



**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ**

**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM  
ENSTİTÜSÜ**

**İST.647 PARAMETRİK OLMAYAN  
İSTATİSTİKSEL ANALİZ**

**PROF. DR. YÜKSEL ÖNER**

**5. Hafta**

## 4.2 İŞARET TESTİ

Binom testinin özel bir durumu olan bu test parametrik olmayan testlerin en eskisi olup, ilk olarak 1710 yılında John Arbuthnot tarafından kullanılmıştır.

### Varsayımları

1. Araştırmada ilgilenilen değişken sürekli
2. Değişkenin ölçme düzeyi en az sıralamadır
3. Örnek birimleri medyanı bilinmeyen bir kitleden tesadüfi olarak çekilir.

### Test İşleminin Algoritması

1) Hipotezler kurulur

$M$ : Örneğin çekildiği kitleye ait bilinmeyen medya parametresi ve  $M_0$ : herhangi bir reel sayı olmak üzere:

a)  $H_0: M = M_0$

b)  $H_0: M = M_0$

c)  $H_0: M = M_0$

$H_0: M < M_0$

$H_0: M > M_0$

$H_0: M \neq M_0$

2) Medyanı  $M$  olan kitleden  $n$  birimlik bir örnek çekilir. Örnek birimleri  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olsun.

Örnek birimleri üzerinde  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $D_i = X_i - M_0$  olmak üzere  $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$

tesadüfi değişkenini tanımlayalım. Eğer  $D_i = 0$  sonucu ortaya çıkarsa bu sonucu veren gözlem/gözlemler işlem dışı tutulur. Bu durum örnek hacminin işlem dışı kalan gözlem sayısı kadar azalmasına sebep olur ve işleme yeni örnek hacmi ile devam edilir. Örnek birimleri birbirinden bağımsız olduğundan hem  $D_i$  farkları hem de  $\delta_i$  tesadüfi değişkenleri bağımsızdır ve üstelik  $\delta_i \sim \text{Bernoulli}(1, \theta)$  dağılımına sahiptir.  $H_0$  doğru iken örneklemin çekildiği kitlenin medyanı  $M_0$  olacağından, örnek birimlerinin yarısının  $M_0$ 'dan küçük değerli, diğer yarısının da  $M_0$ 'dan büyük değerli olması beklenir. Bir diğer ifadeyle  $D_i$  farklarının yarısının negatif ve diğer yarısını da pozitif olması ve böylece  $\delta_i$  tesadüfi değişkeninin alabileceği değerlerin yarısı "0" iken yarısı da "1" olacaktır. Bu sebeple başarı olasılığını gösteren dağılımın parametresi  $\theta = \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$  dir.

3) Test istatistiği ve test istatistiğinin örnekleme dağılımı belirlenir. İşaret testinde test istatistiği;

$$k = \sum_{i=1}^n \delta_i \quad (4.6)$$

olup, bağımsız Bernoulli denemelerinin toplamıdır. Bu sebeple  $k$  istatistiğinin örnekleme dağılımı;

$k \sim \text{Binom}\left(n, \theta = \frac{1}{2}\right)$  olup, olasılık fonksiyonu  $f(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  dir.

Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri  $k_h$  olsun.

4) Karar kuralı belirlenir ve karar verilerek sonuç yorumlanır.

Karar kuralı  $\alpha$  önem seviyesinde  $H_1$  hipotezine göre belirlenir. Eğer  $H_1$  hipotezi:

(a)  $H_1 : M < M_0$  iken (tek yönlü) test istatistiğinin küçük bir değer almasını bekleriz, çünkü  $n$  birimlik örnek, medyanı  $M$  olan kitleden çekilmiştir.  $M < M_0$  olması sebebiyle örnek birimlerinin çok azı  $M_0$  'dan büyük ve böylece az sayıda  $D_i > 0$ , yani çok az sayıda  $\delta_i = 1$  değerini almış olacak ve böylece  $k_h = \sum_{i=1}^n \delta_i$  küçük değer çıkacaktır. Buna göre  $\alpha$  önem seviyesinde;

I.Yol: test istatistiğinin örneklem dağılımından belirlenen kritik değer  $Pr(k \leq k_\alpha) = \alpha$  eşitliğini sağlayan  $k_\alpha$  (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere, eğer  $k_h \leq k_\alpha$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilir,  $k_h > k_\alpha$  ise  $H_0$  hipotezi ret edilemez.

II. Yol:  $Pr(k \leq k_h) = p$  (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere  $p \leq \alpha$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilir,  $p > \alpha$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilemez.

(b)  $H_1 : M > M_0$  iken (tek yönlü) test istatistiğinin büyük bir değer almasını bekleriz, çünkü  $M > M_0$  olması sebebiyle örnek birimlerinin çoğu  $M_0$  'dan büyük ve böylece çok sayıda  $D_i > 0$ , yani çok sayıda  $\delta_i = 1$  değerini almış olacak ve böylece  $k_h = \sum_{i=1}^n \delta_i$  büyük değer çıkacaktır. Buna göre  $\alpha$  önem seviyesinde;

I.Yol: test istatistiğinin örneklem dağılımından belirlenen kritik değer  $Pr(k \geq k'_\alpha) = \alpha$  eşitliğini sağlayan  $k'_\alpha$  (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere, eğer  $k_h \geq k'_\alpha$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilir,  $k_h < k'_\alpha$  ise  $H_0$  hipotezi ret edilemez.

II. Yol:  $Pr(k \geq k_h) = p$  (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere  $p \leq \alpha$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilir,  $p > \alpha$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilemez.

(c)  $H_1 : M \neq M_0$  iken (çift yönlü) test istatistiğinin ya küçük ya da büyük bir değer almasını bekleriz. Bu durumda  $\alpha$  önem seviyesinde;

I. Yol: test istatistiğinin örneklem dağılımından belirlenen kritik değerler  $Pr(k \leq k_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$  ve  $Pr(k \geq k'_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$  eşitliklerini sağlayan  $k_{\frac{\alpha}{2}}$  ve  $k'_{\frac{\alpha}{2}}$  (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere, eğer  $k_h \leq k_{\frac{\alpha}{2}}$  veya  $k_h \geq k'_{\frac{\alpha}{2}}$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilir,  $k_{\frac{\alpha}{2}} < k_h < k'_{\frac{\alpha}{2}}$  ise  $H_0$  hipotezi ret edilemez.

II. Yol:  $E(k) = np = \frac{n}{2}$  olduğundan, eğer  $k_h < E(k)$  ise  $Pr(k \leq k_h) = p$  veya  $k_h > E(k)$  ise  $Pr(k \geq k_h) = p$  olmak üzere (T9 tablosundan bulunabilir)  $p \leq \frac{\alpha}{2}$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilir,  $p > \frac{\alpha}{2}$  ise  $H_0$  hipotezin ret edilemez.

**Örnek 4.5** A ilacı ile tedavi edilen hastaların iyileşme süresine ilişkin medyan değerinin 30 günden fazla olduğu iddia edilmektedir. Bu ilacın kullanıldığı hastalardan tesadüfi olarak

seçilen 8 hastanın iyileşme süreleri aşağıdadır. Bu bilgiye göre iddianın doğru olup olmadığını %5 önem seviyesinde kontrol ediniz?

$X_i(\text{Gün}): 32 \quad 65 \quad 27 \quad 34 \quad 66 \quad 40 \quad 36 \quad 52$

**Cözüm** Değişken (X): İyileşme süresi (gün)....Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Hipotezler  $H_0: M = 30$  , ( $M_0 = 30$  verilmiş)

$H_1: M > 30$

$X_i$	$D_i = X_i - 30$	$\delta_i$	Test istatistiği ve örnekleme dağılımı
32	2	1	$k = \sum_{i=1}^n \delta_i$ ve $H_0$ doğru iken $k \sim \text{Binom}(n = 8, p = \frac{1}{2})$ olup olasılık fonksiyonu $f(k) = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{8-k}$ , $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ Test istatistiğinin alabileceği değer $k_h = 7$ dir.
65	35	1	
27	-3	0	
34	4	1	
66	36	1	
40	10	1	
36	6	1	
52	22	1	

**Karar:**  $\alpha = 0,05$  önem seviyesinde  $H_1$  hipotezine göre karar kuralı  $Pr(k \geq k'_\alpha) = \alpha = 0,05$  ise (T9)'dan  $k'_\alpha = 7$  için  $Pr(k \geq 7) = 0,0352 < 0,05$  ve  $k'_\alpha = 6$  için  $Pr(k \geq 6) = 0,1446 > 0,05$  bulunur. Yakınlık durumu dikkate alındığında  $k'_\alpha = 7$  alınır.  $k_h = k'_\alpha$  olduğundan  $H_0$  hipotezi ret edilir.

Veya  $p = Pr(k \geq k_h) = Pr(k \geq 7) = 0,0352 < 0,05 = \alpha$  olduğundan  $H_0$  hipotezi ret edilir. Buna göre A ilacı ile tedavi edilen hastaların iyileşme sürelerine ait medyan değerinin 30 günden fazla olduğu iddiası doğrudur.

**Örnek 4.6** Konumları ve çürüme derecesi aynı olan dişlere yapılan dolguların dayanma süresine ait medyanın 100 aydan az olduğu öne sürülmektedir. Rasgele seçilen bu özellikteki 9 hastadaki dolguların dayanma süreleri aşağıdadır. Buna göre %1 önem seviyesinde iddianın doğruluğunu araştırınız?

$X_i(\text{Ay}): 110 \quad 85 \quad 43 \quad 60 \quad 47 \quad 30 \quad 150 \quad 80 \quad 48$

**Cözüm** Değişken (X): Dayanma süresi (ay)....Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Hipotezler  $H_0: M = 100$  , ( $M_0 = 100$  verilmiş)

$H_1: M < 100$

$X_i$	$D_i = X_i - 100$	$\delta_i$	Test istatistiği ve örnekleme dağılımı
110	10	1	
85	-15	0	
43	-57	0	

60	-40	0	$k = \sum_{i=1}^n \delta_i$ ve $H_0$ doğru iken $k \sim \text{Binom}(n = 9, p = \frac{1}{2})$ olup olasılık fonksiyonu $f(k) = \binom{9}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{9-k}$ , $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ Test istatistiğinin alabileceği değer $k_h = 2$ dir.
47	-53	0	
30	-70	0	
150	50	1	
80	-20	0	
48	-52	0	

**Karar:**  $\alpha = 0,01$  önem seviyesinde  $H_1$  hipotezine göre karar kuralı  $Pr(k \leq k_\alpha) = \alpha = 0,05$  ise (T9)'dan  $k_\alpha = 1$  için  $Pr(k \leq 1) = 0,0196 > 0,01$  ve  $k_\alpha = 0$  için  $Pr(k \leq 0) = 0,0020 < 0,01$  bulunur. Yakınlık durumu dikkate alındığında  $k_\alpha = 0$  alınır.  $k_h > k_\alpha$  olduğundan  $H_0$  hipotezi ret edilemez.

Veya  $p = Pr(k \leq k_h) = Pr(k \leq 2) = 0,0899 > 0,05 = \alpha$  olduğundan  $H_0$  hipotezi ret edilemez. Buna göre dış dolgularının dayanma sürelerine ait medyan değerinin 100 aydan az olduğu iddiası doğrudur.

**Örnek 4.7** Sürekli ve en az sıralama düzeyinde ölçülen bir değişken için 10 örnek birimi üzerinde yapılan ölçüm sonuçları aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Bu örneğin medyanı 3,5 birim olan bir kitleden çekilip çekilmediğine %5 önem seviyesinde karar veriniz?

**$X_i(\text{Birim}): 1,80 \quad 3,30 \quad 5,65 \quad 2,25 \quad 2,50 \quad 3,10 \quad 2,75 \quad 3,50 \quad 2,70 \quad 3,00$**

**Çözüm** Değişken (X): Sürekli ve ölçme düzeyi en az sıralama

Hipotezler  $H_0: M = 3,5$ , ( $M_0 = 3,5$  verilmiş)

$H_1: M \neq 3,5$

$X_i$	$D_i = X_i - 3,5$	$\delta_i$	Test istatistiği ve örnekleme dağılımı
1,80	-1,70	0	$k = \sum_{i=1}^n \delta_i$ ve $H_0$ doğru iken $k \sim \text{Binom}(n = 9, p = \frac{1}{2})$ olup olasılık fonksiyonu $f(k) = \binom{9}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{9-k}$ , $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ Test istatistiğinin alabileceği değer $k_h = 1$ dir.
3,30	-0,20	0	
5,65	2,15	1	
2,25	-1,25	0	
2,50	-1,00	0	
3,10	-0,40	0	
2,75	-0,75	0	
3,50	0,00 işlem dışı	--	
2,70	-0,80	-	
3,00	-0,50	0	
		0	

**Karar:**  $\alpha = 0,01$  önem seviyesinde  $H_1$  hipotezine göre karar kuralı  $Pr\left(k \leq k_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$  ise (T9)'dan  $k_{\frac{\alpha}{2}} = 1$  için  $Pr(k \leq 1) = 0,0196 < 0,025$  ve  $k_\alpha = 2$  için  $Pr(k \leq 2) =$

$0,0899 > 0,0025$  bulunur. Yakınlık durumu dikkate alındığında  $k_{\frac{\alpha}{2}} = 1$  alınır.  $k_h = k_{\frac{\alpha}{2}}$  olduğundan  $H_0$  hipotezi ret edilir.

Veya  $H_1$  çift yönlü,  $E(k) = np = \frac{9}{2} = 4,5$  ve  $k_h = 1 < E(k) = 4,5$  olduğundan  $p = Pr(k \leq k_h) = Pr(k \leq 1) = 0,0196 < 0,0255 = \frac{\alpha}{2}$  olup  $H_0$  hipotezi ret edilir. Buna göre bu örnek, medyanı 3,5 birim olan kitleye ait değildir.

#### 4.2.1 Büyük Hacimli Örneklerde İşaret Testi

İşaret testinde örnek hacminin büyük olması özellikle  $n > 20$  iken test istatistiğinin örnekleme dağılımı kullanılarak olasılık hesaplamalarında işlem uzunluğu bakımından sıkıntılar ortaya çıkabilmektedir. Böyle durumlarda Binom dağılımının normal dağılıma yaklaşımından yararlanarak test istatistiğinin örnekleme dağılımını Binom dağılımından normal dağılıma taşımak mümkündür.

İşaret testinde  $H_0: M = M_0$  hipotezi doğru iken test istatistiğinin örnekleme dağılımı  $k \sim Binom(n, p = \frac{1}{2})$  olduğundan  $E(k) = \frac{n}{2}$  ve  $V(k) = \frac{n}{4}$  olup, merkezi limit teorisi gereğince yeterince büyük örnekler için  $k \sim N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$  olduğu bilinmektedir. Buna göre büyük örnek durumunda işaret testi için test istatistiği, Binom dağılımının kesikliği ve normal dağılımın sürekli olması nedeniyle uygulanacak olan süreklilik düzeltmesi ile birlikte

$$Z = \frac{(k \pm \frac{1}{2}) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sim N(0, 1) \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada düzeltme terimi  $(k \pm \frac{1}{2})$  olup, uygulanırken şu yol izlenir.

Eğer  $Pr(k \leq k_{\alpha}) = \alpha$  (Tek yönlü),  $Pr(k \leq k_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$  (Çift yönlü) ve  $p = Pr(k \leq k_h)$  ise  $k + \frac{1}{2}$  süreklilik düzeltmesi,

Eğer  $Pr(k \geq k'_{\alpha}) = \alpha$  (Tek yönlü),  $Pr(k \geq k'_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$  (Çift yönlü) ve  $p = Pr(k \geq k_h)$  ise  $k - \frac{1}{2}$  süreklilik düzeltmesi uygulanır.

**Örnek 4.8**  $H_0: M = 30$  hipotezini  $H_0: M > 30$  hipotezine karşı test etmek için tesadüfi olarak 40 birimlin bir örnek seçilmiştir. Sonra örnek birimleri üzerinde  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $D_i = X_i - 30$  farkları oluşturulmuştur. Bu farklardan 6'sının negatif işaretli ve 34'nünde pozitif işaretli olduğu görülmüştür. %5 önem seviyesinde test işlemi sonucunda  $H_0$  hipotezi hakkındaki kararınızı belirtiniz?

**Çözüm** Hipotezler  $H_0: M = 30$  ve  $H_0: M > 30$  şeklinde tek yönlüdür.

Test istatistiği ve örnekleme dağılımı; işaret testi için test istatistiği  $k = \sum_{i=1}^n \delta_i$  olup,  $n = 40 > 20$  olduğundan büyük örnek durumu söz konusudur. Bu sebeple test istatistiğinin örnekleme

dağılımı için Binom dağılımının normal dağılıma yaklaşımı uygulanır.  $H_0$  doğru iken  $k$  istatistiğinin beklenen değer ve varyansı sırasıyla;

$E(k) = n * p = 40 * \frac{1}{2} = 20$  ve  $V(k) = n * p * (1 - p) = 40 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 10$  olup, böylece  $k \sim N(20; 10)$  elde edilir. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri  $k_h = 34$  olup,  $k_h > E(k)$  olduğundan  $p = Pr(k \geq k_h) = Pr(k \geq 34) = Pr\left(Z > \frac{(34-20)-0.5}{\sqrt{10}}\right) = Pr(Z > 4.27) = 1 - Pr(Z < 4.27) = 1 - 0.9999 = 0.0001$  bulunur. Buna göre  $p < 0,05$  olduğundan  $H_0$  reddedilir.

### 4.3 WILCOXON İŞARETLİ SIRA SAYILARI TESTİ

Parametrik tekniklerden  $Z$  veya  $t$ -testinin alternatifi olan ve kitle medyan parametresi ile ilgili hipotezlerin test edilmesinde kullanılan bir parametrik olmayan tekniktir. İşaret testi ile aynı görevi yapmasına rağmen, işaret testine göre daha güçlüdür. Çünkü işaret testi örnek birimlerinin  $M_0$  reel sayısından farklarının sadece işaretlerini (yani negatif veya pozitif) olmasını dikkate alırken, Wilcoxon testi ise bu işaretlerin yanı sıra farkların mutlak büyüklüklerini de dikkate almaktadır. Bu sebeple örneğe ait daha fazla bilgi kullanmaktadır.

#### Varsayımları

- i) İlgilenilen değişken sürekli olmalıdır.
- ii) İlgilenilen değişken en az eş aralıklı ölçme düzeyine sahip olmalı
- iii) İlgilenilen değişken bakımından kitlenin dağılımı simetrik olmalı
- iv) Örnek birimleri medyanı bilinmeyen kitleden rastgele çekilmeli ve birbirinden bağımsız olmalı

#### Test İşleminin Algoritması

1) Hipotezler kurulur

$M$ : Örneğin çekildiği kitleye ait bilinmeyen medya parametresi ve  $M_0$ : herhangi bir reel sayı olmak üzere:

- |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $H_0: M = M_0$ | b) $H_0: M = M_0$ | c) $H_0: M = M_0$ |
| $H_1: M < M_0$    | $H_1: M > M_0$    | $H_1: M \neq M_0$ |

2) Medyanı  $M$  olan kitleden  $n$  birimlik bir örnek çekilir. Örnek birimleri  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olsun.

Örnek birimleri üzerinde  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $D_i = X_i - M_0$  olmak üzere  $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$

tesadüfi değişkenini tanımlayalım. Eğer  $D_i = 0$  sonucu ortaya çıkarsa bu sonucu veren gözlem/gözlemler işlem dışı tutulur. Bu durum örnek hacminin işlem dışı kalan gözlem sayısı kadar azalmasına sebep olur ve işleme yeni örnek hacmi ile devam edilir.

3)  $= 1, 2, \dots, n$  için  $D_i$ 'lerin mutlak değerleri alınarak,  $|D_i|$ 'lerin sayı-sıralı istatistikleri bulunur.  $|D_i|$  için sayı-sıralı istatistik değeri ;

$$r(|D_i|) = \sum_{j=1}^n s(|D_i| - |D_j|) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlıdır, burada

$$s(u) = \begin{cases} 1 & , \quad u \geq 0 \\ 0 & , \quad u < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

ile verilir. Bu işlemle  $|D_i|$ 'lere en küçükten başlayarak sıra sayıları verilmektedir. Eğer  $|D_i|$ 'ler içerisinde aynı değerli olanlar varsa onlara ortalama sıra sayısı, yani onlara verilmesi gereken sıra sayılarının ortalaması verilir.

4) Test istatistiği belirlenir ve  $H_0$  hipotezi doğru iken alabileceği değer örnekten hesaplanır.

Wilcoxon işaretli, sıra sayılar testi için test istatistiği:

$$T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i \quad (4.9)$$

olarak tanımlıdır. Test istatistiği  $D_i$  farklarının hepsi negatif olduğunda en küçük değerini ve bu farkların hepsi pozitif olduğunda da en büyük değerini alacaktır. Buna göre  $\forall i$  için  $D_i < 0$  ise  $\delta_i = 0$  olacağından  $Enk(T^+) = 0$  ve  $\forall i$  için  $D_i > 0$  ise  $\delta_i = 1$  olacağından  $Enb(T^+) = \frac{n(n+1)}{2}$  elde edilir. Böylece  $T^+$  istatistiğinin alabileceği değerler  $t = 0, 1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$  olup, örneklem dağılımı  $\frac{1}{2} \left( 0 + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{4}$  noktasına göre simetrik bir dağılım gösterir.  $H_0$  hipotezi doğru iken test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri  $T_h^+$  ile gösterilsin.

5) Karar kuralı belirlenir ve karar verilir.

$\alpha$  önem seviyesinde  $H_1$  hipotezine göre test istatistiğinin örneklem dağılımından yararlanarak kritik değer bulunur ve karar kuralı belirlenir.

**a)**  $H_1: M < M_0$  (tek yönlü) iken, yani örneklemin çekildiği kitlenin medyanı ( $M$ ),  $M_0$ 'dan küçükse, bu durumda örnekteki gözlemlerin büyük bir çoğunluğunun, en azından yarısından fazlasının  $M_0$ 'dan küçük çıkmasını ve buna bağlı olarak  $\delta_i$ 'lerin büyük bir çoğunluğunun sıfır değerini almasını ve böylece test istatistiğinin küçük bir değer almasını bekleriz. Buna göre test istatistiğinin örneklem dağılımından belirlenen kritik değer (sol kritik değer);

$$Pr(T^+ \leq d_\alpha) = \alpha \quad (4.10)$$

eşitliğini sağlayan  $d_\alpha$  (T10 tablosundan bulunur) olmak üzere, eğer  $T_h^+ \leq d_\alpha$  ise, (yani  $Pr(T^+ \leq T_h^+) = p$  olmak üzere  $p \leq \alpha$  ise)  $H_0$  ret edilir,  $T_h^+ > d_\alpha$  (veya  $p > \alpha$ ) ise  $H_0$  ret edilemez.

**b)**  $H_1: M > M_0$  (tek yönlü) iken, yani örneklemin çekildiği kitlenin medyanı ( $M$ ),  $M_0$ 'dan büyükse bu durumda örnekteki gözlemlerin büyük bir çoğunluğunun, en azından yarısından fazlasının  $M_0$ 'dan büyük çıkmasını ve buna bağlı olarak  $\delta_i$ 'lerin büyük bir çoğunluğunun bir



değerini almasını ve böylece test istatistiğinin büyük bir değer almasını bekleriz. Buna göre test istatistiğinin örneklem dağılımından belirlenen kritik değer (sağ kritik değer);

$$Pr(T^+ \geq d'_\alpha) = \alpha \quad (4.11)$$

eşitliğini sağlayan  $d'_\alpha$  olmak üzere, eğer  $T_h^+ \geq d'_\alpha$  ise, (yani  $Pr(T^+ \geq T_h^+) = p$  olmak üzere  $p \leq \alpha$  ise)  $H_0$  ret edilir,  $T_h^+ < d'_\alpha$  (veya  $p > \alpha$ ) ise  $H_0$  ret edilemez. Burada  $T^+$  istatistiğinin örneklem dağılımı simetrik olduğundan sağ kritik değer, T10 tablosundan bulunan sol kritik değer yardımıyla  $d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$  eşitliği ile elde edilir.

c)  $H_1: M \neq M_0$  (çift yönlü) iken, yani örneklemin çekildiği kitlenin medyanı ( $M$ ),  $M_0$ 'dan farklı ise bu durumda örnekteki gözlemlerin büyük bir çoğunluğunun, en azından yarısından fazlasının ya  $M_0$ 'dan küçük ya da  $M_0$ 'dan büyük çıkmasını ve buna bağlı olarak  $\delta_i$ 'lerin büyük bir çoğunluğunun ya sıfır değerini ya da bir değerini almasını ve böylece test istatistiğinin ya küçük bir değer ya da büyük bir değer almasını bekleriz. Buna göre test istatistiğinin örneklem dağılımından belirlenen kritik değerler (sol ve sağ kritik değerler) sırasıyla;

$$Pr\left(T^+ \leq d_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \text{ ve } Pr\left(T^+ \geq d'_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad (4.12)$$

eşitliklerini sağlayan  $d_{\frac{\alpha}{2}}$  ve  $d'_{\frac{\alpha}{2}}$  olmak üzere, eğer  $T_h^+ \leq d_{\frac{\alpha}{2}}$  veya  $T_h^+ \geq d'_{\frac{\alpha}{2}}$  ise, (yani  $Pr(T^+ \leq T_h^+) = \frac{p}{2}$  veya  $Pr(T^+ \geq T_h^+) = \frac{p}{2}$  olmak üzere  $\frac{p}{2} \leq \alpha$  ise)  $H_0$  ret edilir,  $d_{\frac{\alpha}{2}} < T_h^+ < d'_{\frac{\alpha}{2}}$  (veya  $\frac{p}{2} > \alpha$ ) ise  $H_0$  ret edilemez. Burada sol kritik değer  $d_{\frac{\alpha}{2}}$  (T10) tablosundan, sağ kritik değer  $d'_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} - d_{\frac{\alpha}{2}}$  eşitliğinden elde edilir.

#### 4.3.1 SPSS'de Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları Testi

Spss'de Wilcoxon işaretli sıra sayılar testini uygulayabilmek için takip edilecek algoritmanın adımları şu şekilde verilebilir.

**1.Adım Variable View** sayfasında değişkenler ve özelliklerinin tanımlamaları yapılır. **Data View** sayfasında değişkenlere ait veriler girilir.

**2.Adım Analyze > Nonparametric Tests > One Sample...** yolu izlenerek **One-Sample Nonparametric Tests** ekranı açılır. Bu ekranda birinci satırda yer alan **Fields** seçeneği kullanılarak açılan görüntüde **Fields** bölümünde yer alan değişkenler listesinden ilgilenilen değişken seçilerek aktarma butonu aracılığı ile **Test Fields** işlem kutusuna aktarılır.

**3.Adım** Yine aynı ekranın birinci satırında bulunan **Settings** seçeneği kullanılarak açılacak olan görüntüde **Customize tests** seçeneği işaretlenir. Bu işaretleme ile aktif hale gelen test seçeneklerinin içerisinde **Compare median to hypothesized (Wilcoxon signed-rank test)** tercih edilir. **Hypothesized median** işlem kutusuna  $H_0$  hipotezinde yer alan  $M_0$  medyan değeri girilir.

**4.Adım Run** düğmesi tıklanarak işlem bitirilir ve sonuçlar çıktı sayfasında sunulur. Çıktı sayfasında sunulan **Hypothesis Test Summary** çıktısı üzerine Mouse'un sol tarafı ile çift tıklandığında test sonuçlarının özetlendiği tablo açılır. Bu tablodaki bilgiler değerlendirilir,

**5.Adım**  $\alpha$  önem seviyesinde  $H_1$  hipotezine göre karar kuralı belirlenir ve  $H_0$  hipotezi hakkında karar verilir.

Eğer  $H_1$  hipotezi tek yönlü ise (a ve b'de olduğu gibi) sonuç özet tablosunun son satırında bulunan **Asymptotic Sig. (2-sided test)** "Asimptotik önemlilik olasılığı (iki yönlü test için)" ifadesinin karşısındaki sayısal değer, önemlilik olasılığı olarak bilinen  $p$  olasılığının iki katıdır. Bu durumda  $p = (\text{sayısal değer}/2)$  olarak alınır ve  $\alpha$  önem seviyesi ile karşılaştırılır. Eğer  $p < \alpha$  ise  $H_0$  hipotezi ret edilir, eğer  $p \geq \alpha$  ise  $H_0$  hipotezi ret edilemez.

Eğer  $H_1$  hipotezi çift yönlü ise (c'de olduğu gibi)  $p = (\text{sayısal değer}/2)$  olmak üzere  $p < \frac{\alpha}{2}$  ise  $H_0$  hipotezi ret edilir,  $p \geq \frac{\alpha}{2}$  ise  $H_0$  hipotezi ret edilemez.

**Örnek 4.9** Bir ders için sınıf başarı notu medyanı hakkında bilgi edinebilmek için sınıftan bu dersi alan öğrenciler arasından rastgele olarak 8 öğrenci seçilmiş ve başarı notları aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Söz konusu ders için bu sınıfa ait başarı notu medyanın 60 puandan az olduğu %5 önem seviyesinde söylenebilir mi?

$X_i$  (Puan): 65 52 50 40 17 76 18 46

**Cözüm** Değişken (X): Başarı notu (puan)....Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit aralıklı

Hipotezler

$H_0: M = 60$  ( $M_0 = 60$  biliniyor)

$H_1: M < 60$

Test istatistiği:  $T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i$  olup, burada  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $D_i = X_i - 60$  ve  $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$  şeklinde tanımlıdır.

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$	$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$	Sonuç ve Karar Kuralı
62	2	2	1	1	1	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 6$ 'dır.
52	-8	8	2	0	0	
50	-10	10	3	0	0	
40	-20	20	6	0	0	$H_1$ hipotezine göre $Pr(T^+ \leq d_\alpha) = \alpha$ olmak üzere $T_h^+ \leq d_\alpha$ ise $H_0$ ret edilir $T_h^+ > d_\alpha$ ise $H_0$ ret edilemez
17	-43	43	8	0	0	
76	16	16	5	1	5	
18	-42	42	7	0	0	
46	-14	14	4	0	0	

Kritik değer:  $n = 8$  iken  $H_1$  tek yönlü olduğundan  $\alpha = 0,05$  için (T10) tablosundan

$$Pr(T^+ \leq 5) = 0,0391 < 0,05$$

$Pr(T^+ \leq 6) = 0,0547 > 0,05$  bulunur. Bu olasılıklardan ikincisi (0,0547),  $\alpha = 0,05$  önem seviyesine daha yakın olduğundan kritik değer  $d_\alpha = 6$  dır. Buna göre  $T_h^+ = d_\alpha$  olduğundan  $H_0$  ret edilir. Bu sonuca göre; bu sınıf için ilgili derse ait başarı notu medyanın 60 puandan az olduğu %95 güvenle söylenir.

**Spss Çözümü** Değişken (X): Başarı notu (puan)....Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit aralıklı

Hipotezler

$H_0: M = 60$  ( $M_0 = 60$  biliniyor)

$H_1: M < 60$

Test istatistiği:  $T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i$

Total n	8	<b>Sonuç ve Karar</b>
Test Statistic	6,000	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 6$ 'dır.
Standart Error	7,141	$H_1$ tek yönlü olduğundan $p = \frac{0,093}{2} = 0,0465$ ve $\alpha = 0,05$ iken $p < \alpha$ olduğundan $H_0$ ret edilir.
Standardized Test Statistic	-1,680	
Asymptotic Sig. (2-sided test)	0,093	

Bu sonuca göre; bu sınıf için ilgili derse ait başarı notu medyanın 60 puandan az olduğu %95 güvenle söylenir.

**Örnek 4.10** TRC1 bölgesinde (Gaziantep, Adıyaman ve Kilis) yıllara göre (2008-2017) istihdam oranları (%) aşağıdaki gibi tespit edilmiş. Bu bilgiye dayanarak bu bölgede istihdam oranına ait medyanın %37'den fazla olduğu %5 önem seviyesinde söylenebilir mi? (T.C. Sanayi ve Teknoloji Bakanlığı-GAP Bölge Kalkınma İdaresi Başkanlığı- İstatistiki Veriler)

Yıllar	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
İstihdam Oranı (%)	36,6	34,8	39,4	36,5	38,5	42,0	39,7	38,8	38,7	39,8

**Çözüm** Değişken (X): İstihdam oranı (%). ....Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit oranlama

Hipotezler

$H_0: M = 37$  ( $M_0 = \%37$  biliniyor)

$H_1: M > 37$

Test istatistiği:  $T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i$  olup, burada  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $D_i = X_i - 37$  ve  $\delta_i = \begin{cases} 1 & , D_i > 0 \\ 0 & , D_i < 0 \end{cases}$  şeklinde tanımlıdır.

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$	$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$	Sonuç ve Karar Kuralı
36,6	-0,4	0,4	1	0	0	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 46$ 'dır. $H_1$ hipotezine göre $Pr(T^+ \geq d'_\alpha) = \alpha$ olmak üzere $T_h^+ \geq d'_\alpha$ ise $H_0$ ret edilir $T_h^+ < d'_\alpha$ ise $H_0$ ret edilemez $d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$
34,8	-2,2	2,2	6	0	0	
39,4	2,4	2,4	7	1	7	
36,5	-0,5	0,5	2	0	0	
38,5	1,5	1,5	3	1	3	
42,0	5	5	10	1	10	
39,7	2,7	2,7	8	1	8	
38,8	1,8	1,8	5	1	5	
38,7	1,7	1,7	4	1	4	
39,8	2,8	2,8	9	1	9	

Kritik değer:  $n = 10$  iken  $H_1: M > 37$  tek yönlü olduğundan  $\alpha = 0,05$  için (T10) tablosundan

$$Pr(T^+ \leq 10) = 0,0420 < 0,05$$

$Pr(T^+ \leq 11) = 0,0527 > 0,05$  bulunur. Bu olasılıklardan ikincisi (0,0527),  $\alpha = 0,05$  önem seviyesine daha yakın olduğundan  $d_\alpha = 11$  dir. Buna göre  $d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha = \frac{10 \cdot 11}{2} - 11 = 44$  ve böylece  $T_h^+ > d'_\alpha$  olduğundan  $H_0$  ret edilir. Bu sonuca göre; TRC1 bölgesinde yıllara göre istihdam oranına ait medyanın %37'den fazla olduğu söylenebilir.

**Spss Çözümü** Değişken (X): İstihdam oranı (%)...Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit oranlama

Hipotezler

$$H_0: M = 37 \quad (M_0 = \%37 \text{ biliniyor})$$

$$H_1: M > 37$$

$$\text{Test istatistiği: } T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i$$

Total n	10	<b>Sonuç ve Karar</b> Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 46$ 'dır. $H_1$ tek yönlü olduğundan $p = \frac{0,059}{2} = 0,0295$ ve $\alpha = 0,05$ iken $p < \alpha$ olduğundan $H_0$ ret edilir.
Test Statistic	46,00	
Standart Error	9,811	
Standardized Test Statistic	1,886	
Asymptotic Sig. (2-sided test)	0,059	

Bu sonuca göre; TRC1 bölgesinde yıllara göre istihdam oranına ait medyanın %37'den fazla olduğu söylenebilir.

**Örnek 4.11**  $H_0: M = 107$  hipotezini  $H_0: M \neq 107$  hipotezine karşı test etmek için medyanı  $M$  olan kitleden 13 birimlik bir örnek çekilmiştir. Örnek birimlerinin bir  $X$  değişkenine ait ölçüm değerleri aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Bu bilgiye dayanarak %5 önem seviyesinde  $H_0$  hipotezi hakkında kararınızı belirtiniz?

$X_i$ : 99 100 90 94 135 107 111 119 104 127 109 114 126

### Cözüm

Hipotezler

$H_0: M = 107$  ( $M_0 = 107$  biliniyor)

$H_1: M \neq 107$

Test istatistiği:  $T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i$  olup, burada  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $D_i = X_i - 107$  ve  $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$  şeklinde tanımlıdır.  $D_i = 0$  sonucu olursa, bu sonucu veren örnek birimi/birimleri işlem dışı tutulur ve örnek hacmi işlem dışı kalan gözlem sayısı kadar azalır.

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$	$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$	Sonuç ve Karar Kuralı
99	-8	8	6	0	0	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 48,5$ 'dir. $H_1$ hipotezine göre $Pr(T^+ \leq d_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$ ve $d'_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} - d_{\frac{\alpha}{2}}$ olmak üzere $T_h^+ \leq d_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $T_h^+ \geq d'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise $H_0$ ret edilir $d_{\frac{\alpha}{2}} < T_h^+ < d'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise $H_0$ ret edilemez Kritik değer: $n = 12$ iken $H_1$ çift yönlü olduğundan $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ için (T10) tablosundan
100	-7	7	4,5	0	0	
90	-17	17	9	0	0	
94	-13	13	8	0	0	
135	28	28	12	1	12	
107	0 İşlem	Dışı	----	--	---	
111	4	4	3	1	3	
119	12	12	7	1	7	
104	-3	3	2	0	0	
127	20	20	11	1	11	
109	2	2	1	1	1	
114	7	7	4,5	1	4,5	
126	19	19	10	1	10	

$$Pr(T^+ \leq 13) = 0,0212 < 0,025$$

$Pr(T^+ \leq 14) = 0,0261 > 0,025$  bulunur. Bu olasılıklardan ikincisi (0,0261),  $\frac{\alpha}{2} = 0,025$  önem seviyesine daha yakın olduğundan sol kritik değer  $d_{\frac{\alpha}{2}} = 14$  iken sağ kritik değer  $d'_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{12 \cdot 13}{2} - 14 = 64$  bulunur. Buna göre  $14 < 48,5 < 64$  yani  $d_{\frac{\alpha}{2}} < T_h^+ < d'_{\frac{\alpha}{2}}$  olduğundan  $H_0$  ret edilemez. Bu sonuca göre; mevcut örneğin çekildiği kitlenin medyanı %95 güvenle 107'ye eşittir.

### Spss Cözümü

Hipotezler

$H_0: M = 37$  ( $M_0 = \%37$  biliniyor)

$H_1: M > 37$

Test istatistiği:  $T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i$

Total n	13	<b>Sonuç ve Karar</b>
Test Statistic	48,5	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 48,5$ 'dir. $H_1$ çift yönlü olduğundan $p = \frac{0,456}{2} = 0,228$ ve $\alpha = 0,05$ iken $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ ve böylece $p > \frac{\alpha}{2}$ olduğundan $H_0$ ret edilemez. Bu sonuca göre; mevcut örneğin çekildiği kitlenin medyanı %95 güvenle 107'ye eşittir.
Standart Error	12,743	
Standardized Test Statistic	0,746	
Asymptotic Sig. (2-sided test)	0,456	

**Örnek 4.12**  $H_0: M = M_0$  hipotezini  $H_1: M > M_0$  hipotezine karşı Wilcoxon işaretli sıra sayılar testi ile test etmek için medyanı  $M$  olan bir kitleden  $n = 4$  birimlik bir rastgele örnek çekiliyor. Örnek birimleri  $X_1, X_2, X_3, X_4$  olsun. Buna göre:

- a) Test istatistiğinin örneklem dağılımını bulunuz?  
b) Test istatistiğinin beklenen değerini ve varyansını hesaplayınız?  
c)  $P(T^+ > 2)$ ,  $P(T^+ \leq 4)$  ve  $P(2 < T^+ < 6)$  olasılıklarını hesaplayınız?

**Çözüm a)** Test istatistiğinin örneklem dağılımını oluşturabilmek için önce test istatistiğinin kaç farklı durumda hesaplanabileceğini belirleyelim. Wilcoxon işaretli sıra sayıları içi test istatistiği  $T^+ = \sum_{i=1}^n r(|D_i|)\delta_i$  olup,  $i = 1, 2, 3, 4$  için  $D_i = X_i - M_0$  farklarından pozitif olanların sayısına göre kaç farklı durumda hesaplanabileceği belirlenir. Pozitif  $D_i$  farklarının sayısı  $t$  olmak üzere  $T^+$  istatistiğinin hesaplanabileceği farklı durumların sayısı  $n$  birimlik bir örnekte;

$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$  kadardır. Örnek hacmi  $n = 4$  iken bu sayı  $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$ 'dır. Eğer;

i) Bütün  $D_i < 0$  ise:  $\binom{4}{0} = 1$  farklı durum olup

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$	$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$
$X_1$	$-D_1$	$ D_1 $	1	0	0
$X_2$	$-D_2$	$ D_2 $	2	0	0
$X_3$	$-D_3$	$ D_3 $	3	0	0
$X_4$	$-D_4$	$ D_4 $	4	0	0
$T^+ = \sum_{i=1}^n r( D_i )\delta_i$					0

ii) Bir tane  $D_i > 0$  ve üç tane  $D_i < 0$  ise:  $\binom{4}{1} = 4$  farklı durum olup

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$	$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$
$X_1$	$D_1$	$ D_1 $	1	1	1
$X_2$	$-D_2$	$ D_2 $	2	0	0
$X_3$	$-D_3$	$ D_3 $	3	0	0
$X_4$	$-D_4$	$ D_4 $	4	0	0
$T^+ = \sum_{i=1}^n r( D_i )\delta_i$					1

iii) İki tane  $D_i > 0$  ve iki tane  $D_i < 0$  ise:  $\binom{4}{2} = 6$  farklı durum olup

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$						$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$					
$X_1$	$D1$	$ D_1 $	1	1	1	2	2	3	1	1	1	1	2	2	3
$X_2$	$D2$	$ D_2 $	2	3	4	3	4	4	1	2	3	4	3	4	4
$X_3$	$-D3$	$ D_3 $	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$X_4$	$-D4$	$ D_4 $	4	4	3	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0
$T^+ = \sum_{i=1}^n r( D_i )\delta_i$										3	4	5	5	6	7

iii) Üç tane  $D_i > 0$  ve bir tane  $D_i < 0$  ise:  $\binom{4}{3} = 4$  farklı durum olup

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$				$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$			
$X_1$	$D1$	$ D_1 $	1	1	1	2	1	1	1	1	2
$X_2$	$D2$	$ D_2 $	2	2	3	3	1	2	2	3	3
$X_3$	$D3$	$ D_3 $	3	4	4	4	1	3	4	4	4
$X_4$	$-D4$	$ D_4 $	4	3	2	1	0	0	0	0	0
$T^+ = \sum_{i=1}^n r( D_i )\delta_i$								6	7	8	9

iv) Bütün  $D_i > 0$  ise:  $\binom{4}{4} = 1$  farklı durum olup

$X_i$	$D_i$	$ D_i $	$r( D_i )$	$\delta_i$	$r( D_i )\delta_i$
$X_1$	$D1$	$ D_1 $	1	1	1
$X_2$	$D2$	$ D_2 $	2	1	2
$X_3$	$D3$	$ D_3 $	3	1	3
$X_4$	$D4$	$ D_4 $	4	1	4
$T^+ = \sum_{i=1}^n r( D_i )\delta_i$					10

Böylece  $T^+$  istatistiğinin örnekleme dağılımı:

$T^+ = t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Pr(T^+ = t)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

olarak bulunur.

**b) Test istatistiğinin beklenen değeri:**

$$E(T^+) = \sum_{t=0}^{10} t Pr(T^+ = t) = \frac{1}{16} [0 + 1 + 2 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 8 + 9 + 10] = 5 \text{ birim}$$

Test istatistiğinin varyansı:

$$V(T^+) = E(T^{+2}) - [E(T^+)]^2 = \sum_{t=0}^{10} t^2 Pr(T^+ = t) - [E(T^+)]^2 =$$

$$\frac{1}{16} [0 + 1 + 4 + 18 + 32 + 50 + 72 + 98 + 64 + 81 + 100] - (5)^2 = 7,5 \text{ birim}$$

$$\text{c) } P(T^+ > 2) = \sum_{t=3}^{10} Pr(T^+ = t) = Pr(T^+ = 3) + Pr(T^+ = 4) + \dots + Pr(T^+ = 10) = \frac{13}{16}$$

$$P(T^+ \leq 4) = \sum_{t=0}^4 Pr(T^+ = t) = Pr(T^+ = 0) + Pr(T^+ = 1) + Pr(T^+ = 2) + Pr(T^+ = 3) + Pr(T^+ = 4) = \frac{7}{16}$$

$$P(2 < T^+ < 6) = \sum_{t=3}^5 Pr(T^+ = t) = Pr(T^+ = 3) + Pr(T^+ = 4) + Pr(T^+ = 5) = \frac{6}{16}$$

bulunur.