli belirlendiğini varsayalım. Bu durumda faktörler sabit etkili olacağından etkileşimleri de sabit etkili olacaktır. Bu şekilde oluşturulan deney tasarımı bir 3<sup>2</sup> faktöriyel tasarım olup, model sabit etkili bir modeldir. Bu tasarımda, eğer faktörler nicel türden ve eşit aralıklı ölçme düzeyine sahipse doğrusal ve karesel bileşenler de elde edilmelidir. Faktörler nitel türden olduğu zaman bu tür etkiler söz konusu değildir. Bir 3<sup>2</sup> faktöriyel tasarımda deneme kombinasyonlarının sayısı = 9 tanedir. Her bir deneme kombinasyonunda n tekrar yapıldığında, toplam deney (örnek birimi veya gözlem) sayısı  $N = 3^2 \times n$  tane olacaktır. n tekrarlı bir 3<sup>2</sup> faktöriyel tasarımda model denklemi;

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, n \quad (7.30)$$

şeklinde ifade edilir. Bu tasarım için tüm deneme kombinasyonları Şekil 7.4'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 7.4 Bir 3<sup>2</sup> faktöriyel tasarım için tüm deneme kombinasyonları

Şekil 7.4'e göre 00 deneme kombinasyonu A ve B faktörlerinin düşük düzeylerini; 10 deneme kombinasyonu A faktörünün orta B faktörünün düşük düzeylerini; 20 deneme kombinasyonu A faktörünün yüksek B faktörünün düşük düzeylerini; ...22 deneme kombinasyonu A ve B faktörlerinin yüksek düzeylerini göstermektedir. Her bir deneme kombinasyonunda n tekrar olduğunda veri düzeni Tablo 7.15'de verildi.

**Tablo 7.15** Bir  $3^2$  faktöriyel tasarım için veri düzeni

B Faktörü	A Faktörü			
	0	1	2	$T_{.j}$
0	$Y_{111}$ $Y_{112}$ $\vdots$ $Y_{11n}$	$Y_{211}$ $Y_{212}$ $\vdots$ $Y_{21n}$	$Y_{311}$ $Y_{312}$ $\vdots$ $Y_{31n}$	$T_{.1}$
$T_{i1}$	$T_{11}$	$T_{21}$	$T_{31}$	
1	$Y_{121}$ $Y_{122}$ $\vdots$ $Y_{12n}$	$Y_{221}$ $Y_{222}$ $\vdots$ $Y_{22n}$	$Y_{321}$ $Y_{322}$ $\vdots$ $Y_{32n}$	$T_{.2}$
$T_{i2}$	$T_{12}$	$T_{22}$	$T_{32}$	
2	$Y_{131}$ $Y_{132}$ $\vdots$ $Y_{13n}$	$Y_{231}$ $Y_{232}$ $\vdots$ $Y_{23n}$	$Y_{331}$ $Y_{332}$ $\vdots$ $Y_{33n}$	$T_{.3}$
$T_{i3}$	$T_{13}$	$T_{23}$	$T_{33}$	
$T_{i..}$	$T_{1..}$	$T_{2..}$	$T_{3..}$	$T_{...}$
$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2$				$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2$

Bu veri düzenine göre Genel, A ve B ana faktörleri, AB etkileşimi ve Hata için kareler toplamları sırası ile aşağıdaki eşitliklerden hesaplanır.

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 - \frac{T_{...}^2}{N} \quad (7.31)$$

$$KT_A = \sum_{i=1}^3 \frac{T_{i..}^2}{3n} - \frac{T_{...}^2}{N} \quad (7.32)$$

$$KT_B = \sum_{j=1}^3 \frac{T_{.j}^2}{3n} - \frac{T_{...}^2}{N} \quad (7.33)$$

$$KT_{AB} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{T_{ij.}^2}{n} - KT_A - KT_B - \frac{T_{...}^2}{N} \quad (7.34)$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B - KT_{AB} \quad (7.35)$$

Faktörler nicel ve eşit aralıklı olduğunda, doğrusal ve karesel etkileri ve bu etkilere ilişkin kareler toplamları hem ana faktörler A ve B için hem de AB etkileşimi için elde edilmelidir.

Her bir faktörün düzey sayısı üç olduğundan doğrusal ve karesel etkileri hesaplamada kullanılacak olan katsayılar ( $c_i, i = 1, 2, 3$ );

Doğrusal etki için  $c_{ij}$ : -1 0 1.....(Toplamları sıfır olmak zorunda)

Karesel etki için  $c_{ij}$ : 1 -2 1..... (Toplamları sıfır olmak zorunda)

şeklindedir.

A faktörü için doğrusal etkinin elde edilmesinde A'nın düşük düzeyleri için katsayı (-1), orta düzeyleri için katsayı (0) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınacaktır. Buna göre **A'nın**

**doğrusal etkisi:** (bu etkinin hesaplanmasında doğrusal etki için verilen  $c_{ij}$  katsayıları kullanılır.)

$$A_D = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} = c_{11} T_{11} + c_{12} T_{12} + c_{13} T_{13} + c_{21} T_{21} + c_{22} T_{22} + c_{23} T_{23} + c_{31} T_{31} + c_{32} T_{32} + c_{33} T_{33}. \quad (7.36)$$

olup, bu doğrusal etki için kareler toplamı;

$$KT_{A_D} = \frac{(A_D)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.37)$$

ile bulunur.

**A'nın karesel etkisi:** bu etkinin elde edilmesinde A'nın düşük düzeyleri için katsayı (1), orta düzeyleri için katsayı (-2) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınacaktır. Böylece bu etkinin hesaplanmasında karesel etki için verilen  $c_{ij}$  katsayıları kullanılır.

$$A_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij}. \quad (7.38)$$

olup, bu karesel etki için kareler toplamı;

$$KT_{A_K} = \frac{(A_K)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.39)$$

eşitliği ile bulunur.

B faktörü için doğrusal etkinin elde edilmesinde B'nin düşük düzeyleri için katsayı (-1), orta düzeyleri için katsayı (0) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınacaktır. Buna göre **B'nin doğrusal etkisi:** (bu etkinin hesaplanmasında doğrusal etki için verilen  $c_{ij}$  katsayıları kullanılır.)

$$B_D = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} = c_{11} T_{11} + c_{21} T_{21} + c_{31} T_{31} + c_{12} T_{12} + c_{22} T_{22} + c_{32} T_{32} + c_{13} T_{13} + c_{23} T_{23} + c_{33} T_{33}. \quad (7.40)$$

olup, bu doğrusal etki için kareler toplamı;

$$KT_{B_D} = \frac{(B_D)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.41)$$

ile bulunur.

**B'nin karesel etkisi:** bu etkinin elde edilmesinde B'nin düşük düzeyleri için katsayı (1), orta düzeyleri için katsayı (-2) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınacaktır. Böylece bu etkinin hesaplanmasında karesel etki için verilen  $c_{ij}$  katsayıları kullanılır.

$$B_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij}. \quad (7.42)$$

olup, bu karesel etki için kareler toplamı;

$$KT_{B_K} = \frac{(B_K)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.43)$$

eşitliği ile bulunur.

**AB etkileşim etkisinin**  $A_D B_D, A_D B_K, A_K B_D, A_K B_K$  olmak üzere her biri 1'er serbestlik dereceli dört bileşeni vardır. Bunların etkileri ve kareler toplamları hesaplanırken, bir bileşene ait katsayılar o bileşende bulunan duruma göre  $A$  ve  $B$ 'nin doğrusal ve karesel etkilerdeki katsayıları çarpılarak elde edilmektedir.

$A$ 'nın doğrusal  $B$ 'nin doğrusal etkileşim etkisi ve kareler toplamı;

$$A_D B_D = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} \quad ; \quad KT_{A_D B_D} = \frac{(A_D B_D)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.44)$$

$A$ 'nın doğrusal  $B$ 'nin karesel etkileşim etkisi ve kareler toplamı;

$$A_D B_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} \quad ; \quad KT_{A_D B_K} = \frac{(A_D B_K)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.45)$$

$A$ 'nın karesel  $B$ 'nin doğrusal etkileşim etkisi ve kareler toplamı;

$$A_K B_D = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} \quad ; \quad KT_{A_K B_D} = \frac{(A_K B_D)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.46)$$

$A$ 'nın karesel  $B$ 'nin karesel etkileşim etkisi ve kareler toplamı;

$$A_K B_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} \quad ; \quad KT_{A_K B_K} = \frac{(A_K B_K)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} \quad (7.47)$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Böylece bir  $3^2$  faktöriyel tasarım için varyans analizi tablosu Tablo 7.16 ile verilir ve bu tablo dikkate alınarak test edilecek hipotezler belirlenebilir, test istatistikleri hesaplanıp bu hipotezler hakkında belli bir  $\alpha$  önem seviyesinde karar verilebilir. Etkileşim etkilerinden önemsiz bulunanlar hata terimine katılabilir.

**Tablo 7.16** Bir  $3^2$  Faktöriyel Tasarım İçin Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı	s.d.	KT	KO	Test İstatistiği
<b>A Faktörü</b>	2	$KT_A$	$KO_A$	$F_A = KO_A / KO_{Hata}$
$A_D$	1	$KT_{A_D}$	$KO_{A_D}$	$F_{A_D} = KO_{A_D} / KO_{Hata}$
$A_K$	1	$KT_{A_K}$	$KO_{A_K}$	$F_{A_K} = KO_{A_K} / KO_{Hata}$
<b>B Faktörü</b>	2	$KT_B$	$KO_B$	$F_B = KO_B / KO_{Hata}$
$B_D$	1	$KT_{B_D}$	$KO_{B_D}$	$F_{B_D} = KO_{B_D} / KO_{Hata}$
$B_K$	1	$KT_{B_K}$	$KO_{B_K}$	$F_{B_K} = KO_{B_K} / KO_{Hata}$
<b>AB Etkileşimi</b>	4	$KT_{AB}$	$KO_{AB}$	$F_{AB} = KO_{AB} / KO_{Hata}$
$A_D B_D$	1	$KT_{A_D B_D}$	$KO_{A_D B_D}$	$F_{A_D B_D} = KO_{A_D B_D} / KO_{Hata}$
$A_D B_K$	1	$KT_{A_D B_K}$	$KO_{A_D B_K}$	$F_{A_D B_K} = KO_{A_D B_K} / KO_{Hata}$
$A_K B_D$	1	$KT_{A_K B_D}$	$KO_{A_K B_D}$	$F_{A_K B_D} = KO_{A_K B_D} / KO_{Hata}$
$A_K B_K$	1	$KT_{A_K B_K}$	$KO_{A_K B_K}$	$F_{A_K B_K} = KO_{A_K B_K} / KO_{Hata}$
<b>Hata</b>	$3^2(n-1)$	$KT_{Hata}$	$KO_{Hata}$	
<b>Genel</b>	N-1	$KT_{Genel}$		

Bu deney tasarımında ana etkiler  $A$  ve  $B$  ile  $AB$  etkileşim etkisinin yanı sıra, hem ana faktörler için hem de etkileşim için doğrusal ve karesel etkilerin önemli olup olmadığı hipotezleri

oluşturularak varyans analizi tablosunda verilen ilgili test istatistiği kullanılmak suretiyle test edilebilir.

**Örnek 7.3** Bağımlı değişken (Y) olmak üzere bu değişkenin her biri üçer düzeyli iki faktör tarafından etkilendiğini kabul edelim. Her iki faktörde nicel türden ve eşit aralıklı olsun. Her bir deneme kombinasyonunda 2 tekrar yapıldığı kabul edilen bir  $3^2$  faktöriyel tasarım için bağımlı değişkene ait gözlem değerlerinden düzenlenen veri aşağıdaki gibi olsun. Bu veriyi kullanarak probleme ilişkin varyans analizi tablosunu düzenleyiniz ve bu tabloya göre önemli olan etkileri belirleyiniz?

B Faktörü	A Faktörü			$T_{.j.}$
	0	1	2	
0	-1 -2	-4 -2	0 1	$T_{.1.}=-8$
$T_{i1.}$	$T_{11.}=-3$	$T_{21.}=-6$	$T_{31.}=1$	
1	1 3	3 5	4 3	$T_{.2.}=19$
$T_{i2.}$	$T_{12.}=4$	$T_{22.}=8$	$T_{32.}=7$	
2	7 8	9 10	7 11	$T_{.3.}=52$
$T_{i3.}$	$T_{13.}=15$	$T_{23.}=19$	$T_{33.}=18$	
$T_{i..}$	$T_{1..}=16$	$T_{2..}=21$	$T_{3..}=26$	$T_{...}=63;$ $N=3^2 \times n = 9 \times 2 = 18$
$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2$	128	235	196	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 = 559$

**Çözüm:** Deney tasarımı:  $3^2$  faktöriyel tasarım

Model denklemi:  $Y_{ijk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}$ ,  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; k = 1, 2; (n = 2)$

Faktörler: A ve B nicel türden ve eşit aralıklı.

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 - \frac{T_{...}^2}{N} = 559 - \frac{(63)^2}{18} = 338,5$$

$$KT_A = \sum_{i=1}^3 \frac{T_{i..}^2}{3n} - \frac{T_{...}^2}{N} = \frac{1}{6} [(16)^2 + (21)^2 + (26)^2] - \frac{(63)^2}{18} = 8,33$$

$$KT_B = \sum_{j=1}^3 \frac{T_{.j.}^2}{3n} - \frac{T_{...}^2}{N} = \frac{1}{6} [(-8)^2 + (19)^2 + (52)^2] - \frac{(63)^2}{18} = 301$$

$$KT_{AB} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{T_{ij.}^2}{n} - KT_A - KT_B - \frac{T_{...}^2}{N}$$

$$= \frac{1}{2} [(-3)^2 + (-6)^2 + (1)^2 + (4)^2 + (8)^2 + (7)^2 + (15)^2 + (19)^2 + (18)^2]$$

$$- 8,33 - 301 - \frac{(63)^2}{18} = 12,67$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - KT_A - KT_B - KT_{AB} = 338,5 - 8,33 - 301 - 12,67 = 16,5$$

$KT_{A_D} = \frac{(A_D)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2}$ , Önce A'nın doğrusal etkisi hesaplanmalıdır.  $c_{ij}$ : -1, 0, 1; A'nın düşük düzeyleri için katsayı (-1), orta düzeyleri için katsayı (0) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınır.

$$A_D = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} = (-1)(-3) + (-1)(4) + (-1)(15) + 0(-6) + 0(8) + 0(19) + 1(1) + 1(7) + 1(18) = 10$$

$$KT_{A_D} = \frac{(10)^2}{2[(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2]} = 8,33$$

$KT_{A_K} = \frac{(A_K)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2}$ , Önce A'nın karesel etkisi hesaplanmalıdır.  $c_{ij}$ : 1, -2, 1; A'nın düşük düzeyleri için katsayı (1), orta düzeyleri için katsayı (-2) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınır.

$$A_K = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} = 1(-3) + 1(4) + 1(15) + (-2)(-6) + (-2)(8) + (-2)(19) + 1(1) + 1(7) + 1(18) = 0$$

$$KT_{A_K} = \frac{0^2}{2[1^2 + 1^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2]} = 0$$

$KT_{B_D} = \frac{(B_D)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2}$ , Önce B'nin doğrusal etkisi hesaplanmalıdır.  $c_{ij}$ : -1, 0, 1; B'nin düşük düzeyleri için katsayı (-1), orta düzeyleri için katsayı (0) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınır.

$$B_D = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{ij} = (-1)(-3) + (-1)(-6) + (-1)(1) + 0(4) + 0(8) + 0(7) + 1(15) + 1(19) + 1(18) = 60$$

$$KT_{B_D} = \frac{(60)^2}{2[6]} = 300$$

$KT_{B_K} = \frac{(B_K)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2}$ ; Önce B'nin karesel etkisi hesaplanmalıdır.  $c_{ij}$ : 1, -2, 1; B'nin düşük düzeyleri için katsayı (1), orta düzeyleri için katsayı (-2) ve yüksek düzeyleri için katsayı (1) alınır.

$$B_K = 1(-3) + 1(-6) + 1(1) + (-2)(4) + (-2)(8) + (-2)(7) + 1(15) + 1(19) + 1(18) = 6$$

$$KT_{B_K} = \frac{6^2}{2(18)} = 1.00$$

$KT_{A_D B_D} = \frac{(A_D B_D)^2}{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2}$ , Önce  $A_D B_D$  etkisi hesaplanmalıdır.  $c_{ij}$ : -1, 0, 1 olup, düşük düzeylerde (-1), orta düzeylerde (0) ve yüksek düzeylerde (1) alınarak katsayılar ve deneme kombinasyonları toplamları çarpılıp toplanacaktır.

$$A_D B_D = (-1)(-1)(-3) + (-1)(0)(4) + (-1)(1)(15) + (0)(-1)(-6) + (0)(0)(8) + (0)(1)(19) + (1)(-1)(1) + (1)(0)(19) + (1)(1)(18) = -1$$

$$KT_{A_D B_D} = \frac{(-1)^2}{2[1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2]} = 0,13$$

3<sup>2</sup> Faktöriyel Tasarım İçin Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı	s.d.	KT	KO	Test İstatistiği
<b>A Faktörü</b>	2	8,33	4,17	$F_A = 4,17/1,83 = 2,28$
$A_D$	1	8,33	8,33	$F_{A_D} = 8,33/1,83 = 4,55$
$A_K$	1	0,00	0,00	$F_{A_K} = 0,00$
<b>B Faktörü</b>	2	301	150,50	$F_B = \frac{150,50}{1,83} = 82,24$
$B_D$	1	300	300	$F_{B_D} = \frac{300}{1,83} = 163,93$
$B_K$	1	1,00	1,00	$F_{B_K} = \frac{1}{1,83} = 0,55$
<b>AB Etkileşimi</b>	4	12,67	3,17	$F_{AB} = \frac{3,17}{1,83} = 1,73$
$A_D B_D$	1	0,13	0,13	$F_{A_D B_D} = 0,07$
$A_D B_K$	1	0,04	0,04	$F_{A_D B_K} = 0,02$
$A_K B_D$	1	9,37	9,37	$F_{A_K B_D} = 5,12$
$A_K B_K$	1	3,13	3,13	$F_{A_K B_K} = 1,71$
<b>Hata</b>	9	16,5	1,83	
<b>Genel</b>	17	338,5		

$\alpha = 0,05$  iken  $F_{2;9;0,05} = 4,26$ ;  $F_{1;9;0,05} = 5,12$  ve  $F_{4;9;0,05} = 3,63$  dür.