ÖRNEK:3.2 Fen Fakültesindeki bölümlerden üç bölüm (Matematik, İstatistik ve Fizik) rastgele ve her bölümden yine rastgele olarak ikişer öğrenci seçilerek bir çalışma tasarlanmıştır. Öğrencilerin bir haftadaki çalışma saatleri 1-3, 5-7 ve $8-10$ saat şeklinde 3 kategoride belirlenmiştir. Öğrencilerin belli bir dersten aldıkları başarı puanları kodlanarak aşağıdaki gibi verilmiştir. Bu çalışma için;

a) En uygun olan istatistiksel analizi ve model denklemini belirleyiniz?

b) Model parametreleri için EKK tahmin edicilerini bulunuz? Ayrıca İstatistik bölümünde okuyan ve haftalık ders çalışma saati 5-7 olan 2-nci öğrenci için hata kestirimini yapınız?

c) ANOVA tablosunu düzenleyiniz?

d) Çalışma saatlerinin başarı puanları üzerine etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?

e) Bölümün başarı puanları üzerine etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?

f) Çalışma saati×Bölüm etkileşimi etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?

	Çalışma saatleri			
Bölüm	**1-3**	**5-7**	**8-10**	$T_{..z}$
Matematik	1 -2	5 4	7 8	
	$T_{.11}=-1$	$T_{.21}=9$	$T_{.31}=15$	**23**
İstatistik	0 1	3 4	9 8	
	$T_{.12}=1$	$T_{.22}=7$	$T_{.32}=17$	**25**
Fizik	-1 1	4 2	6 9	
	$T_{.13}=0$	$T_{.23}=6$	$T_{.33}=15$	**21**
$T_{.j.}$	**0**	**22**	**47**	$T_{...}=69$
$\sum_{z=1}^{g}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2$	**8**	**86**	**375**	$\sum_{j=1}^{k}\sum_{z=1}^{g}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2=469$

Çözüm **a)** Bağımlı değişken (Y): Başarı Puanı (puan)… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit aralıklı

Faktör (Deneme): Haftalık çalışma saatleri… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi sıralama

Denemeler: 1-3 saat arası, 5-7 saat arası, 8-10 saat arası olup ($k=3$)

Grup: Bölüm… Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

Gruplar(Bölümler): Matematik, İstatistik ve Fizik olup, ($g=3$)

Uygun İstatistiksel analiz: Denemeler özel seçimli ve gruplar (bölümler) rastgele seçimli olduğundan, bu şekilde plânlanan deney düzeni genelleştirilmiş rastgele blok düzeni veya iki faktör varyans analizidir. Uygun model ise karışım modeli olup, model denklemi;

$$y_{ijz} = \mu_{...} + \tau_j + \delta_z + (\tau\delta)_{jz} + \varepsilon_{i(jz)} ,\begin{cases} i = 1,2,\dots,n; n = 2 \\ j = 1,2,\dots,k; k = 3 \\ z = 1,2,\dots,g; g = 3 \end{cases} ,N = n \times k \times g = 18$$

şeklindedir. Burada $\tau_j = \mu_{.j.} - \mu_{...}$; $\delta_z = \mu_{..z} - \mu_{...}$; $(\tau\delta)_{jz} = (\tau\delta)_{jz} = \mu_{.jz} - \mu_{.j.} - \mu_{..z} + \mu_{...}$'dür.

b) Model parametreleri için EKK tahmin edicilerini bulalım.

Parametre	**EKK Tahmini**	**Parametre**	**EKK Tahmini**
$\mu_{...}$	$\overline{Y}_{...} = \frac{T_{...}}{N} = \frac{69}{18} = 3{,}833$		
$\mu_{.1.}$	$\overline{Y}_{.1.} = \frac{T_{.1.}}{gn} = \frac{0}{6} = 0$	τ_1	$\hat{\tau}_1 = \overline{Y}_{.1.} - \overline{Y}_{...} = -3{,}833$
$\mu_{.2.}$	$\overline{Y}_{.2.} = \frac{T_{.2.}}{gn} = \frac{22}{6} = 3{,}667$	τ_2	$\hat{\tau}_2 = \overline{Y}_{.2.} - \overline{Y}_{...}$=-0,166
$\mu_{.3.}$	$\overline{Y}_{.3.} = \frac{T_{.3.}}{gn} = \frac{47}{6} = 7{,}833$	τ_3	$\hat{\tau}_3 = \overline{Y}_{.3.} - \overline{Y}_{...} = 4$
$\mu_{..1}$	$\overline{Y}_{..1} = \frac{T_{..1}}{kn} = \frac{23}{6} = 3{,}833$	δ_1	$\hat{\delta}_1 = \overline{Y}_{..1} - \overline{Y}_{...} = 0$
$\mu_{..2}$	$\overline{Y}_{..2} = \frac{T_{..2}}{kn} = \frac{25}{6} = 4{,}167$	δ_2	$\hat{\delta}_2 = \overline{Y}_{..2} - \overline{Y}_{...} = 0{,}334$
$\mu_{..3}$	$\overline{Y}_{..3} = \frac{T_{..3}}{kn} = \frac{21}{6} = 3{,}5$	δ_3	$\hat{\delta}_3 = \overline{Y}_{..3} - \overline{Y}_{...} = -0{,}333$
$\mu_{.11}$	$\overline{Y}_{.11} = \frac{T_{.11}}{n} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$	$(\tau\delta)_{11}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{11} = \overline{Y}_{.11} - \overline{Y}_{.1.} - \overline{Y}_{..1} + \overline{Y}_{...} = -0{,}5$
$\mu_{.21}$	$\overline{Y}_{.21} = \frac{T_{.21}}{n} = \frac{9}{2}$ =4,5	$(\tau\delta)_{21}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{21} = \overline{Y}_{.21} - \overline{Y}_{.2.} - \overline{Y}_{..1} + \overline{Y}_{...} = 0{,}833$
$\mu_{.31}$	$\overline{Y}_{.31} = \frac{T_{.31}}{n} = \frac{15}{2}$ =7,5	$(\tau\delta)_{31}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{31} = \overline{Y}_{.31} - \overline{Y}_{.3.} - \overline{Y}_{..1} + \overline{Y}_{...} = -0{,}333$
$\mu_{.12}$	$\overline{Y}_{.12} = \frac{T_{.12}}{n} = \frac{1}{2}$ =0,5	$(\tau\delta)_{12}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{12} = \overline{Y}_{.12} - \overline{Y}_{.1.} - \overline{Y}_{..2} + \overline{Y}_{...} = 0{,}166$
$\mu_{.22}$	$\overline{Y}_{.22} = \frac{T_{.22}}{n} = \frac{7}{2} = 3{,}5$	$(\tau\delta)_{22}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{22} = \overline{Y}_{.22} - \overline{Y}_{.2.} - \overline{Y}_{..2} + \overline{Y}_{...} = -0{,}501$
$\mu_{.32}$	$\overline{Y}_{.32} = \frac{T_{.32}}{n} = \frac{17}{2} = 8{,}5$	$(\tau\delta)_{32}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{32} = \overline{Y}_{.32} - \overline{Y}_{.3.} - \overline{Y}_{..2} + \overline{Y}_{...} = 0{,}333$
$\mu_{.13}$	$\overline{Y}_{.13} = \frac{T_{.13}}{n} = \frac{0}{2} = 0$	$(\tau\delta)_{13}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{13} = \overline{Y}_{.13} - \overline{Y}_{.1.} - \overline{Y}_{..3} + \overline{Y}_{...} = 0{,}333$
$\mu_{.23}$	$\overline{Y}_{.23} = \frac{T_{.23}}{n} = \frac{6}{2} = 3$	$(\tau\delta)_{23}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{23} = \overline{Y}_{.23} - \overline{Y}_{.2.} - \overline{Y}_{..3} + \overline{Y}_{...} = -0{,}334$
$\mu_{.33}$	$\overline{Y}_{.33} = \frac{T_{.33}}{n} = \frac{15}{2} = 7{,}5$	$(\tau\delta)_{33}$	$\widehat{(\tau\delta)}_{33} = \overline{Y}_{.33} - \overline{Y}_{.3.} - \overline{Y}_{..3} + \overline{Y}_{...} = 0$

İstatistik bölümünde okuyan ve haftalık ders çalışma saati 5-7 olan 2-nci öğrenci için hata ve EKK kestirimi;

$\varepsilon_{2(22)} \rightarrow \hat{\varepsilon}_{2(22)} = y_{222} - \overline{Y}_{.\ 2\ 2} = 4 - 3{,}5 = 0{,}5$ bulunur.

c) ANOVA tablosu:

Değişim Kaynağı	S.D.	KT	KO	Test İstatistiği
Deneme (Çalışma Saatleri)	k-1=2	184,33	92,165	$F_{Deneme} = \frac{92{,}165}{1{,}722} = 53{,}522$
Grup (Bölümler)	g-1=2	1,33	0,665	$F_{Grup} = \frac{0{,}665}{1{,}722} = 0{,}386$
Deneme×Grup (Etkileşim)	(k-1)(g-1) =4	3,34	0,835	$F_{Deneme*Grup} = \frac{0{,}835}{1{,}722} = 0{,}485$
Hata	kg(n-1)=9	15,5	1,722	
Genel	N-1=17	204,5		

$$KT_{Genel} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{z=1}^{g}\sum_{i=1}^{n} {y_{ijz}}^2 - \frac{T^2_{...}}{N} = 469 - \frac{(69)^2}{18} = 204{,}5$$

$$KT_{Deneme} = \sum_{j=1}^{k}\frac{T^2_{.j.}}{gn} - \frac{T^2_{...}}{N} = \frac{1}{6}[(0)^2 + (22)^2 + (47)^2] - \frac{(69)^2}{18} = 184{,}33$$

$$KT_{Grup} = \sum_{z=1}^{g}\frac{T^2_{..z}}{kn} - \frac{T^2_{...}}{N} = \frac{1}{6}[(23)^2 + (25)^2 + (21)^2] - \frac{(69)^2}{18} = 1{,}33$$

$$KT_{Deneme*Grup} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{z=1}^{g}\frac{T^2_{.jz}}{n} - KT_{Deneme} - KT_{Grup} - \frac{T^2_{...}}{N} = \frac{1}{2}[(-1)^2 + (9)^2 + (15)^2 + (1)^2 + (7)^2 + (17)^2 + (0)^2 + (6)^2 + (15)^5] - 184{,}33 - 1{,}33 - \frac{(69)^2}{18} = 3{,}34$$

$$KT_{Hata} = KT_{Genel} - KT_{Deneme} - KT_{Grup} - KT_{Deneme*Grup} = 204{,}5 - 184{,}33 - 1{,}33 - 3{,}34 = 15{,}5$$

d) Çalışma saatlerinin başarı puanları üzerine etkisinin önemli olup olmadığı ile ilgili hipotezler:

$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ (veya $H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{..}$)

$H_1: \exists\tau_j \neq 0$ (veya $H_1: \exists\mu_{.j}$ diğerlerinden farklı)

Test istatistiğinin H_0 doğru iken alabileceği değer; $F_{Deneme} = 53{,}522$ olup, $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre kritik değer $F_t = F_{k-1;kg(n-1);\,\alpha} = F_{2;\,9;\,0{,}05}$=4,26'dır. 53,522 > 4,26 olduğundan H_0 hipotezi ret edilir ve böylece çalışma saatlerinin başarı puanları üzerine etkisi önemlidir. Yani çalışma saatlerine göre başarı puanları ortalaması farklılık göstermektedir.

e) Bölümün başarı puanları üzerine etkisinin önemli olup olmadığı ile ilgili hipotezler:

$H_0: \sigma_\delta^2 = 0$ (veya $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$)

$H_1: \sigma_\delta^2 > 0$ (veya $\exists z\ için\ \delta_z \neq 0$

Test istatistiğinin H_0 doğru iken alabileceği değer; $F_{Grup} = 0{,}386$ olup, $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre kritik değer $F_t = F_{g-1;kg(n-1);\ \alpha} = F_{2;\ 9;\ 0{,}05}$=4,26'dır. 0,386 < 4,26 olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece bölümün başarı puanları üzerine etkisi önemsizdir. Yani bölümlere göre başarı puanları ortalaması farklılık göstermemektedir.

f) Çalışma saati×Bölüm etkileşimi etkisinin önemli olup olmadığı ile ilgili hipotezler:
$H_0: \sigma_{(\tau\delta)}^2 = 0$ (veya $\tau\delta_{11} = \tau\delta_{12} = \cdots = \tau\delta_{33} = 0$)

$H_1: \sigma_{(\tau\delta)}^2 > 0$ (veya en az bir (j, z) için $\tau\delta_{jz} \neq 0$)

Test istatistiğinin H_0 doğru iken alabileceği değer; $F_{Deneme*Grup} = 0{,}485$ olup, $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre kritik değer $F_t = F_{(k-1)(g-1);kg(n-1);\ \alpha} = F_{4;\ 9;\ 0{,}05}$=3,63'dür. 0,485 < 3,63 olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece etkileşim etkisi önemsizdir. Yani çalışma saatleri ve bölümler başarı puanları ortalamasını birbirinden bağımsız olarak etkilemektedir.

Sorular

1. Aşağıda verilen bir deney tasarımı verisinde denemelerin özel seçimli ve blokların rastgele seçimli olduğunu kabul edelim. Buna göre istenilenleri cevaplandırınız?

a) Uygun deney tasarımını ve model denklemini belirleyiniz?
b) Model parametreleri ve her bir gözlemin hatası için EKK tahmin edicilerini bulunuz?
c) ANOVA tablosunu düzenleyiniz?
d) Denemelerin bağımlı değişken üzerine etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?
e) Blokların bağımlı değişken üzerine etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?
f) Eğer gerekiyorsa denemeler için uygun bir çoklu karşılaştırma tekniği ile farklılık gösteren denemeleri belirleyiniz?
g) $C_1 = \mu_{.1} + \mu_{.2} - \mu_{.3} - \mu_{.4}\ ve\ C_2 = 3\mu_{.1} - \mu_{.2} - \mu_{.3} - \mu_{.4}$ lineer bağıntılarının önemli olup olmadığına Scheffe yöntemi ile %5 önem seviyesinde karar veriniz?

h) $C_1 = \mu_{.1} + \mu_{.2} - \mu_{.3} - \mu_{.4}\ ve\ C_2 = 3\mu_{.1} - \mu_{.2} - \mu_{.3} - \mu_{.4}$ lineer bağıntılarının önemli olup olmadığına Bonferroni yöntemi ile %5 önem seviyesinde karar veriniz?

	Denemeler			
Blok	D_1	D_2	D_3	D_4
B_1	13	12	9	10
B_2	12	13	12	11
B_3	15	14	10	11

2. Aşağıda verilen bir deney tasarımı verisinde hem denemelerin hem de blokların özel seçimli olduğunu kabul edelim. Buna göre istenilenleri cevaplandırınız?

a) Uygun deney tasarımını ve model denklemini belirleyiniz?
b) Model parametreleri için EKK tahmin edicilerini bulunuz?
c) ANOVA tablosunu düzenleyiniz?
d) Denemelerin bağımlı değişken üzerine etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?
e) Blokların bağımlı değişken üzerine etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?
f) Deneme×Grup etkileşimi etkisinin önemli olup olmadığını %5 önem seviyesinde belirleyiniz?

Gruplar	**Denemelere** D_1	D_2	D_3	D_4
G_1	3 5 7	12 11 15	8 4 6	1 3 2
G_2	5 7 6	14 13 15	7 6 5	3 5 4
G_3	6 4 3	17 18 15	7 8 9	4 3 2
G_4	3 2 5	11 12 13	4 8 12	3 6 5

3. Bölüm III.2'de verilen (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitliklerinin doğru olduğunu gösteriniz?

BÖLÜM IV

LATİN KARE VE GREKO LATİN KARE DENEY TASARIMLARI

Latin kare ve Greko latin kare tasarımları bloklama ilkesine dayanır. Her iki tasarımda da birinci derecede öneme sahip olan ”tek” faktör vardır. Latin kare tasarımında deney birimleri arasındaki sistematik farklılıkları gidermek amacıyla iki bloklama değişkeni, Greko latin kare tasarımında ise 3 tane bloklama değişkeni vardır.

IV.1 LATİN KARE TASARIMI

Deneme sayısı k olan bir Latin kare tasarımı veya $k \times k$ Latin kare tasarımı, k tane satır ve k tane sütun kapsayan bir karedir. Latin kare tasarımında satır ve sütun adı verilen iki tane bloklama değişkeni vardır. Deney birimleri arasındaki sistematik farklılıkların etkisini gidermek amacıyla bloklama yapılmaktadır. Deney birimleri arasındaki heterojenlik bir tane bloklama değişkeni kullanılarak giderilemeyecek kadar fazla ise iki farklı bloklama değişkeni kullanılarak homojenlik sağlanmaya çalışılır. Eğer bir deney tasarımında satır sayısı, sütın sayısı ve deneme sayısı birbirlerine eşitse bu deney tasarımına Latin Kare Tasarımı denir. Latin kare tasarımındaki k^2 sayıdaki hücrelerin her biri denemelere karşı gelen k tane Latin harfini kapsar. Latin kare tasarımında her bir deneme (Latin harfi), her satır ve her sütunda yalnız bir kere gözlenir. Bu sebeple Latin kare tasarımında toplam gözlem sayısı $N = k^2$'dir. Her ne kadar Latin kare tasarımı satır sütun tasarımları içerisinde en kolay ve aynı zamanda en iyi bilineni olmasına rağmen kısıt sayısının fazla olmasından dolayı uygulamada fazla yaygın kullanılmamaktadır. Latin kare tasarımında rastgelelik üzerine iki kısıt (satır ve sütun blokları) konulmaktadır.

Örneğin;üç deneme $A, B\ ve\ C$ latin harfleri ile gösterilsin Üç farklı denemenin etkisinin araştırıldığı bir 3×3Latin karesi tasarımında, her denemenin her satır ve her sütunda yalnız bir kez bulunması şartını sağlayan birden fazla (12 tane) Latin karesi tasarımı vardır. Bu tasarımlardan rastgele seçilmiş herhangi üçü Tablo 4.1'deki gibi yazılabilir:

Tablo 4.1 Latin Kare Tasarımı için üç örnek

	SÜTUNLAR								
	A	B	C	B	A	C	C	B	A
SATIRLAR	B	C	A	C	B	A	A	C	B
	C	A	B	A	C	B	B	A	C

Latin kare tasarımında istatistiksel model;

$$Y_{ijl} = \mu_{...} + \beta_i + \alpha_j + \gamma_l + \varepsilon_{ijl}\, , i = 1, 2, \dots r; j = 1, 2, \dots, k; l = 1, 2, \dots, m \qquad (4.1)$$

şeklindedir. Burada;

Y_{ijl}: i-nci satır, l-nci sütundaki j-nci denemeye ait bağımlı değişken değeri

$\mu_{...}$: Genel kitle ortalaması

β_i: i-nci satır etkisi, $(\beta_i = \mu_{i..} - \mu_{...})$

α_j: j-nci deneme etkisi, , $(\alpha_j = \mu_{.\,j\,.} - \mu_{...})$

γ_l : l-nci sütun etkisi, $(\gamma_l = \mu_{..\,l} - \mu_{...})$

$\varepsilon_{i\,j\,l}$: Hata terimidir.

Latin kare tasarımına ait istatistiksel model bir sabit etkili modeldir. Bu sebeple $\sum_{i=1}^{r} \beta_i = 0$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0$ ve $\sum_{l=1}^{m} \gamma_l = 0$ olduğu varsayılır ve $r = k = m$ dir. Bu kısıtlar özellikle model parametrelerinin tahmin edilmesinde önemli rol oynarlar. Model parametreleri EKK yöntemi kullanılarak, HKT en küçük yapacak şekilde tahmin edilebilir.

Bu model için hata terimleri bir rastgele değişken olup, hata terimlerinin $\varepsilon_{i\,j\,l} \sim BND(0\,,\ \sigma_\varepsilon^2)$ dağılımlı olduğu varsayılır. Bu durumda hataların bir doğrusal fonksiyonu olması sebebiyle bağımlı değişkende bir rastgele değişken olup, dağılımı $Y_{ijl} \sim BND(\mu_{...} + \beta_i + \alpha_j + \gamma_l\,, \sigma_\varepsilon^2)$ ile verilir.

Latin kare tasarımında deneme, satır ve sütun etkilerinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı hipotez testi ile kontrol edilebilir. Her bir durum için test edilecek hipotez grupları Tablo 4.2'de verildi.

Tablo 4.2 Latin Kare tasarımı kapsamında test edilecek hipotezler

Deneme, satır ve sütun değişkenleri düzeyleri özel seçimli ise		
i) Deneme etkisi için	**ii) Satır etkisi için**	**iii) Sütun etkisi için**
H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ H_1: $\exists\ \alpha_j$ diğerlerinden farklı	H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0$ H_1: $\exists\ \beta_i$ diğerlerinden fark	H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 0$ H_1: $\exists\ \gamma_l$ diğerlerinden farklı
Deneme, satır ve sütun değişkenleri düzeyleri rastgele seçimli ise		
H_0: $\sigma_\alpha^2 = 0$ H_1: $\sigma_\alpha^2 > 0$	H_0: $\sigma_\beta^2 = 0$ H_1: $\sigma_\beta^2 > 0$	H_0: $\sigma_\gamma^2 = 0$ H_1: $\sigma_\gamma^2 > 0$

Bu hipotezlerin test edilmesinde bağımlı değişkene ait toplam değişimin model tarafından belirlenen birbirinden bağımsız değişim kaynaklarına ayrıştırılarak türetilmesi ile elde edilen test istatistikleri kullanılır. Diğer bir ifade ile ilgili test istatistiklerinin türetilebilmesi için bağımlı değişkene ait genel kareler toplamı modelde belirtilen değişim kaynaklarına göre birbirinden bağımsız kareler toplamlarına ayrıştırılır. Modelde belirtilen değişim kaynakları, deneme, satır, sütun ve hatadır. Buna göre, bağımlı değişkene ait genel kareler toplamı;

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{m} \left(Y_{ijl} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{m} Y_{i\,j\,l}^2 - \frac{T_{...}^2}{N} \tag{4.2}$$

olup, diğer kareler toplamları da sırası ile

$$KT_{Deneme} = r \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{Y}_{.\,j\,.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{.j.}^2}{r} - \frac{T_{...}^2}{N} \tag{4.3}$$

$$KT_{Satır} = k \sum_{i=1}^{r} \left(\overline{Y}_{i\,..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{T_{i..}^2}{k} - \frac{T_{...}^2}{N} \tag{4.4}$$

$$KT_{Sütun} = k \sum_{l=1}^{m} \left(\overline{Y}_{..\,l} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{l=1}^{m} \frac{T_{..\,l}^2}{k} - \frac{T_{...}^2}{N} \tag{4.5}$$

$$KT_{Hata} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m}\left(Y_{ijl} - \overline{Y}_{i\,.\,.} - \overline{Y}_{.\,j\,.} - \overline{Y}_{.\,.\,l} + 2\overline{Y}_{.\,.\,.}\right)^2$$

$$= KT_{Genel} - KT_{Deneme} - KT_{Satır} - KT_{Sütun} \quad (4.6)$$

eşitlikleri tarafından verilir. Her bir kareler toplamı kendi serbestlik derecesine bölünerek kareler ortalamalarına ve ana değişim kaynaklarına ait kareler ortalamalarının hata kareler ortalamasına oranlanması ile de test istatistiklerine ulaşılır. Latin kare deney tasarımı için analiz sonuçlarının özetleneceği Varyans Analizi Tablosu Tablo 4.3'de verildi.

Tablo 4.3 Latin Kare Tasarımı İçin Anova Tablosu $(r = m = k)$

Değişim Kaynağı	**S.D.**	**KT**	**KO**	**Test İstatistiği**
Deneme	$k-1$	KT_{Deneme}	KO_{Deneme}	$F_{Deneme} = \frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}}$
Satır	$k-1$	$KT_{Satır}$	$KO_{Satır}$	$F_{Satır} = \frac{KO_{Satır}}{KO_{Hata}}$
Sütun	$k-1$	$KT_{Sütun}$	$KO_{Sütun}$	$F_{Sütun} = \frac{KO_{Sütun}}{KO_{Hata}}$
Hata	$(k-1)(k-2)$	KT_{Hata}	KO_{Hata}	
Genel	N-1	KT_{Genel}		

Karar: Deneme etkisinin önemliliği için α önem seviyesindeki kritik değer $F_t = F_{(k-1);(k-1)(k-2);\alpha}$ olmak üzere $F_{Deneme} > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $F_{Deneme} \le F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Satır etkisinin önemliliği için α önem seviyesindeki kritik değer $F_t = F_{(k-1);(k-1)(k-2);\alpha}$ olmak üzere $F_{Satır} > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $F_{Satır} \le F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Sütun etkisinin önemliliği için α önem seviyesindeki kritik değer $F_t = F_{(k-1);(k-1)(k-2);\alpha}$ olmak üzere $F_{Satır} > F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $F_{Satır} \le F_t$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Örnek IV.1 Aynı tür halıyı üreten dört farklı fabrikanın günlük üretim miktarları m^2 olarak karşılaştırılmak isteniyor. Ayrıca üretim miktarı rastgele seçilen dört farklı makine ve dört farklı ip türüne bağlıdır. Her fabrikada, her farklı makine ve her farklı ip türü sadece bir defa kullanılmış olsun. Bu koşullar altında elde edilen günlük üretim miktarları Tablo 4.4'deki gibi gözlenmiştir. Buna göre;

i) Problemin analizi için uygun olan deney tasarımını ve model denklemini belirleyiniz?

ii) Model parametrelerinin EKK tahmin edicilerini bulunuz? Anova tablosunu düzenleyiniz?

iii) Günlük üretim miktarı üzerinde fabrikaların etkili olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

iv) Günlük üretim miktarı üzerinde makinelerin etkili olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

v) Günlük üretim miktarı üzerinde ip türlerinin etkili olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

Tablo 4.4 Günlük halı üretim miktarları

		Makineler				
		I	**II**	**III**	**IV**	$T_{i\,.\,.}$
İp Türü	**1**	**A=3**	**B=7**	**C=2**	**D=10**	**22**
	2	**B=8**	**A=3**	**D=12**	**C=7**	**30**
	3	**C=2**	**D=8**	**A=4**	**B=11**	**25**
	4	**D=9**	**C=5**	**B=9**	**A=4**	**27**
$T_{.\,.\,l}$		**22**	**23**	**27**	**32**	
$T_{.\,j\,.}$		**A=14**	**B=35**	**C=16**	**D=39**	$T_{...} = 104$
$\sum_{i=1}^{r} y_{ijl}^2$		**158**	**147**	**245**	**286**	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} y_{ijl}^2 = 836$

Çözüm: i) Bağımlı değişken((Y): Günlük halı üretim miktarı (m^2)….Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Bağımsız değişkenler:

Deneme (Faktör): Fabrika…Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

Deneme grupları (Faktör düzeyleri): $\begin{cases} A-Fabrikası\ (Denemesi) \\ B-Fabrikası(Denemesi) \\ C-Fabrikası\ (Denemesi) \\ D-Fabrikası\ (Denemesi) \end{cases}$	Özel seçimli, Bağımsız deneme grupları ($k = 4$)

Satır değişkeni (Blok 1): İp Türü….Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

Blok 1 grupları: $\begin{cases} \text{İ}p\ Türü\ 1 \\ \text{İ}p\ Türü\ 2 \\ \text{İ}p\ Türü\ 3 \\ \text{İ}p\ Türü\ 4 \end{cases}$	Rastgele seçimli, Bağımsız gruplar ($r = 4$)

Sütun değişkeni (Blok 2): Makine ….Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

Blok 2 grupları: $\begin{cases} Makine\ I \\ Makine\ II \\ Makine\ III \\ Makine\ IV \end{cases}$	Rastgele seçimli, Bağımsız gruplar ($m = 4$)

Deney tasarımında rastgelelik üzerine 2 kısıt (İp türü ve Makine) konulduğundan, her fabrikada, her farklı makine ve her farklı ip türü sadece bir defa kullanıldığından uygun deney tasarımı Latin kare tasarımıdır. Bu deney için planlanan Latin kare tasarımında $k = r = m = 4$ alınmıştır. Denemeler özel seçimli, satır ve sütun değişkenleri rastgele seçimli olduğundan uygun model 4×4 Latin kare karışım modelidir. Model denklemi ise;

$$Y_{ijl} = \mu_{...} + \beta_i + \alpha_j + \gamma_l + \varepsilon_{ijl}\,, i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4; l = 1,2,3,4$$

şeklindedir.

ii) $\overline{Y}_{...} = \frac{T_{...}}{N}$; $\overline{Y}_{i\,..} = \frac{T_{i\,..}}{k}$, $i = \overline{1,4}$; $\overline{Y}_{.\,j\,.} = \frac{T_{.\,j\,.}}{r}$, $j = \overline{1,4}$; $\overline{Y}_{..\,l} = \frac{T_{..\,l}}{k}$, $l = \overline{1,4}$; $N = 16$; $r = k = m = 4$; $\hat{\alpha}_j = \overline{Y}_{.\,j\,.} - \overline{Y}_{...}$; $\hat{\beta}_i = \overline{Y}_{i\,..} - \overline{Y}_{...}$; $\hat{\gamma}_l = \overline{Y}_{..\,l} - \overline{Y}_{...}$ olduğu dikkate alınırsa;

Parametre	**EKK Tahmin edicisi**	**Parametre**	**EKK Tahmin edicisi**
$\mu_{...}$	$\overline{Y}_{...} = \frac{104}{16} = 6{,}50$		
$\mu_{.\,1\,.}$	$\overline{Y}_{.\,1\,.} = \frac{14}{4} = 3{,}50$	α_1	$\hat{\alpha}_1$ =-3
$\mu_{.\,2\,.}$	$\overline{Y}_{.\,2\,.} = \frac{35}{4} = 8{,}75$	α_2	$\hat{\alpha}_2$ =2,25
$\mu_{.\,3\,.}$	$\overline{Y}_{.\,3\,.} = \frac{16}{4} = 4{,}00$	α_3	$\hat{\alpha}_3$ =-2,5
$\mu_{.\,4\,.}$	$\overline{Y}_{.\,4\,.} = \frac{39}{4} = 9{,}75$	α_4	$\hat{\alpha}_4$ =3,25
$\mu_{1\,..}$	$\overline{Y}_{1\,..} = \frac{22}{4} = 5{,}5$	β_1	$\hat{\beta}_1$ =-1
$\mu_{2\,..}$	$\overline{Y}_{2\,..} = \frac{30}{4} = 7{,}5$	β_2	$\hat{\beta}_2$ =1
$\mu_{3\,..}$	$\overline{Y}_{3\,..} = \frac{25}{4} = 6{,}25$	β_3	$\hat{\beta}_3$ =-0,25
$\mu_{4\,..}$	$\overline{Y}_{4\,..} = \frac{27}{4} = 6{,}75$	β_4	$\hat{\beta}_4$ =0,25
$\mu_{..\,1}$	$\overline{Y}_{..\,1} = \frac{22}{4} = 5{,}5$	γ_1	$\hat{\gamma}_1$ =-1
$\mu_{..\,2}$	$\overline{Y}_{..\,2} = \frac{23}{4} = 5{,}75$	γ_2	$\hat{\gamma}_2$ =-0,75
$\mu_{..\,3}$	$\overline{Y}_{..\,3} = \frac{27}{4} = 6{,}75$	γ_3	$\hat{\gamma}_3$ =0,25
$\mu_{..\,4}$	$\overline{Y}_{..\,4} = \frac{32}{4} = 8$	γ_4	$\hat{\gamma}_4$ =1,5

Tablo 4.5 Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı	**S.D.**	**KT**	**KO**	**Test İstatistiği**
Deneme (Fabrika)	$k-1=3$	123,5	41,17	$F_{Deneme} = \frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}} = \frac{41{,}17}{2{,}08} = 19{,}79$
Satır (İp Türü)	$k-1=3$	8,5	2,83	$F_{Satır} = \frac{KO_{Satır}}{KO_{Hata}} = \frac{2{,}83}{2{,}08} = 1{,}36$
Sütun (Makine)	$k-1=3$	15,5	5,17	$F_{Sütun} = \frac{KO_{Sütun}}{KO_{Hata}} = \frac{5{,}17}{2{,}08} = 2{,}49$
Hata	$(k-1)(k-2) = 6$	12,5	2,08	
Genel	N-1=15	160		

$$KT_{Genel} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} Y_{i\,j\,l}^2 - \frac{T_{...}^2}{N} = 836 - \frac{(104)^2}{16} = 160$$

$$KT_{Deneme} = \sum_{j=1}^{k}\frac{T_{.\,j\,.}^2}{r} - \frac{T_{...}^2}{N} = \frac{1}{4}[(14)^2 + (35)^2 + (16)^2 + (39)^2] - \frac{(104)^2}{16} = 123{,}5$$

$$KT_{Satır} = \sum_{i=1}^{r}\frac{T_{i\,..}^2}{k} - \frac{T_{...}^2}{N} = \frac{1}{4}[(22)^2 + (30)^2 + (25)^2 + (27)^2] - \frac{(104)^2}{16} = 8{,}5$$

$$KT_{Sütun} = \sum_{l=1}^{m} \frac{T_{..l}^{2}}{k} - \frac{T_{...}^{2}}{N} = \frac{1}{4}[(22)^2 + (23)^2 + (27)^2 + (32)^2] - \frac{(104)^2}{16} = 15,5$$

iii) Günlük üretim miktarı üzerinde fabrikaların (denemelerin) etkili olup olmadığına ait test edilecek olan hipotezler, fabrikalar özel seçimli olduğundan:

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$
$H_1: \exists\ \alpha_j$ diğerlerinden farklı

şeklindedir. H_0 doğru iken test istatistiğinin alabileceği değer $F_{Deneme} = 19,79$ dur. $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{(k-1);(k-1)(k-2);\alpha} = F_{3;6;0,05} = 4,76$ olup, $F_{Deneme} = 19,79 > 4,76$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Bu sonuca göre aynı tür halıyı üreten dört farklı fabrikanın günlük üretim miktarları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık vardır.

Eğer arzu edilirse çoklu karşılaştırma teknikleri kullanılarak hangi fabrikalar arasında farklılıklar olduğu belirlenebilir.

iv) Günlük üretim miktarı üzerinde makinelerin (Sütun=Blok 2) etkili olup olmadığına ait test edilecek olan hipotezler, makineler rastgele seçimli olduğundan:

$H_0: \sigma_\gamma^2 = 0$

$H_1: \sigma_\gamma^2 > 0$ şeklindedir. H_0 doğru iken test istatistiğinin alabileceği değer $F_{Sütun} = 2,49$ dur. $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{(k-1);(k-1)(k-2);\alpha} = F_{3;6;0,05} = 4,76$ olup, $F_{Sütun} = 2,49 < 4,76$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Bu sonuca göre aynı tür halının üretildiği dört farklı makinenin günlük üretim miktarları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık yoktur.

iv) Günlük üretim miktarı üzerinde İp türlerinin (Satır=Blok 1) etkili olup olmadığına ait test edilecek olan hipotezler, ip türleri rastgele seçimli olduğundan:

$H_0: \sigma_\beta^2 = 0$

$H_1: \sigma_\beta^2 > 0$ şeklindedir. H_0 doğru iken test istatistiğinin alabileceği değer $F_{Satır} = 1,36$ dır. $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{(k-1);(k-1)(k-2);\alpha} = F_{3;6;0,05} = 4,76$ olup, $F_{Sütun} = 1,36 < 4,76$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Bu sonuca göre aynı tür halının üretildiği dört farklı ip türü için günlük üretim miktarları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık yoktur.