II.6 Varsayımların Kontrolü

ANOVA'nın temel varsayımları hata terimlerinin $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ dağılımlı, homojen varyanslı ve birbirinden bağımsız olmasıdır. Bu varsayımlardan normallik ve homojen varyanslılık varsayımlarının kontrolü istatistiksel testler yardımı ile yapılabilir. Hata terimlerinin normal dağılımlı ve homojen varyanslı olması bir diğer anlamda, faktör düzeylerinde (denemelerde, bağımsız gruplarda) bağımlı değişken bakımında dağılımların normal ve homojen varyanslı olması demektir.

II.6.1 Normallik Varsayımının Kontrolü

Örneklem verilerinin dağılımının normal dağılım ile uyumlu olup olmadığı göstermede kullanılan birçok yöntem bulunmaktadır (Ki-Kare uyum iyiliği testi, Kolmogorov-Smirnov testi, Lilliefors testi, Shapiro - Wilk testi, Q-Q grafik yöntem testi v.s.). Burada Shapiro-Wilk testi açıklanacaktır.

Test edilecek hipotezler:

H_0: Örneklemin (j.nci denemeye ait veri grubunun $j = 1,2, \dots, k$) dağılımı, $N\left(\mu_{j.}, \sigma_j^2\right)$ dağılımı ile uyumludur.

H_1: ………… uyumlu değildir.

Test istatistiği:

$$W_j = \frac{\left[\sum_{i=1}^{m} a_i \left(y_{j\left(n_j-i+1\right)} - y_{j(i)}\right)\right]^2}{\sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ji} - \overline{Y}_{j.}\right)^2} \quad , \; j = 1,2, \dots, k \qquad (2.32)$$

dır. Burada y_{ji}: j.nci gruba ait örnek birimleri $\left(i = 1,2, \dots, n_j\right)$, $y_{j(i)}$: j.nci gruba ait örneklemin sıra istatistikleri, n_j: j.nci grup için örnek hacmi, a_i: Shapiro-Wilk katsayıları (tablodan bulunur) ve $m = \begin{cases} \frac{n_j}{2}, n_j \text{ çift sayı ise} \\ \frac{n_j+1}{2}, n_j \text{ tek sayı ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlıdır.

Karar: α önem seviyesinde test istatistiğinin örnekleme dağılımından elde edilen kritik değer $W_{\alpha;n_j}$ (tablodan bulunur) olmak üzere, eğer $W_j < W_{\alpha;n_j}$ $(p < \alpha)$ ise H_0 ret edilir, ve böylece j.nci grubun dağılımının normal dağılım ile uyumlu olmadığına karar verilir. Aksi takdirde, H_0 kabul edilir, ve böylece j.nci grubun dağılımının normal dağılım ile uyumlu olduğuna karar verilir. Bu test işlemi sırası ile her bir grup için uygulanır.

II.6.2 Homojenlik Varsayımının Kontrolü

İki veya daha fazla bağımsız grubun varyanslar bakımından homojen dağılım gösterip göstermediğinin test edilmesinde kullanılan birçok istatistiksel test mevcuttur (Bartlett testi, Hartley testi, Cochran testi, Levene Testi, Brown-Forsythe testi, Layard Ki-Kare testi).

Bunlardan Bartlett testi, Hartley testi, Cochran testi birer parametrik teknik olup, grupların normal dağılım göstermesi varsayımına dayalıdır. Bu sebeple diğerlerine göre daha güçlüdürler. ANOVA'da normallik varsayımı gerektirdiğinden varyansların homojenliği bu üç testten birisi ile kontrol edilir. Test edilecek hipotezler:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma_\varepsilon^2$

$H_1: \exists \sigma_j^2$ diğerlerinden farklıdır

a) Bartlett Testi için

<u>**Test istatistiği:**</u>

$$\chi_B^2 = \frac{V}{D} \sim \chi_{k-1}^2 \qquad (2.33)$$

dir. Burada;

$$V = (N-k)ln\left(S_p^2\right) - \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right)ln\left(S_j^2\right) \qquad (2.34)$$

$$D = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j-1} - \frac{1}{N-k}\right] \qquad (2.35)$$

dir. Ayrıca S_j^2, j.nci gruba ait örnek varyansı olup σ_j^2 parametresinin bir yansız tahmin edicisi iken, H_0 hipotezi altında gruplar için ortak kitle varyansı olan σ_ε^2 parametresinin bir yansız tahmin edicisi de örneklem için ortak varyans olarak bilinen;

$$S_p^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right)S_j^2 \qquad (2.36)$$

istatistiğidir.

Karar: $\chi_B^2 > \chi_{k-1;\alpha}^2$ ise H_0 ret edilir, gruplar homojen varyanslı değildir. Aksi takdirde ise H_0 kabul edilir, gruplar homojen varyanslıdır.

b) Hartley Testi için

<u>**Test istatistiği:**</u> k tane birbirinden bağımsız denemeler için denemelere ait örnek varyanslerın en büyük ve en küçük olanları sırasıyla $S_{enb}^2 = \text{Enb}\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_k^2\}$ ve $S_{enk}^2 = \text{Enk}\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_k^2\}$ olmak üzere

$$F_{enb} = \frac{S_{enb}^2}{S_{enk}^2} \sim F_{k;n-1} \qquad (2.37)$$

dir. Burada $n = Enb\{n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1\}$ dir.

Karar: $F_{enb} > F_{k;n-1;\alpha}$ ise H_0 ret edilir, gruplar homojen varyanslı değildir. Aksi takdirde ise H_0 kabul edilir, gruplar homojen varyanslıdır. Burada $F_{k;n-1;\alpha}$:Hartley'in F_{enb} değerleri için tablo değeridir.

c) Cochran Testi için

<u>Test istatistiği:</u> k tane birbirinden bağımsız denemeler için denemelere ait örnek varyansların en büyük $S_{enb}^2 = \text{Enb}\{S_1^2, S_2^2, \ldots, S_k^2\}$ ve tüm örnek varyanslarının toplamı $\sum_{j=1}^{k} S_j^2$ olmak üzere;

$$C = \frac{S_{enb}^2}{\sum_{j=1}^{k} S_j^2} \sim F_{k;n-1} \tag{2.38}$$

dir. Burada $n = Enb\{n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_k - 1\}$ dir.

Karar: $C > F_{k;n-1;\alpha}$ ise H_0 ret edilir, gruplar homojen varyanslı değildir. Aksi takdirde ise H_0 kabul edilir, gruplar homojen varyanslıdır. Burada $F_{k;n-1;\alpha}$:Cochran'ın C değerleri için tablo değeridir.

II.7 Çoklu Karşılaştırmalar

Eşitlik (2.9) veya (2.10) ya da (2.31) de verilen H_0 hipotezinin ret edilmesi durumunda, hangi denemeler arasında farklılık ortaya çıktığının belirlenmesi istenebilir. Bu amaçla uygulanacak olan testlere çoklu karşılaştırma testleri denir. Literatürde yer alan çoklu karşılaştırma testlerinde bazıları:

1) Fisher'in En Küçük Anlamlı Fark Metodu

2) Tukey Metodu

3) Newman- Keuls Testi

4) Duncan Çoklu Aralık Testi

5) Bonferroni Metodu

6) Scheffe Metodu

II.7.1 Fisher'in En Küçük Anlamlı Fark (Least Significantdifference-LSD) Metodu

Sabit etki modelinde Eşitlik (2.9) veya (2.10) ile verilen H_0 hipotezi ret edilsin. Fisher tarafından önerilen bu metot, deneme ortalamaları $(\mu_{j.})$ arasında mümkün olan tüm ikili karşılaştırmaları yapmak için kullanılır. Grup (deneme) sayısı k olduğunda, mümkün olan ikili karşılaştırma sayısı $\binom{k}{2}$ kadardır. Bu metotta test edilecek hipotezler:

$$H_0: \mu_{j.} = \mu_{t.}$$

$$H_1: \mu_{j.} \neq \mu_{t.} \quad , j \neq t = 1,2, \ldots, k \tag{2.39}$$

şeklinde oluşturulur. Burada j.nci ve t.nci gruplar için örnek ortalamalarının mutlak farkı $|\,\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{t,}|$ ve en küçük önemli fark değeri

$$LSD = \begin{cases} t_{\alpha/2, s.d._{hata}} \sqrt{\frac{2KO_{Hata}}{n}} & , \ n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n \\ t_{\alpha/2, s.d._{hata}} \sqrt{KO_{Hata} \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_t} \right)} & , \text{en az bir } n_j \ f\text{arklı ise} \end{cases} \tag{2.40}$$

olmak üzere, eğer; $\left| \bar{Y}_{j.} - \bar{Y}_{t,} \right| > LSD$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve böylece j.nci ve t.nci gruplar arasında anlamlı bir farklılık vardır.

NOT: Bazen $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \cdots = \mu_{k.} = \mu_{..}$ hipotezi ret edilirken, buna karşılık ikili karşılaştırmalardan hiç birinin ret edilemediği veya ikili karşılaştırmalardan bazılarının ret edildiği ama $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \cdots = \mu_{k.} = \mu_{..}$ hipotezinin ret edilemediği durumlarda ortaya çıkabilir.

II.7.2 Tukey Metodu

Tukey tarafından önerilen bu metodun amacı da $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \cdots = \mu_{k.} = \mu_{..}$ hipotezi ret edildiğinde, deneme ortalamalarını ikişerli olarak karşılaştırmaktır. Grup (deneme) sayısı k olduğunda, mümkün olan ikili karşılaştırma sayısı $\binom{k}{2}$ kadardır. Bu metotta test edilecek hipotezler (2.39) da ifade edildiği gibidir. Tukey metodu:

$$q = \frac{Enb(\bar{Y}_{j.}) - Enk(\bar{Y}_{j.})}{\sqrt{\frac{KO_{Hata}}{n}}} \ , \ j = 1,2, \ldots, k; \ n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n \tag{2.41}$$

olarak tanımlanan Studentlaştırılmış aralık istatistiğine dayanır. Bu metotta (2.39) ile verilen H_0 hipotezini test etmek için en güvenilir anlamlı fark değeri;

$$HSD = q_{\alpha;k;\, s.d._{hata}} \sqrt{\frac{KO_{Hata}}{n}} \tag{2.42}$$

ile hesaplanır. Eğer; $j \neq t = 1,2, \ldots, k$ için $\left| \bar{Y}_{j.} - \bar{Y}_{t,} \right| > HSD$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve böylece j.nci ve t.nci denemeler arasında anlamlı bir farklılık vardır.

Eğer denemelerdeki gözlem sayıları eşit değilse, yani en az bir n_j farklı ise Eşitlik (2.41) ile verilen q istatistiği;

$$q = \frac{Enb(\bar{Y}_{j.}) - Enk(\bar{Y}_{j.})}{\sqrt{\frac{KO_{Hata}}{2} \left(\frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_t} \right)}} \ , \ j \neq t = 1,2, \ldots, k \tag{2.43}$$

iken, Eşitlik (2.42) ile verilen en güvenilir anlamlı fark değeri;

$$HSD = q_{\alpha;k;\, s.d._{hata}} \frac{\sqrt{KO_{Hata}}}{\min(\sqrt{n_j}, \sqrt{n_t})} \tag{2.44}$$

şeklinde verilir. Burada $q_{\alpha;k;\, s.d._{hata}}$ değeri, q istatistiği için yüzdelik değeri olup, bu istatistik ile ilgili olarak hazırlanan tablodan bulunur.

II.7.3 Newman –Keuls Testi

Deneme ortalamalarını ikişerli olarak karşılaştırmada kullanılan bir çoklu karşılaştırma testi olup Newman-Keuls tarafından önerilmiştir. Bu çoklu karşılaştırma testi ile $H_0: \mu_{j.} = \mu_{t.}$, $\forall j \neq t$ hipotezini test etmek için kullanılacak olan önemlilik değeri;

$$W_r = q_{\alpha;r;\, s.d._{hata}} \sqrt{\frac{KO_{Hata}}{n}} \ ,\ r = 2, 3, \ldots, k;\ (n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n\,)$$

eşitliği ile verilir. Burada r: karşılaştırılacak olan iki grup için bu grupların kendileri de dahil olmak üzere bu iki grup ortalaması arasında yer alan ortalamaların sayısıdır. Bu metot ile H_0 hipotezini test etmek için izlenecek yol:

1. $\overline{Y}_{1.}, \overline{Y}_{2.}, \ldots, \overline{Y}_{k.}$ Deneme ortalamaları hesaplanır ve büyükten küçüğe doğru sıralanır.

2. $r = 2,3, \ldots, k$ için W_r değerleri hesaplanır.

3. Birbirinden r adım uzakta bulunan $\overline{Y}_{j.}$ ve $\overline{Y}_{t,}$ için $\overline{Y}_{j.} > \overline{Y}_{t.}$ $\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{t,} > W_r$ ise $H_0: \mu_{j.} = \mu_{t.}$ hipotezi ret edilir ve böylece j-nci grup ile t-nci grup ortalamaları arasında anlamlı bir fark olduğu söylenir. Aksi takdirde, yani $\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{t,} \leq W_r$ iken $H_0: \mu_{j.} = \mu_{t.}$ hipotezi ret edilemez ve böylece j-nci grup ile t-nci grup ortalamaları arasında anlamlı bir fark olduğu söylenemez.

II.7.4 Duncan Çoklu Aralık Testi

Deneme ortalamalarını ikişerli olarak karşılaştırmada kullanılan bir diğer çoklu karşılaştırma testi, Duncan tarafından önerilen çoklu aralık testidir. Duncan çoklu aralık testinde

$H_0: \mu_{j.} = \mu_{t.}$, $\forall j \neq t$ hipotezini test etmek için

$$R_g = \begin{cases} r_{\alpha,g,s.d._{hata}} \sqrt{\dfrac{KO_{Hata}}{n}} \ , & n_1 = n_2 = \cdots = n_k = n \\ r_{\alpha,g,s.d._{hata}} \sqrt{\dfrac{KO_{Hata}}{\alpha / \sum_{j=1}^{k}(1/n_j)}} & ,\text{en az bir } n_j\ f\text{arklı ise} \end{cases} \ , g = 2,3, \ldots, k \qquad (2.45)$$

değeri hesaplanır. Burada $\sum_{j=1}^{k}(1/n_j)$: örnek birimlerinin harmonik ortalaması ve $r_{\alpha,g,s.d._{hata}}$ ise Duncan çoklu aralık testi için tablo değeridir. Bu metot ile H_0 hipotezini test etmek için izlenecek yol:

1. $\overline{Y}_{1.}, \overline{Y}_{2.}, \ldots, \overline{Y}_{k.}$ Deneme ortalamaları hesaplanır ve küçükten büyüğe sıralanır. $\overline{Y}_{(1).} \leq \overline{Y}_{(2).} \leq \ldots \leq \overline{Y}_{(k).}$

2. $g = 2,3, \ldots, k$ için R_g değerleri hesaplanır.

3. $\overline{Y}_{(k).} - \overline{Y}_{(1).} > R_k$

$\overline{Y}_{(k).} - \overline{Y}_{(2).} > R_{k-1}$ …….. $\overline{Y}_{(3).} - \overline{Y}_{(1).} > R_3$

. ……... $\overline{Y}_{(3).} - \overline{Y}_{(2).} > R_2$………$\overline{Y}_{(2).} - \overline{Y}_{(1).} > R_2$ (2.46)

.

.

$\overline{Y}_{(k).} - \overline{Y}_{(k-1).} > R_2$

karşılaştırmaları yapılır. Eğer deneme ortalamaları arasındaki fark R_g değerinden daha büyük ise ilgili H_0 hipotezi ret edilir ve böylece j.nci ve t.nci denemeler arasında anlamlı bir farklılık vardır.

II.7.5 Bonferroni Metodu

$H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \cdots = \mu_{k.} = \mu_{..}$ hipotezi ret edilmiş ve sınırlı sayıda planlanmış lineer bağıntı karşılaştırılmak isteniyorsa Bonferroni metodunun kullanılması önerilmektedir. Bu metot kullanılarak k tane lineer bağıntının karşılaştırılması yapılmak istendiğinde, test edilecek hipotezler,

$$H_0: C_g = \sum_{j=1}^{k} c_{gj}\, \mu_{j.} = 0$$

$$H_1: C_g = \sum_{j=1}^{k} c_{gj}\, \mu_{j.} \neq 0\ ,\ \ g = 1,2,\dots,k \tag{2.47}$$

şeklinde oluşturulur. Her bir hipotez grubu için ayrı ayrı

$$B_g = t_{(\alpha/2k);s.d._{Hata}} \sqrt{(KO_{hata})\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{c_{gj}^2}{n_j}\right)}\ \ ,\ g = 1,2,\dots,k \tag{2.48}$$

değeri hesaplanır. Eğer; $\left|\sum_{j=1}^{k} c_{gj}\overline{Y}_{j.}\right| > B_g$ ise H_0 ret edilir ve C_g lineer bağıntısının önemli olduğuna karar verilir. Aksi takdirde; H_0 ret edilemez ve C_g lineer bağıntısının önemli olmadığına karar verilir.

II.7.6 Scheffe Metodu

Scheffe tarafından önerilen bu metot Bonferroni metoduna benzer olup, o metottan farklı olarak sadece önceden planlanmış az sayıda lineer bağıntıyı değil, mümkün olan bütün lineer bağıntıları test etmek için önerilmiştir. Scheffe metodunda test edilecek hipotezler, (2.47)'deki gibi kurulur. H_0 hipotezini test etmek için

$$S_{C_g} = \sqrt{(k-1)F_{\alpha;k-1;N-k}} \sqrt{(KO_{hata})\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{c_{gj}^2}{n_j}\right)}\ \ ,\ g = 1,2,\dots,k \tag{2.49}$$

değeri hesaplanır. Eğer; $\left|\sum_{j=1}^{k} c_{gj}\overline{Y}_{j.}\right| > S_{C_g}$ ise H_0 ret edilir ve C_g lineer bağıntısının önemli olduğuna karar verilir. Aksi takdirde; H_0 ret edilemez ve C_g lineer bağıntısının önemli olmadığına karar verilir.