T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

İST.616 ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK II
3. Hafta

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

SAMSUN 2020

3.3 Çok Değişkenli Normal Dağılıma Sahip İkiden Fazla Bağımsız Grubun Ortalama Vektörleri Yönünden Karşılaştırılması

Grup sayısı $g \geq 3$ ve değişken sayısı $p \geq 2$ olmak üzere her biri p değişkenli birbirinden bağımsız g tane grup verilsin. Bu grupların ortak (homojen) kovaryans matrisli olduğunu kabul edelim. $k = 1, 2, \dots, g$ için k-ncı grup $\underline{X}_k : p \times 1$vektörü ile gösterilsin ve $\underline{X}_k \sim N_p\left(\underline{\mu}_k, \Sigma\right)$ olsun.

AMAÇ: Bu grupları ortalama vektörleri yönünden karşılaştırmaktır.

Bu amaçla uygulanacak olan analize çok değişkenli tek faktör varyans analizi (MANOVA) adı verilir. Bu analizde bağımsız gruplar değişkenler vektörünü etkilediği düşünülen tek faktörün düzeyleridir. Çok değişkenli tek faktör varyans analizi için model denklemi:

$$\underline{X}_{ki} = \underline{\mu}_{..} + \underline{\tau}_k + \underline{\varepsilon}_{ki} \ , \ k = 1, 2, \dots, g; i = 1, 2, \dots, n_k \tag{3.19}$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$\underline{X}_{ki}$: Faktörün k-ncı düzeyinde (k-ncı grupta) i-nci birime ait gözlem vektörü

$\underline{\mu}_{..}$: Genel kitle ortalama vektörü

$\underline{\tau}_k$: Faktörün k-ncı düzeyinin bağımlı değişkenler vektörü üzerine etkisi ($\underline{\tau}_k = \underline{\mu}_{k.} - \underline{\mu}_{..}$ ve $\sum_{k=1}^{g} n_k \underline{\tau}_k = \underline{0}$)

$\underline{\varepsilon}_{ki}$: Faktörün k-ncı düzeyinde (k-ncı grupta) i-nci birime ait rastgele hata vektörü

<u>Hipotezler</u>

$$\begin{aligned} &H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \cdots = \underline{\tau}_g = \underline{0} && \left(veya\ \underline{\mu}_{1.} = \underline{\mu}_{2.} = \cdots = \underline{\mu}_{g.} = \underline{\mu}_{..}\right) \\ &H_1 : \exists\ \underline{\tau}_k \neq \underline{0} && \left(veya\ \exists \underline{\mu}_{k.}\ diğerlerinden\ farklı\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Bu hipotezleri test edebilmek için kullanılan belli başlı teknikler;

i) Wilks'in olabilirlik oran testi

ii) Roy'un en büyük özdeğer testi

iii) Hotelling –Lawley iz testi

iv) Pillai iz testi

Test istatistiklerinin elde edilebilmesi için her bir gruptan rastgele olarak n_k birimlik örnekler çekilir. k-ncı gruptan çekilen i-nci örnek birimi:

$$\underline{X}_{ki} = \begin{bmatrix} X_{1ki} \\ X_{2ki} \\ \vdots \\ X_{pki} \end{bmatrix} ; k = 1, 2, \dots, g; i = 1, 2, \dots, n_k \tag{3.21}$$

olmak üzere, veri düzeni Tablo 3.1'deki gibi verilebilir.

Tablo 3.1 Çok Değişkenli Tek Faktör Varyans Analizi Veri Düzeni

	I. Grup				**II. Grup**				**…**	**g. Grup**			
X_j	1	2	…	n_1	1	2	…	n_2		1	2	…	n_g
X_1	x_{111}	x_{112}	…	x_{11n_1}	x_{121}	x_{122}	…	x_{12n_2}	…	x_{1g1}	x_{1g2}	…	x_{1gn_g}
X_2	x_{211}	x_{212}	…	x_{21n_1}	x_{221}	x_{222}	…	x_{22n_2}	…	x_{2g1}	x_{2g2}	…	x_{2gn_g}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_p	x_{p11}	x_{p12}	…	x_{p1n_1}	x_{p21}	x_{p22}	…	x_{p2n_2}	…	x_{pg1}	x_{pg2}	…	x_{pgn_g}
$\underline{\overline{X}}_{k.}$	$\underline{\overline{X}}_{1.}$				$\underline{\overline{X}}_{2.}$				…	$\underline{\overline{X}}_{g.}$		$\underline{\overline{X}}_{..}$	
S_k	S_1				S_2				…	S_g		S	
W_k	W_1				W_2				…	W_g		$W = \sum_{k=1}^{g} W_k$	

$\underline{\overline{X}}_{k.} = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} \underline{X}_{ki}$; $k = \overline{1,g}$ $\left(\underline{\mu}_{k.}\text{ parametresinin EKK tahmin edicisi}\right)$… Faktörün k-ncı düzeyine (k-ncı gruba) ait örnek ortalama vektörü (3.22)

$\underline{\overline{X}}_{..} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k} \underline{X}_{ki} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{g} n_k \underline{\overline{X}}_{k.}$ veya $n_1 = n_2 = \cdots = n_g = n$ ise $\underline{\overline{X}}_{..} = \frac{1}{g}\sum_{k=1}^{g} \underline{\overline{X}}_{k.}$ $\left(\underline{\mu}_{..}\text{ parametresinin EKK tahmin edici}\right)$… Genel örnek ortalama vektörü (3.23)

$N = \sum_{k=1}^{g} n_k$ …Genel örnek hacmi

$\underline{\hat{\tau}}_k = \underline{\overline{X}}_{k.} - \underline{\overline{X}}_{..}$; $= \overline{1,g}$ $\left(\underline{\tau}_{k.}\text{ parametresinin EKK tahmin edicisi}\right)$ (3.24)

$S_k = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k.}\right)'$; $k = \overline{1,g}$ (Σ_k parametresinin EKK tahmin edicisi) … Faktörün k-ncı düzeyine (k-ncı gruba) ait örnek varyans kovaryans matrisi (3.25)

$W_k = (n_k - 1)S_k = \sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k.}\right)'$; $k = \overline{1,g}$ … Faktörün k-ncı düzeyine (k-ncı gruba) ait örnek kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (3.26)

$S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)}\sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)S_k = \frac{1}{N-g}\sum_{k=1}^{g} W_k$ (Gruplar için ortak kitle varyans kovaryans matrisi Σ parametresinin tahmin edicisi)… Örnek için ortak varyans kovaryans matrisi (3.27)

Test istatistiklerinin elde edilmesinde varyans analizinin temel denklemi olarak bilinen;

$GKT = GAKT + HKT$ denkleminden yararlanırız. Bu denklemin çok değişkenli analizde karşılığı GKÇTM=GAKÇTM+HKÇTM, yani "Genel kareler ve çarpımlar toplamı matrisi = Gruplar arası kareler ve çarpımlar toplamı matrisi + Hata kereler ve çarpımlar toplamı matrisi" denklemidir. Burada;

$T = \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{..}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{..}\right)' : p \times p$ ….(GKÇTM) (3.28)

$B = \sum_{k=1}^{g} n_k \left(\underline{\overline{X}}_{k.} - \underline{\overline{X}}_{..}\right)\left(\underline{\overline{X}}_{k.} - \underline{\overline{X}}_{..}\right)' : p \times p$… (GAKÇTM) (3,29)

$$W = \sum_{k=1}^{g} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k\,.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k\,.}\right)' : p \times p \ldots \text{(HKÇTM)} \tag{3.30}$$

olmak üzere, $T = B + W$ dir.

Yukarıda bahsedilen teknikler (3.20)'de verilen hipotezleri test etmek için kullanılacak olan test istatistiklerini bu matrisleri veya bu matrislere ait bilgileri kullanarak türetmektedirler.

i) Wilks'in Olabilirlik Oran Testi:

Bu yöntem; $\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|}$, $0 \leq \Lambda \leq 1$

olabilirlik oran istatistiği olmak üzere, test istatistiği olarak;

$$L = -\left[N - 1 - \frac{p+g}{2}\right] ln\Lambda \sim \chi^2_{p(g-1)} \tag{3.31}$$

veya

$$L = \left[N - 1 - (\Lambda)\frac{p+g}{2}\right] ln\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \sim \chi^2_{p(g-1)} \tag{3.32}$$

şeklinde tanımlıdır.

Karar: α önem seviyesinde kritik değer; $\chi^2_{p(g-1)\,;\,\alpha}$ olmak üzere, eğer;

$L > \chi^2_{p(g-1)\,;\,\alpha}$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $L \leq \chi^2_{p(g-1)\,;\,\alpha}$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

ii) Roy'un En Büyük Özdeğer Testi

Bu yöntem, λ_j , $(j = 1, 2, \ldots, p)$ ler BW^{-1} matrisinin özdeğerleri olmak üzere, test istatistiği olarak;

$$\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda} : 0 \leq \theta \leq 1 \tag{3.33}$$

istatistiği kullanılır. Burada $\lambda = Enb\{\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$'dır. $\hat{\theta}$: Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri olsun. $\hat{\theta}$ istatistiğinin örneklem dağılımından yararlanarak oluşturulan kritik değerler tablosundan (Tablo A.10) α önem seviyesinde ve

$$s = min(g - 1\,, p),\ m = \frac{(|g-p-1|-1)}{2}\,,\ \tilde{n} = \frac{(N-p-g-1)}{2} \tag{3.34}$$

parametrelerine göre belirlenecek olan kritik değer $\theta_t = \theta_{s;m;\,\tilde{n}\,:\alpha}$ olmak üzere $\hat{\theta} > \theta_t$ ise H_0 ret edilir, $\hat{\theta} \leq \theta_t$ ise H_0 ret edilemez.

iii) Hotelling-Lawley İz Testi

Bu yöntemde λ_j , $(j = 1, 2, \ldots, p)$ ler BW^{-1} matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$T_0^2 = \sum_{j=1}^{P} \lambda_j = \text{İz}(BW^{-1}) \tag{3.35}$$

istatistiği test istatistiği olarak kullanılır. Bu istatistiğin örnekleme dağılımı;

$$HL = NT_0^2 \sim \chi^2_{p(g-1)} \tag{3.36}$$

veya

$$F = \frac{p(N-p-1)+2}{p^2(g-1)} T_0^2 \sim F_{p^2(g-1);\, p(N-p-1)+2} \tag{3.37}$$

şeklindedir. α önem seviyesinde kritik değerler $\chi_t^2 = \chi^2_{p(g-1):\ \alpha}$ veya $F_t = F_{p^2(g-1);\, p(N-p-1)+2;\alpha}$ olmak üzere, eğer;

$HL > \chi_t^2$ veya $F > F_t$ ise H_0 ret edilir, $HL \leq \chi_t^2$ veya $F \leq F_t$ ise H_0 ret edilemez.

iv) Pillai İz Testi

Bu yöntemde λ_j , $(j = 1, 2, \dots, p)$ ler BW^{-1} matrisinin sıfırdan büyük özdeğerleri olmak üzere;

$$T = \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j}{1+\lambda_j} \tag{3.38}$$

istatistiği kullanılır. T istatistiğinin örnekleme dağılımı için;

$$F = \frac{2\tilde{n}+s+1}{2m+s+1} \times \frac{T}{s-T} \sim F_{s(2m+s+1);s(2\tilde{n}+s+1)} \tag{3.39}$$

olduğu bilinmektedir. . α önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{s(2m+s+1);\, s(2\tilde{n}+s+1)\,;\alpha}$ olmak üzere, eğer;

$F > F_t$ ise H_0 ret edilir, $F \leq F_t$ ise H_0 ret edilemez.

Yorum: H_0 kabul edildiğinde grupların ortalama vektörlerinin birbirine eşit olduğunu, yani faktör düzeylerinin bağımlı değişkenler vektörü üzerine etkilerinin önemsiz olduğu söylenir. Her bir düzey aynı etkiyi yapmaktadır.

H_0 ret edildiğinde ise en az bir faktör düzeyinin etkisinin diğerlerinden farklı olduğu söylenir.

Bu durumda farklılığın kaynakları (hangi gruplar arasında ve hangi değişkenler yönünden) araştırılabilir. Bu amaçla $\underline{a} \sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k$ parametresi için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı kullanılır. Burada;

$\underline{a} = [0 \ \ \dots \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0]: 1 \times p$ (j-nci bileşeni "1" diğer bileşenleri "0" seçerek oluşturulur), bu vektör karşılaştırılacak olan değişkenler için kullanılır $(j = 1, 2, \dots, p)$.

$c_k \in \underline{C}$ öyle ki $\underline{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_g \end{bmatrix} = [0 \ \ \dots 1 \ \ \dots -1 \ \ \dots \ \ 0] : 1 \times g$ (k-ncı bileşen "1" ve l-nci bileşen "-1" ve diğer bileşenler "0" seçilerek oluşturulur), karşılaştırılacak gruplar için kullanılır $(k \neq l = 1, 2, \dots g)$. Ayrıca $\sum_{k=1}^{g} c_k = 0$ olmasına dikkat edilmelidir.

Bu seçimlere göre $\underline{a} \sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k$ parametresi;

$\underline{a} \sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}\left(\underline{\tau}_k - \underline{\tau}_l\right) = \underline{a}\left[\underline{\mu}_{k.} - \underline{\mu}_{l.}\right] = \mu_{jk} - \mu_{jl}$; $j = \overline{1,p}; k \neq l = \overline{1,g}$ olup, test edilecek hiotezler;

$H_0 : \mu_{jk} - \mu_{jl} = 0 \ j = \overline{1,p}; k \neq l = \overline{1,g}$

$$H_1 : \mu_{jk} - \mu_{jl} \neq 0 \tag{3.40}$$

şeklinde oluşturulur. Toplam test edilecek olan hipotez sayısı $p\binom{g}{2}$ kadardır. Güven aralığı;

$$P\left[\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k - \sqrt{\theta_t}\sqrt{\underline{a}\,W\,\underline{a}'\left(\sum_{k=1}^{g}\frac{c_k^2}{n_k}\right)} \le \underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k \le \underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k + \sqrt{\theta_t}\sqrt{\underline{a}\,W\,\underline{a}'\left(\sum_{k=1}^{g}\frac{c_k^2}{n_k}\right)}\right] = 1-\alpha \tag{3.41}$$

bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsıyorsa H_0 kabul edilir ve böylece $X_j\,;(j=1,2,\ \ p)$ değişkeni bakımından k-ncı ve l-nci gruplar arasında fark yoktur. Güven aralığı sıfırı kapsamıyorsa H_0 ret edilir, buna göre $X_j\,;(j=1,2,\ \ p)$ değişkeni bakımından k-ncı ve l-nci gruplar arasında farkvardır.

Örnek 3.5 Bir araştırmacı üç farklı hastalık grubundaki (Kronik Hepatit, Siroz ve Malignite) hastaların β-fonksiyonlarını (ü/l) ve albüminlerini (gr/dl) ölçmüştür. Bu ölçümlerin gruplara (hastalık türlerine) göre değişip değişmediğini öğrenmek istemektedir. Her bir gruba ait dağılımlar $N_2\left(\underline{\mu}_{k\,.}\,,\ \Sigma\right),(k=1,2,3)$ olduğu varsayılmıştır. Her gruptan 15 hasta üzerinde elde edilen ölçümler aşağıdadır. Buna göre;

a) Bu problemin çözümü için uygun olan istatistiksel analizi ve model denklemini belirleyiniz.

b) Gruplara (hastalık türlerine) göre kitle ortalama vektörleri arasında fark olup olmadığına

i) Wilks'in olabilirlik oran testi ile

ii) Hotelling-Lawley İz testi ile

iii) Roy'un en büyük özdeğer testi ile

iv Pillai İz testi ile

%5 önem seviyesinde karar veriniz.

c) Gruplar arasında farklılık varsa, bu farklılığın hangi değişken yönünden hangi gruplar arasında ortaya çıktığını belirleyiniz.

HASTALIK TÜRLERİ (GRUPLAR)					
Kronik Hepatit		**Siroz**		**Malignite**	
$X_1(\beta-fonk)$	$X_2(Alb\ddot{u}min$	$X_1(\beta-fonk)$	$X_2(Alb\ddot{u}min$	$X_1(\beta-fonk)$	$X_2(Alb\ddot{u}min)$
21	5,0	11	3,0	17	0,8
16	5,1	13	4,3	15	1,3
15	4,5	14	3,4	17	2,2
19	4,7	10	1,8	18	2,7
18	2,8	9	2,2	17	1,9
13	5,3	12	2,7	16	1,4
16	4,7	10	2,5	14	2,6
14	4,5	8	3,1	16	1,0
17	3,6	12	2,8	17	1,5
16	3,8	11	2,2	15	0,7
19	2,7	14	1,5	19	0,4
15	3,8	9	1,6	19	1,4
17	3,5	13	1,7	14	1,5
17	5,0	11	1,4	16	1,7
16	3,1	10	1,9	13	1,0

Çözüm: a) Bağımlı değişkenler…

X_1: Beta fonksiyon değeri $(\beta - \text{ü}/l)$… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

X_2: Albümin değeri (gr/dl)… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama, olmak üzere değişkenler vektörü $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ olacaktır.

Faktör (Bağımsız değişken): Hastalık türü…. Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

Faktör Düzeyleri… $\begin{cases} Kronik\ Hepatit\ (I.Grup) \ldots \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}_{1.}, \Sigma\right) \\ Siroz\ (II.Grup) \ldots \underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}_{2.}, \Sigma\right) \\ Malignite\ (III.Grup) \ldots \underline{X}_3 = \begin{bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}_{3.}, \Sigma\right) \end{cases}$ Gruplar bağımsız ve homojen kovaryans matrislidir. Bu açıklamalar göre problemin çözümü için uygun olan istatistiksel analiz, çok değişkenli tek faktör varyans analizidir. Bu analiz için model denklemi; Eşitlik (3.19)'dan

$\underline{X}_{ki} = \underline{\mu}_{..} + \underline{\tau}_k + \underline{\varepsilon}_{ki}$, $k = 1,2,3; i = 1,2,\ldots,n_k; (g = 3; p = 2)$

şeklindedir. Burada , $k = 1,2,3$ için $\underline{\tau}_k = \underline{\mu}_{k.} - \underline{\mu}_{..}$ dür.

b) Test edilecek hipotezler

$H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \underline{\tau}_3 = \underline{0} \quad \left(veya\ \underline{\mu}_{1.} = \underline{\mu}_{2.} = \underline{\mu}_{3.} = \underline{\mu}_{..}\right)$

$H_1 : \exists\ \underline{\tau}_k \neq \underline{0} \quad \left(veya\ \exists\ \underline{\mu}_{k.}\ diğerlerinden\ farklı\right)$

i) Wilks'in olabilirlik oran testi ile

Test istatistiği; $L = -\left[N - 1 - \frac{p+g}{2}\right] ln\Lambda \sim \chi^2_{p(g-1)}$

$N = \sum_{k=1}^{g} n_k = n_1 + n_2 + n_3 = 15 + 15 + 15 = 45$

$\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|}$, $0 \leq \Lambda \leq 1$

$W = \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k.}\right)' = W_1 + W_2 + W_3 = \begin{bmatrix} 151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095 \end{bmatrix}$

$B = \sum_{k=1}^{g} n_k\left(\underline{\overline{X}}_{k.} - \underline{\overline{X}}_{..}\right)\left(\underline{\overline{X}}_{k.} - \underline{\overline{X}}_{..}\right)'$; $\underline{\overline{X}}_{k.} = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki}$, $k = 1,2,3$; $\underline{\overline{X}}_{1.} = \begin{bmatrix} 16{,}6 \\ 4{,}14 \end{bmatrix}$; $\underline{\overline{X}}_{2.} = \begin{bmatrix} 11{,}133 \\ 2{,}407 \end{bmatrix}$; $\underline{\overline{X}}_{3.} = \begin{bmatrix} 16{,}2 \\ 1{,}473 \end{bmatrix}$ ve ise $\underline{\overline{X}}_{..} = \frac{1}{g}\sum_{k=1}^{g}\underline{\overline{X}}_{k.} = \frac{1}{3}\left\{\underline{\overline{X}}_{1.} + \underline{\overline{X}}_{2.} + \underline{\overline{X}}_{3.}\right\} = \begin{bmatrix} 14{,}644 \\ 2{,}673 \end{bmatrix}$

$B = 15\left\{\begin{bmatrix} 1{,}956 \\ 1{,}467 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1{,}956 & 1{,}467 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3{,}511 \\ -0{,}266 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3{,}511 & -0{,}266 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}556 \\ -1{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1{,}556 & -1{,}2 \end{bmatrix}\right\}$

$= \begin{bmatrix} 278{,}61 & 29{,}04 \\ 29{,}04 & 54.945 \end{bmatrix}$

$B + W = \begin{bmatrix} 278{,}61 & 29{,}04 \\ 29{,}04 & 54.945 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 430{,}343 & 27{,}347 \\ 27{,}347 & 81{,}04 \end{bmatrix}$

$|W| = \begin{vmatrix} 151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095 \end{vmatrix} = 3956{,}606386$;$|B + W| = \begin{vmatrix} 430{,}343 & 27{,}347 \\ 27{,}347 & 81{,}04 \end{vmatrix} = 34127{,}13831$

$\Lambda = \frac{3956,606386}{34127,13831} = 0,116 \Rightarrow L = -\left[45 - 1 - \frac{2+3}{2}\right] ln(0,116) = 89,398$

Kritik değer; $\alpha = 0,05$ için $\chi^2_{p(g-1);\,\alpha} = \chi^2_{4;0,05} = 9,488 \Rightarrow L = 89,398 > 9,488$ olduğundan H_0 ret edilir.

ii) Hotelling-Lawley İz Testi

Test istatistiği; $HL = NT_0^2 \sim \chi^2_{p(g-1)}$ veya $F = \frac{p(N-p-1)+2}{p^2(g-1)} T_0^2 \sim F_{p^2(g-1);\,p(N-p-1)+2}$

$N = 45; p = 2; g = 3$; $T_0^2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ ve λ_j'ler BW^{-1} matrisinin özdeğerleri

$W^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0066 & 0,0004 \\ 0,0004 & 0,0383 \end{bmatrix} \Rightarrow BW^{-1} = \begin{bmatrix} 1,8505 & 1,224 \\ 0,2137 & 2,1159 \end{bmatrix} \Rightarrow |BW^{-1} - \lambda I| = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 2,512$ ve $\lambda_2 = 1,455$

$T_0^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 3,967 = \text{İz}(BW^{-1}) \Rightarrow HL = 45 \times 3,967 = 178,515$

Kritik değer; $\alpha = 0,05$ için $\chi^2_{p(g-1);\,\alpha} = \chi^2_{4;0,05} = 9,488 \Rightarrow HL = 178,515 > 9,488$ olduğundan H_0 ret edilir.

iii) Roy'un Enbüyük Özdeğer Testi

Test istatistiği;

$\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda}$: $0 \leq \theta \leq 1$; $\lambda = Enb\{\lambda_1\,,\ \lambda_2\} = Enb\{2,512; 1,455\} = 2,512$ olmak üzere, test istatistiğinin alabileceği değer $\hat{\theta} = \frac{2,512}{1+2,512} = 0,71526$ bulunur.

Kritik değer; $s = min(g-1, p) = min(2, 2) = 2$; $m = \frac{|g-p-1|-1}{2} = \frac{|3-2-1|-1}{2} = -\frac{1}{2} \cong 0$ alınır ve $\tilde{n} = \frac{N-g-p-1}{2} = \frac{45-3-2-1}{2} = 19,5 \cong 20$ ve $\alpha = 0,05$ iken

$\theta_t = \theta_{s\,;m;\,\tilde{n};\alpha} = \theta_{2;0;20:0,05} = 0,221$ olup, $\hat{\theta} = 0,71526 > 0,221 = \theta_t$ olduğundan H_0 ret edilir.

iv) Pillai İz Testi

Test istatistiği; $F = \frac{2\tilde{n}+s+1}{2m+s+1} \times \frac{T}{s-T} \sim F_{s(2m+s+1);s(2\tilde{n}+s+1)}$

$T = \sum_j \frac{\lambda_j}{1+\lambda_j}$ ve λ_j: BW^{-1} matrisinin özdeğerleri

$T = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{2,512}{1+2,512} + \frac{1,455}{1+1,455} = 1,308 \Rightarrow F = \frac{2\times 19,5+2+1}{2(-1/2)+2+1} \times \frac{1,308}{2-1,308} = 39,69$ bulunur.

$\alpha = 0,05$ iken $F_t = F_{4\,;84\,;0,05} \cong 2,48$ olur. Buna göre $F = 39,69 > 2,48 = F_t$ olduğundan H_0 ret edilir.

Yorum: Hastaların β fonksiyonları ve albümin değerleri üzerine hastalık türlerinin etkisi farklılık göstermektedir.

c) Hastalık türlerine göre kitle ortalama vektörleri farklılık gösterdiğinden, hangi değişken için hangi gruplar arasında farklılık ortaya çıktığını belirlemek için $\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k$ parametresi ile ilgili güven aralığından yararlanılır. Bu güven aralığı

$$P\left[\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k - \sqrt{\theta_t}\sqrt{\underline{a}\,W\,\underline{a}'\left(\sum_{k=1}^{g}\frac{c_k^2}{n_k}\right)} \le \underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k \le \underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k + \sqrt{\theta_t}\sqrt{\underline{a}\,W\,\underline{a}'\left(\sum_{k=1}^{g}\frac{c_k^2}{n_k}\right)}\right] = 1-\alpha$$

şeklindedir. Mümkün olan ikili karşılaştırmaların sayısı $p\binom{g}{2} = 2\binom{3}{2} = 6$ dır.

$\boldsymbol{X_1}$ ***değişkeni*** $(\boldsymbol{\beta - fonksiyon}$ ***değeri***$)$ ***için:*** $\underline{a} = [1 \quad 0]$: 1×2 $(p = 2\ olduğundan)$ seçilir.

i) I. Grup (Kronik Hepatit) ile II. Grup (Siroz) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_2) = \underline{a}\left(\underline{\mu}_{1.} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{2.} + \underline{\mu}_{..}\right) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\mu_{11}-\mu_{12}\\ \mu_{21}-\mu_{22}\end{bmatrix} = \mu_{11}-\mu_{12}$$

Hipotezler:

$H_0 : \mu_{11} = \mu_{12}$

$H_1 : \mu_{11} \neq \mu_{12}$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k = \underline{a}(\underline{\hat{\tau}}_1 - \underline{\hat{\tau}}_2) = \underline{a}\left(\underline{\overline{X}}_{1.} - \underline{\overline{X}}_{2.}\right) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\overline{X}_{11}-\overline{X}_{12}\\ \overline{X}_{21}-\overline{X}_{22}\end{bmatrix} = \overline{X}_{11}-\overline{X}_{12} = 16{,}6 - 11{,}133 = 5{,}467$$

$$\underline{a}\,W\,\underline{a}' = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}151{,}733 & -1{,}693\\ -1{,}693 & 26{,}095\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = w_{11} = 151{,}733$$

$$\sum_{k=1}^{g}\frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0{,}221$$

$$P\left(5{,}467 - \sqrt{0{,}221}\sqrt{151{,}733 \times \frac{2}{15}} \le \mu_{11} - \mu_{12} \le 5{,}467 + \sqrt{0{,}221}\sqrt{151{,}733 \times \frac{2}{15}}\right) = 0{,}95$$

$P(3{,}353 \le \mu_{11} - \mu_{12} \le 7{,}581) = 0{,}95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{11} = \mu_{12}$ hipotezi ret edilir. Böylece $\beta - fonksiyon$ değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Siroz grubu farklılık göstermektedir. Kronik Hepatit grubunun $\beta - fonksiyon$ değerleri daha yüksektir.

ii) I. Grup (Kronik Hepatit) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_3) = \underline{a}\left(\underline{\mu}_{1.} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{..}\right) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\mu_{11}-\mu_{13}\\ \mu_{21}-\mu_{23}\end{bmatrix} = \mu_{11}-\mu_{13}$$

Hipotezler:

$H_0 : \mu_{11} = \mu_{13}$

$H_1 : \mu_{11} \neq \mu_{13}$

$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k = \underline{a}(\underline{\hat{\tau}}_1 - \underline{\hat{\tau}}_3) = \underline{a}\left(\underline{\overline{X}}_{1.} - \underline{\overline{X}}_{3.}\right) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\overline{X}_{11} - \overline{X}_{13} \\ \overline{X}_{21} - \overline{X}_{23}\end{bmatrix} = \overline{X}_{11} - \overline{X}_{13} = 16{,}6 - 16{,}2 = 0{,}4$

$$\underline{a}\, W\, \underline{a}' = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = w_{11} = 151{,}733$$

$\sum_{k=1}^{g} \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15}$ ve $\theta_t = 0{,}221$

$$P\left(0{,}4 - \sqrt{0{,}221}\sqrt{151{,}733 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{11} - \mu_{13} \leq 0{,}4 + \sqrt{0{,}221}\sqrt{151{,}733 \times \frac{2}{15}}\right) = 0{,}95$$

$P(-1{,}714 \leq \mu_{11} - \mu_{13} \leq 2{,}514) = 0{,}95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsadığından $H_0 : \mu_{11} = \mu_{13}$ hipotezi ret edilemez. Böylece $\beta - fonksiyon$ değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Malignite grubu farklılık göstermemektedir.

iii) II. Grup (Siroz) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_2 - \underline{\tau}_3) = \underline{a}\left(\underline{\mu}_{2.} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{..}\right) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{22} - \mu_{23}\end{bmatrix} = \mu_{12} - \mu_{13}$$

Hipotezler:

$H_0 : \mu_{12} = \mu_{13}$

$H_1 : \mu_{12} \neq \mu_{13}$

$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k = \underline{a}(\underline{\hat{\tau}}_2 - \underline{\hat{\tau}}_3) = \underline{a}\left(\underline{\overline{X}}_{2.} - \underline{\overline{X}}_{3.}\right) = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\overline{X}_{12} - \overline{X}_{13} \\ \overline{X}_{22} - \overline{X}_{23}\end{bmatrix} = \overline{X}_{12} - \overline{X}_{13} = 11{,}133 - 16{,}2 = -5{,}067$

$$\underline{a}\, W\, \underline{a}' = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = w_{11} = 151{,}733$$

$\sum_{k=1}^{g} \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(0)^2}{15} + \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15}$ ve $\theta_t = 0{,}221$

$$P\left(-5{,}067 - \sqrt{0{,}221}\sqrt{151{,}733 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{12} - \mu_{13} \leq -5{,}067 + \sqrt{0{,}221}\sqrt{151{,}733 \times \frac{2}{15}}\right) = 0{,}95$$

$P(-7{,}181 \leq \mu_{12} - \mu_{13} \leq -2{,}953) = 0{,}95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{12} = \mu_{13}$ hipotezi ret edilir. Buna göre $\beta - fonksiyon$ değeri bakımından Siroz grubu ile Malignite grubu farklılık göstermektedir. Üstelik Malignite grubunun $\beta - fonksiyon$ değerleri daha yüksektir.

$\boldsymbol{X_2}$ ***değişkeni (Albümin değeri) için :*** $\underline{a} = [0 \quad 1]: 1 \times 2$ ($p = 2$ *olduğundan*) seçilir.

i) I. Grup (Kronik Hepatit) ile II. Grup (Siroz) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_2) = \underline{a}\left(\underline{\mu}_{1.} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{2.} + \underline{\mu}_{..}\right) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{21} - \mu_{22}\end{bmatrix} = \mu_{21} - \mu_{22}$$

Hipotezler:

$H_0 : \mu_{21} = \mu_{22}$

$H_1 : \mu_{21} \neq \mu_{22}$

$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k = \underline{a}(\underline{\hat{\tau}}_1 - \underline{\hat{\tau}}_2) = \underline{a}(\underline{\overline{X}}_{1.} - \underline{\overline{X}}_{2.}) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\overline{X}_{11} - \overline{X}_{12} \\ \overline{X}_{21} - \overline{X}_{22}\end{bmatrix} = \overline{X}_{21} - \overline{X}_{22} = 4{,}14 - 2{,}407 = 1{,}733$

$\underline{a}\, W\, \underline{a}' = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = w_{22} = 26{,}095$

$\sum_{k=1}^{g} \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} = \frac{2}{15}$ ve $\theta_t = 0{,}221$

$$P\left(1{,}733 - \sqrt{0{,}221}\sqrt{26{,}095 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq 1{,}733 + \sqrt{0{,}221}\sqrt{26{,}095 \times \frac{2}{15}}\right) = 0{,}95$$

$P(0{,}856 \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq 2{,}610) = 0{,}95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{21} = \mu_{22}$ hipotezi ret edilir. Böylece $Albümin$ değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Siroz grubu farklılık göstermektedir. Kronik Hepatit grubunun $Albümin$ değerleri daha yüksektir.

ii) I. Grup (Kronik Hepatit) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_3) = \underline{a}\left(\underline{\mu}_{1.} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{..}\right) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\mu_{11} - \mu_{13} \\ \mu_{21} - \mu_{23}\end{bmatrix} = \mu_{21} - \mu_{23}$$

Hipotezler:

$H_0 : \mu_{21} = \mu_{23}$

$H_1 : \mu_{21} \neq \mu_{23}$

$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k = \underline{a}(\underline{\hat{\tau}}_1 - \underline{\hat{\tau}}_3) = \underline{a}(\underline{\overline{X}}_{1.} - \underline{\overline{X}}_{3.}) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\overline{X}_{11} - \overline{X}_{13} \\ \overline{X}_{21} - \overline{X}_{23}\end{bmatrix} = \overline{X}_{21} - \overline{X}_{23} = 4{,}14 - 1{,}473 = 2{,}667$

$\underline{a}\, W\, \underline{a}' = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = w_{22} = 26{,}095$

$\sum_{k=1}^{g} \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15}$ ve $\theta_t = 0{,}221$

$$P\left(2{,}667 - \sqrt{0{,}221}\sqrt{26{,}095 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{21} - \mu_{23} \leq 2{,}667 + \sqrt{0{,}221}\sqrt{26{,}095 \times \frac{2}{15}}\right) = 0{,}95$$

$P(1{,}79 \leq \mu_{21} - \mu_{23} \leq 3{,}54) = 0{,}95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsadığından $H_0 : \mu_{21} = \mu_{23}$ hipotezi ret edilir. Buna göre $Albümin$ değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Malignite grubu farklılık göstermektedir. Üstelik Kronik Hepatit grubunun $Albümin$ değerleri daha yüksektir.

iii) II. Grup (Siroz) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_2 - \underline{\tau}_3) = \underline{a}\left(\underline{\mu}_{2.} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{..}\right) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{22} - \mu_{23}\end{bmatrix} = \mu_{22} - \mu_{23}$$

Hipotezler:

$H_0 : \mu_{22} = \mu_{23}$

$H_1 : \mu_{22} \neq \mu_{23}$

$$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k = \underline{a}(\underline{\hat{\tau}}_2 - \underline{\hat{\tau}}_3) = \underline{a}\left(\underline{\overline{X}}_{2.} - \underline{\overline{X}}_{3.}\right) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\overline{X}_{12} - \overline{X}_{13} \\ \overline{X}_{22} - \overline{X}_{23}\end{bmatrix} = \overline{X}_{22} - \overline{X}_{23} = 2{,}407 - 1{,}473 = 0{,}934$$

$$\underline{a}\, W\, \underline{a}' = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}151{,}733 & -1{,}693 \\ -1{,}693 & 26{,}095\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = w_{22} = 26{,}095$$

$$\sum_{k=1}^{g} \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(0)^2}{15} + \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0{,}221$$

$$P\left(0{,}934 - \sqrt{0{,}221}\sqrt{26{,}095 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{22} - \mu_{23} \leq 0{,}934 + \sqrt{0{,}221}\sqrt{26{,}095 \times \frac{2}{15}}\right) = 0{,}95$$

$P(0{,}057 \leq \mu_{22} - \mu_{23} \leq 1{,}811) = 0{,}95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{22} = \mu_{23}$ hipotezi ret edilir. Böylece $Albümin$ değeri bakımından Siroz grubu ile Malignite grubu farklılık göstermektedir. Üstelik Siroz grubunun $Albümin$ değerleri daha yüksektir.

Table A.10. Upper Critical Values for Roy's Test, $\alpha = .05$

Roy's test statistic is given by

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1},$$

where λ_1 is the largest eigenvalue of $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$. The parameters are

$$s = \min(\nu_H, p), \qquad m = \frac{|\nu_H - p| - 1}{2}, \qquad N = \frac{\nu_E - p - 1}{2}.$$

Reject H_0 if $\theta >$ table value.

N	m = 0	1	2	3	4	5	7	10	15
					$s = 2$				
5	.565	.651	.706	.746	.776	.799	.834	.868	.901
10	.374	.455	.514	.561	.598	.629	.679	.732	.789
15	.278	.348	.402	.446	.483	.515	.567	.627	.696
20	.221	.281	.329	.369	.404	.434	.486	.546	.620
25	.184	.236	.278	.314	.346	.375	.424	.484	.558
30	.157	.203	.241	.274	.303	.330	.376	.433	.507
40	.122	.159	.190	.218	.243	.266	.306	.359	.428
50	.099	.130	.157	.180	.202	.222	.259	.306	.370
60	.084	.110	.133	.154	.173	.191	.223	.266	.326
80	.064	.085	.103	.119	.135	.149	.176	.211	.263
120	.043	.058	.070	.082	.093	.104	.123	.150	.190
240	.022	.030	.036	.042	.048	.054	.065	.080	.103
					$s = 3$				
5	.669	.729	.770	.800	.822	.840	.867	.894	.920
10	.472	.537	.586	.625	.656	.683	.725	.770	.819
15	.362	.422	.469	.508	.541	.569	.616	.669	.730
20	.293	.346	.390	.427	.458	.486	.533	.589	.656
25	.246	.294	.333	.367	.397	.424	.470	.525	.594
30	.212	.255	.291	.322	.350	.375	.419	.473	.543
40	.166	.201	.232	.259	.283	.305	.345	.395	.462
50	.136	.167	.192	.216	.237	.257	.292	.339	.402
60	.116	.142	.164	.185	.204	.221	.254	.296	.355
80	.089	.109	.127	.144	.160	.174	.201	.237	.288
120	.061	.075	.088	.100	.111	.122	.142	.169	.209
240	.031	.039	.046	.052	.058	.064	.075	.090	.114

Table A.10. (*Continued*)

N	m = 0	1	2	3	4	5	7	10	15
					$s = 4$				
5	.739	.782	.813	.836	.854	.868	.889	.911	.933
10	.547	.601	.641	.674	.700	.723	.759	.798	.840
15	.431	.482	.523	.558	.587	.612	.654	.701	.756
20	.354	.402	.441	.474	.503	.529	.572	.623	.684
25	.301	.344	.380	.412	.440	.464	.507	.559	.624
30	.261	.301	.334	.364	.390	.414	.455	.507	.572
40	.207	.240	.269	.294	.318	.339	.377	.426	.490
50	.171	.199	.224	.247	.268	.287	.322	.367	.428
60	.145	.170	.193	.213	.232	.249	.280	.322	.380
80	.112	.132	.150	.167	.182	.196	.223	.259	.309
120	.077	.091	.104	.116	.127	.138	.158	.185	.226
240	.040	.047	.054	.061	.067	.073	.084	.100	.124
					$s = 5$				
5	.788	.821	.845	.863	.877	.888	.906	.924	.942
10	.607	.651	.685	.713	.735	.755	.786	.820	.857
15	.488	.533	.569	.599	.625	.648	.685	.728	.777
20	.407	.449	.485	.515	.542	.565	.604	.651	.708
25	.349	.388	.422	.451	.477	.500	.540	.588	.648
30	.305	.341	.373	.400	.425	.448	.487	.535	.597
40	.243	.275	.302	.327	.349	.370	.406	.453	.514
50	.202	.230	.254	.276	.296	.315	.348	.392	.451
60	.173	.197	.219	.238	.257	.274	.304	.345	.401
80	.134	.154	.171	.188	.203	.217	.243	.278	.329
120	.093	.107	.120	.132	.143	.154	.174	.201	.241
240	.048	.056	.063	.069	.076	.082	.093	.109	.134

(*continued*)

Table A.10. *(Continued)*

N	m = 0	1	2	3	4	5	7	10	15
				$s = 6$					
5	.825	.850	.869	.883	.895	.904	.918	.934	.949
10	.655	.692	.721	.744	.764	.781	.808	.838	.871
15	.537	.576	.608	.635	.658	.678	.711	.750	.795
20	.454	.491	.523	.551	.575	.596	.632	.676	.728
25	.392	.428	.458	.485	.509	.531	.568	.613	.669
30	.345	.378	.407	.433	.457	.478	.514	.560	.618
40	.278	.307	.333	.356	.378	.397	.432	.477	.536
50	.232	.258	.281	.302	.322	.340	.372	.414	.472
60	.200	.223	.243	.262	.280	.297	.327	.366	.421
80	.156	.174	.192	.208	.222	.236	.262	.297	.346
120	.108	.122	.134	.146	.157	.168	.188	.215	.255
240	.056	.064	.071	.078	.084	.090	.101	.118	.142
				$s = 7$					
5	.852	.872	.887	.899	.908	.917	.929	.941	.955
10	.695	.726	.750	.771	.788	.802	.826	.853	.882
15	.579	.613	.641	.665	.686	.704	.734	.769	.810
20	.494	.528	.557	.582	.604	.624	.657	.697	.745
25	.431	.463	.491	.516	.538	.558	.593	.635	.688
30	.381	.412	.439	.463	.485	.505	.540	.583	.638
40	.309	.337	.362	.384	.404	.423	.456	.499	.555
60	.224	.246	.266	.285	.302	.318	.347	.386	.439
80	.176	.194	.211	.226	.241	.255	.280	.314	.363
100	.145	.160	.175	.188	.200	.212	.235	.265	.310
200	.077	.085	.093	.101	.109	.116	.129	.148	.175
300	.052	.058	.064	.069	.074	.079	.089	.103	.125
500	.032	.036	.039	.042	.046	.049	.055	.064	.078
1000	.016	.018	.020	.022	.023	.025	.028	.033	.041

Table A.10. *(Continued)*

N	m = 0	1	2	3	4	5	7	10	15
				$s = 8$					
5	.874	.890	.902	.912	.920	.927	.937	.948	.959
10	.728	.754	.775	.793	.808	.821	.842	.865	.892
15	.615	.645	.670	.692	.710	.727	.754	.786	.824
20	.531	.561	.587	.610	.630	.648	.679	.716	.761
25	.466	.495	.521	.544	.565	.583	.616	.655	.705
30	.414	.443	.468	.491	.511	.530	.563	.603	.655
40	.339	.365	.388	.409	.428	.446	.478	.519	.573
60	.248	.269	.288	.306	.323	.338	.367	.404	.456
80	.195	.213	.229	.244	.259	.272	.297	.330	.378
100	.161	.176	.190	.203	.216	.228	.250	.279	.323
200	.086	.094	.103	.110	.118	.125	.138	.157	.185
300	.058	.065	.070	.076	.081	.086	.096	.109	.130
500	.036	.040	.043	.047	.050	.053	.059	.068	.081
1000	.018	.020	.022	.024	.025	.027	.030	.035	.042
				$s = 9$					
5	.891	.904	.914	.922	.929	.935	.944	.953	.963
10	.756	.778	.797	.812	.825	.837	.855	.876	.901
15	.647	.674	.696	.715	.732	.747	.771	.801	.835
20	.563	.591	.614	.635	.654	.670	.698	.733	.775
25	.497	.525	.549	.570	.589	.606	.636	.673	.720
30	.445	.471	.495	.516	.535	.552	.583	.622	.671
40	.366	.391	.413	.433	.451	.468	.499	.538	.590
60	.270	.291	.309	.326	.343	.358	.385	.421	.472
80	.214	.231	.247	.262	.276	.289	.313	.346	.392
100	.177	.192	.206	.219	.231	.242	.264	.293	.336
200	.095	.104	.112	.119	.127	.134	.147	.166	.194
300	.065	.071	.077	.082	.087	.092	.102	.115	.136
500	.040	.043	.047	.051	.054	.057	.063	.072	.086
1000	.020	.022	.024	.026	.028	.029	.032	.037	.044
				$s = 10$					
5	.905	.916	.924	.931	.937	.941	.949	.958	.967
10	.780	.799	.815	.829	.840	.851	.867	.886	.908
15	.675	.699	.719	.736	.751	.764	.787	.814	.846
20	.592	.617	.639	.658	.675	.690	.716	.748	.787
25	.526	.551	.573	.593	.611	.627	.655	.690	.734
30	.473	.497	.519	.539	.557	.573	.603	.639	.686
40	.392	.415	.436	.455	.473	.489	.518	.555	.605
60	.292	.311	.329	.346	.361	.376	.402	.438	.487
80	.232	.249	.264	.278	.292	.305	.329	.361	.406
100	.193	.207	.220	.233	.245	.256	.278	.306	.348
200	.104	.112	.120	.128	.135	.142	.156	.174	.202
300	.071	.077	.083	.088	.093	.098	.108	.122	.143
500	.044	.047	.051	.054	.058	.061	.067	.076	.090
1000	.022	.024	.026	.028	.030	.031	.034	.039	.047