T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

MATEMATİK I DERSİ

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

11. Hafta

BÖLÜM 4 TÜREV VE DİFERANSİYEL

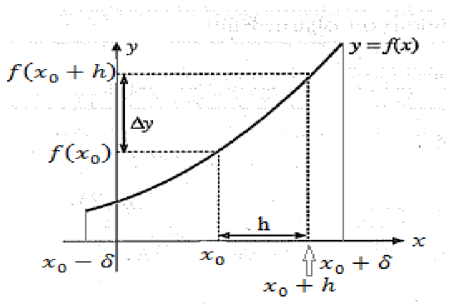
Matematikte bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğet doğrusunun eğimi, fizikte hız ve ivme, kimyada reaksiyon hızı, ekonomide marjinal gelir ve marjinal fiyat kavramları araştırıcılar için önemli kavramlardır. Bu kavramlar; bağımsız değişkene verilen bir artışın fonksiyonda meydana getireceği değişikliğin, değişkendeki artışa oranının limit durumu ile açıklanmaktadır. Söz konusu limit durumuna türev adı verilmektedir.

4.1 Türev ve Diferansiyel Tanımı

$y = f(x)$ fonksiyonu $x_0 \in IR$ noktasında ve bu noktanın bir $\delta > 0$ komşuluğunda tanımlı olsun. $h \neq 0$ olmak üzere x_0 noktasındaki değişken artışını h ile gösterelim. Komşuluk kümesi $K = (x_0 - \delta\, , x_0 + \delta)$ olmak üzere $x_0 + h \in K$ olup, x_0 noktasında h değişken artışına karşılık gelen fonksiyondaki değişim (fonksiyon artışı) Δy ile gösterilsin. Bu takdirde;

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{4.1}$$

olur. Şekil 4.1'de bu durum gösterilmektedir.



Şekil 4.1 Değişken artışı- Fonksiyon artışı

Şimdi;

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{4.2}$$

oranını ele alalım. Bu orana, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki değişim oranı denir. Belli bir x_0 değeri için farklar oranı h'ın bir fonksiyonudur ve $h = 0$ hariç, bütün h'lar için tanımlıdır.

Tanım 4.1 $A \subset IR, x_0 \in A$ ve $y = f(x), A$'da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer Eşitlik (4.2)'de verilen $\frac{\Delta y}{h}$ değişim oranının $h \to 0$ iken limiti varsa, bu limit değerine $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve $y'(x_0) = f'(x_0)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1'e göre;

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{4.3}$$

yazılır.

- Eğer Eşitlik (4.3) ile verilen limit varsa, $y = f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenebilir (diferansiyellenebilir) fonksiyon, bu limit yoksa ya da sonsuz ise $y = f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenemez (diferansiyellenemez) fonksiyon denir.

- Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu $(a\, , b)$ aralığında tanımlı ve bu aralığın her bir noktasında türevi varsa, o zaman $y = f(x)$ fonksiyonuna $(a\, , b)$ aralığında türevlenebilir (diferansiyellenebilir) fonksiyon denir ve bu durumda Eşitlik (4.3) $\forall x \in (a\, , b)$ için;

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4.4}$$

olarak ifade edilir.

- Eğer Eşitlik (4.3)'de $h = x - x_0$ alınırsa, $h \to 0$ iken $x \to x_0$ olacağından, $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi;

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.5}$$

eşitliği ile de verilebilir. Eşitlik (4.3) ve (4.5) aynı sonucu verir.

Örnek 4.1 $f(x) = 2x + 3$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları verilsin.

a) Bu fonksiyonlar için $x_0 \in IR$ noktasındaki değişim oranlarını bulunuz?

b) Bu fonksiyonlar için $x_0 \in IR$ noktasındaki türevlerini bulunuz?

c) Bu fonksiyonlar için tanım kümesi üzerinde türevlerini bulunuz?

Çözüm: a) Önce $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu için x_0 noktasındaki değişim oranını bulalım. Eşitlik (4.2) gereğince $h \neq 0$ olmak üzere x_0 noktasındaki değişim oranı;

$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{2(x_0+h)+3-(2x_0+3)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$ bulunur. Bu sonuca göre x_0 noktasındaki her $h \neq 0$ değişimi için değişim oranı sabit olup 2 dir.

Şimdi de $g(x) = x^2$ fonksiyonu için x_0 noktasındaki değişim oranını bulalım. Eşitlik (4.2) gereğince $h \neq 0$ olmak üzere x_0 noktasındaki değişim oranı;

$\frac{\Delta y}{h} = \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = 2x_0 + h$ bulunur. Bu sonuca göre x_0 noktasındaki her $h \neq 0$ değişimi için değişim oranı hem x_0 noktasına hem de h artışına bağlıdır.

b) Önce $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonun x_0 noktasındaki türevini bulalım. Bunu iki yolla bulmak mümkündür.

I.Yol: Eşitlik (4.3) kullanılır.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x_0+h)+3-(2x_0+3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0}(2) = 2$$

bulunur.

II.Yol: Eşitlik (4.5) kullanılır.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2x+3-(2x_0+3)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}(2) = 2$$

elde edilir.

Şimdi de $g(x) = x^2$ fonksiyonun x_0 noktasındaki türevini bulalım. Bunu da iki yolla bulmak mümkündür.

I.Yol: Eşitlik (4.3) kullanılır.

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)- g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h}$$

$= \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$ bulunur.

II.Yol: Eşitlik (4.5) kullanılır.

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)- g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}(x + x_0) =$$
$$x_0 + x_0 = 2x_0$$

elde edilir.

c) Önce $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunun tanım kümesi üzerinde türevini bulalım. $D_f = IR$ olup, keyfi bir $x \in IR$ alalım. Eşitlik (4.4)'e göre;

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)- f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0}(2) = 2$$

olup, $x \in IR$ keyfi seçildiğinden tanım kümesi üzerinde verilen fonksiyonun türevi; $f'(x) = 2$ dir.

Şimdi de $g(x) = x^2$ fonksiyonunun tanım kümesi üzerinde türevini bulalım. $D_g = IR$ olup, keyfi bir $x \in IR$ alalım. Eşitlik (4.4)'e göre;

$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)- g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = 2x$ elde edilir. $x \in IR$ keyfi seçildiğinden tanım kümesi üzerinde verilen fonksiyonun türevi; $g'(x) = 2x$ dir.

Tanım 4.2 $A \subset IR$ ve $f: A \to IR$ fonksiyonu $y = f(x)$ şeklinde tanımlı ve $x \in A$'da türevlenebilir olsun. Bu takdirde $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ olup,

$$dy = f'(x)dx$$

ifadesine f fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Örnek 4.2 $y = f(x) = 2x + 3$ ve $y = g(x) = x^2$ fonksiyonlarının diferansiyelini bulunuz?

Çözüm: $y = f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunun diferansiyeli; $dy = f'(x)dx$ olup, $f'(x) = 2$ olduğundan $dy = 2dx$ bulunur.

$y = g(x) = x^2$ fonksiyonunun diferansiyeli; $dy = g'(x)dx$ olup, $g'(x) = 2x$ olduğundan $dy = 2xdx$ bulunur.

4.2 Sağ ve Sol Taraflı Türevler

Tanım 4.3 $A \subset IR, x_0 \in A$ ve $y = f(x), A$'da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer Eşitlik (4.2)'de verilen değişim oranında $h \to 0^+$ (veya $x \to x_0^+$) iken $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)- f(x_0)}{h}$ (veya $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$)

limiti varsa, bu limit değerine x_0 noktasında $f(x)$ fonksiyonunun sağ taraflı türevi denir. Benzer şekilde Eşitlik (4.2)'de verilen değişim oranında $h \to 0^-$ (veya $x \to x_0^-$) iken $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)- f(x_0)}{h}$ (veya $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) limiti varsa, bu limit değerine x_0 noktasında $f(x)$ fonksiyonunun sol taraflı türevi denir. Ve x_0 noktasında sağ taraflı türev;

$$f'(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)- f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.6}$$

şeklinde gösterilirken, x_0 noktasında sol taraflı türev ise;

$$f'(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)- f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.7}$$

şeklinde gösterilir.

- Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu $A = (a\,,b)$ kümesinde tanımlı ise keyfi bir $x \in A$ için sağ ve sol taraflı türevler sırasıyla;

$$f'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)- f(x)}{h} \text{ ve } f'(x^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)- f(x)}{h} \tag{4.8}$$

eşitlikleri ile verilir.

Teorem 4.1 $f\colon (a\,,b) \to IR$fonksiyonu ve $x_0 \in (a\,,b)$ verilsin. Bu takdirde f fonksiyonunun x_0 noktasında türevinin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun x_0 noktasında sağ ve sol taraflı türevlerinin var ve birbirine eşit olmasıdır. Böylece $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ yazılır.

Sonuç 4.1 $[a\,,b]$ kapalı aralığında tanımlı olan bir f fonksiyonunun bu aralığın bütün iç noktalarında türevi varsa, ayrıca a noktasında sağdan ve b noktasında da soldan türevi varsa, o zaman f fonksiyonu $[a\,,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir (diferansiyellenebilir) bir fonksiyondur.

- Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi için; $f'(x), y'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ gösterimleri kullanılabilir. Fonksiyonun türeninin bulunması işlemine onun diferansiyellenmesi denir.

Örnek 4.3 $f(x) = x^3 + 2x$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki türevini bulunuz?

Çözüm: $f(x) = x^3 + 2x$ fonksiyonu için $D_f = IR$ ve $x_0 = 1 \in D_f$ dir. Bu durumda Eşitlik (4.5) gereğince;

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)- f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)- f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x-3}{x-1}$ ….$\frac{0}{0}$ belirsizliği var, pay kısmı çarpanlara ayrılır. Böylece;

$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x^2 + x + 3) = 5$ bulunur.

Örnek 4.4 Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümeleri üzerinde türevlerini bulunuz?

a) $f(x) = c$ (sabit fonk.) **b)** $f(x) = x$ **c)** $f(x) = x^2$ **d)** $f(x) = x^3$ **e)** $f(x) = sinx$

Çözüm a) $f(x) = c$, $D_f = IR$ olup, keyfi bir $x \in D_f$ noktasında değişken artışı $h \neq 0$ olsun. Bu değişken artışına karşılık fonksiyon artışı;

$\Delta y = f(x+h) - f(x)$ dir, burada $x + h \in D_f$ olduğundan

$= c - c = 0$ olacaktır. Buna göre $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(0) = 0$ bulunur.

❖ **Sabitin türevi sıfırdır.**

b) $f(x) = x$, $D_f = IR$ olup, keyfi bir $x \in D_f$ noktasında değişken artışı $h \neq 0$ olsun. Bu değişken artışına karşılık fonksiyon artışı;

$\Delta y = f(x+h) - f(x)$ dir, burada $x + h \in D_f$ olduğundan

$= x + h - x = h$ bulunur. Böylece $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(1) = 1$ elde edilir.

❖ **Birim (Özdeş) fonksiyonun türevi 1 dir.**

c) $f(x) = x^2$, $D_f = IR$ olup, keyfi bir $x \in D_f$ noktasında değişken artışı $h \neq 0$ olsun. Bu değişken artışına karşılık fonksiyon artışı;

$\Delta y = f(x+h) - f(x)$ dir, burada $x + h \in D_f$ olduğundan

$= (x+h)^2 - x^2 = h(2x+h)$ bulunur. Böylece;

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$ elde edilir.

d) $f(x) = x^3$, $D_f = IR$ olup, keyfi bir $x \in D_f$ noktasında değişken artışı $h \neq 0$ olsun. Bu değişken artışına karşılık fonksiyon artışı;

$\Delta y = f(x+h) - f(x)$ dir, burada $x + h \in D_f$ olduğundan

$= (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2)$ bulunur. Böylece;

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$ elde edilir.

❖ $\alpha \in IR$ olmak üzere $f(x) = x^\alpha$ ise, o zaman $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ dir.

e) $f(x) = sinx$, $D_f = IR$ olup, keyfi bir $x \in D_f$ noktasında değişken artışı $h \neq 0$ olsun. Bu değişken artışına karşılık fonksiyon artışı;

$\Delta y = f(x+h) - f(x)$ dir, burada $x + h \in D_f$ olduğundan

$= sin(x+h) - sinx$ ….(i) $\quad sin(a+b) = sinacosb + sinbcosa$

$\underline{-\ sin(a-b) = \mp sinacosb \pm sinbcosa}$

$sin(a+b) - sin(a-b) = 2sinbcosa \Rightarrow \begin{cases} a+b = x+h \\ a-b = x \end{cases}$

$\Rightarrow\ 2a = 2x + h\ \Rightarrow\ a = x + \frac{h}{2}$ ve $b = \frac{h}{2}$ olduğu dikkate alındığında (i) eşitliği ile verilen fonksiyon artışı;

$\Delta y = sin(x+h) - sinx = 2sin\left(\frac{h}{2}\right)cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ olur. Buna göre;

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2sin\left(\frac{h}{2}\right)cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = cosx\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}, \quad u = \frac{h}{2}$
dersek, $h \to 0$ iken $u \to 0$ olacağından;

$f'(x) = cosx\lim_{u\to 0}\frac{sinu}{u} = cosx \times 1 = cosx$ bulunur.

❖ $f(x) = sinx$ ise $f'(x) = cosx$ dir.

Örnek 4.5 Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktalarda türevinin varlığını inceleyiniz, varsa bulunuz?

a) $f: IR \to IR$
$x \to f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

b) $f: IR \to IR$
$x \to f(x) = 3x^2 + 4$, $x_0 = 1$

Çözüm $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 \in D_f$ noktasında türevinin var olması için gerek ve yeter şart sağ ve sol türevleri var ve birbirine eşit olmasıdır.

a) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x > 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$, $x_0 = 0, D_f = IR$ olup, $x_0 = 0 \in D_f$ dir.
$x_0 = 0$ noktasında sağ taraflı türev Eşitlik (4.6) gereğince;
$f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(1) = 1$ dir.
$x_0 = 0$ noktasında sol taraflı türev Eşitlik (4.7) gereğince;
$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$ dir.
Sonuç olarak $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ olduğundan $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında türevi yoktur. Ancak;

$f'(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ dır.
b) $f(x) = 3x^2 + 4$, $x_0 = 1$. $D_f = IR$ olup, $x_0 = 1 \in D_f$ dir.
$x_0 = 1$, noktasında sağ taraflı türev Eşitlik (4.6) gereğince;
$f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \Rightarrow \quad f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2+4-7}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{3(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)} =$
$3\lim_{x\to 1^+}(x+1) = 6$ olur.

$x_0 = 1$ noktasında sol taraflı türev Eşitlik (4.7) gereğince;
$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \Rightarrow \quad f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2+4-7}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{3(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)} =$
$3\lim_{x\to 1^-}(x+1) = 6$ olur.

Sonuç olarak $f'(1^+) = f'(1^-)$ olduğundan $f(x) = 3x^2 + 4$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasında türevi vardır ve $f'(1) = 6$ dır.

Teorem 4.2 $A \subset IR, x_0 \in A$ ve $f: A \to IR$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirse, bu noktada süreklidir. Ancak; bunun tersi doğru değildir. Yani x_0

noktasında sürekli olan bir fonksiyonun bu noktada türevi olmayabilir, fakat bu noktada sağ ve sol taraflı türevleri olabilirde, olmayabilirde.

İspat: $A \subset IR, x_0 \in A$ ve $f: A \to IR$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir olsun. Bu takdirde $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ şeklinde tanımlanan bir $g: A \setminus \{x_0\} \to IR$ fonksiyonunun x_0 noktasında limiti vardır. Bu limit $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ dır. Şimdi $g(x)$ fonksiyonundan $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x)$ yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının $x \to x_0$ iken limiti alınırsa;

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x_0) + (x - x_0)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \times \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$= f(x_0) + 0 \times f'(x_0) = f(x_0)$ bulunur. Yani $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ olup, bu ise f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması demektir.

Soru: Örnek 4.5(a)'de verilen $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında türevinin olmadığı gösterildi. Bu fonksiyonun verilen noktada sürekli olup olmadığını gösteriniz?

Örnek 4.6 a) $y = f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 1 \\ 1 & , x \le 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasında türevini inceleyiniz, varsa bulunuz?

b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında türevini inceleyiniz, varsa bulunuz?

Çözüm a) $y = f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 1 \\ 1 & , x \le 1 \end{cases}$ fonksiyonu ve $x_0 = 1$ noktası veriliyor. $D_f = IR$ olmasına rağmen $x_0 = 1$ noktasından geçişte fonksiyonun tanımlaması değiştiğinden bu noktada türev incelemesi sağ ve sol taraflı türevler ile yapılır. Sağ taraflı türev;

$$f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)} = 2 \text{ dir.}$$

Sol taraflı türev;

$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{0}{(x-1)} = 0 \text{ dır.}$$

Sonuç olarak $f'(1^+) \ne f'(1^-)$ olduğundan verilen fonksiyonun $x_0 = 1$ noktasında türevi yoktur.

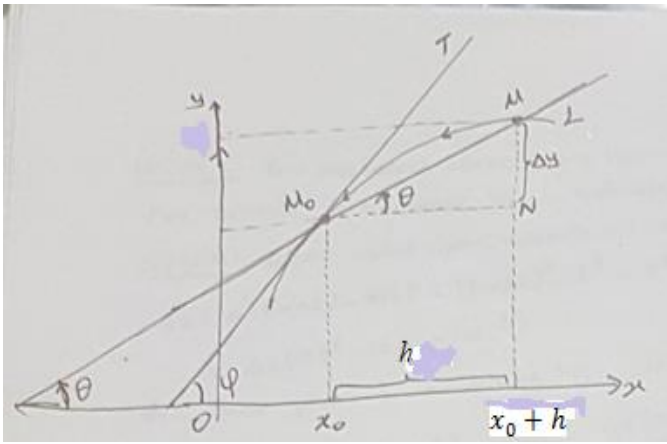
b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonu ve $x_0 = 0$ noktası veriliyor. $D_f = IR$ olduğundan, fonksiyon tanım kümesi üzerinde ve böylece $x_0 = 0$ noktasında süreklidir. Bu sebeple $x_0 = 0$ noktasında türev incelemesi Tanım 4.1'e göre yapılır.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h} =$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$ bulunur. Ayrıca $f'(0^+) = f'(0^-) = \infty$ dur.

- ❖ Bir noktada sürekli bir fonksiyonun bu noktada türevi ve tek taraflı türevleri sonsuz olabilir.

4.3 Türevin Geometrik Anlamı



Şekil 4.2 Türevin geometrik anlamı

L eğrisi herhangi bir aralıkta sürekli $y = f(x)$ fonksiyonu ile verilsin. Bu eğri üzerinde apsisleri sırasıyla x_0 ve $x_0 + h, (h \neq 0)$ olan $M_0\big(x_0 , f(x_0)\big)$ ve $M\big(x_0 + h , f(x_0 + h)\big)$ noktalarından geçen doğruyu çizelim. M noktası, L eğrisi boyunca M_0 noktasına yaklaştığında (yani $h \to 0$ iken) M_0M doğrusu da M_0T limit doğrusuna dönüşür. Bu M_0T doğrusuna M_0 noktasında L eğrisinin teğetiveya teğet doğrusu denir.

$|M_0N| = h$ ve $|MN| = \Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ olup, buna göre;

$tan\theta = \frac{|MN|}{|M_0N|} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ yazılabilir, bu ifade M_0M doğrusunun eğimidir. M_0M doğrusunun limit durumu olan M_0T doğrusunun denklemini bulmak için bu doğrunun eğimini bulmalıyız. Bu eğim; $h \to 0$ iken $\theta \to \varphi$ yaklaşacağından;

$$tan\varphi = \lim_{h\to 0} tan\theta = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \tag{4.9}$$

dir. Buna göre geometrik anlamda türev, bir eğriye üzerinde verilen bir noktadan çizilen teğet doğrusunun eğimidir. Eğimi ve geçtiği nokta bilinen bir doğrunun denklemi olarak teğet doğrusunun denklemi;

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{4.10}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan eğrinin verilen $M_0\big(x_0 , f(x_0)\big)$ noktasından geçip, bu noktadaki teğet doğrusuna dik olan doğruya eğrinin bu noktadaki normali denir ve normalin eğimi m_n olmak üzere $m_n \times f'(x_0) = -1$ olacağından $m_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$ dır. Böylece normalin denklemi ise;

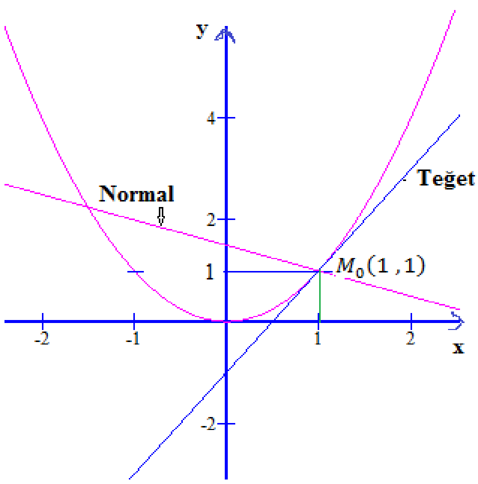
$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{4.11}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.7 $y = f(x) = x^2$ parabolüne $M_0(1 , 1)$ noktasında çizilen teğet doğrusunun ve normalinin denklemlerini bulunuz?

Çözüm: Fonksiyonun grafiği ile $M_0(1\,,1)$ noktasında çizilen teğet doğrusu ile normali Şekil 4.3' görülmektedir. $x_0 = 1$ noktasında $h \neq 0$ değişken artışına karşılık gelen fonksiyon artışı
$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = f(1+h) - f(1) = (1+h)^2 - 1 = 1 + 2h + h^2 - 1 = h(2+h)$

olup, teğet doğrusunun eğimi Eşitlik (4.9) gereğince



Şekil 4.3 $y = x^2$ parabolü için teğet ve normal doğrular

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} \Rightarrow\; f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = 2$ dir.
Teğet doğrusunun denklemi ise Eşitlik (4.10)'a göre;
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$
$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 2(x-1)) \Rightarrow$
$y = 2x - 1$ bulunur.
Normalin denklemi ise Eşitlik (4.11)'e göre;
$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow$
$y = f(1) - \frac{1}{f'(1)}(x-1) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)) \Rightarrow$
$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ bulunur.

4.4 Türev ve Diferansiyel Hesabında Genel Kurallar

Teorem 4.3 $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları x noktasında ve bu oktanın herhangi bir komşuluğunda türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

i) $[f(x) \mp g(x)]' = f'(x) \mp g'(x)$

ii) $[f(x) \times g(x)]' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$

iii) $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{g^2(x)}$

iv) c bir sabit olmak üzere $[cf(x)]' = cf'(x)$
dir.

Örnek 4.8 Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz?

a) $y = x^2 sinx$ **b)** $y = 3x^2 + 2x - 3$ **c)** $g(t) = 2t^2 - 3t + 5$ **d)** $f(y) = y^2 + \frac{2}{y}$
e) $y = \frac{3x^2+2x+1}{x^2+1}$ **f)** $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 2)(x^2 + 1)$ **g)** $f(x) = x^4 sinx$
h) $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$
Çözüm: a) $y = x^2 sinx \;\Rightarrow\; y' = (x^2 sinx)' = (x^2)' sinx + x^2 (sinx)' = 2xsinx + x^2 cosx$ bulunur.
b) $y = 3x^2 + 2x - 3 \;\Rightarrow\; y' = (3x^2 + 2x - 3\,)' = (3x^2)' + (2x)' - (3)' = 6x + 2$ elde edilir.
c) $g(t) = 2t^2 - 3t + 5 \Rightarrow g'(t) = (2t^2 - 3t + 5)' = 4t - 3$ olur.

d) $f(y) = y^2 + \frac{2}{y} \Longrightarrow f'(y) = 2y + \left(\frac{0\times y - 2\times 1}{y^2}\right) = 2y - \frac{2}{y^2}$ olur.

e) $y = \frac{3x^2+2x+1}{x^2+1} \Longrightarrow y' = \frac{(6x+2)(x^2+1)-(3x^2+2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^3+2x^2+6x+2-6x^3-4x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+4x+2}{(x^2+1)^2}$ olur.

f) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 2)(x^2+1) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (6x^2 - 6x)(x^2+1) + (2x^3 - 3x^2 + 2)(2x) \Longrightarrow f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 2x$

g) $f(x) = x^4 sinx \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 sinx + x^4 cosx = x^3(4sinx + xcosx)$

h) $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{0.x(x^2+1) - 1[1(x^2+1) + x.2x]}{x^2(x^2+1)^2} = -\frac{3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2}$

Örnek 4.9 $y = ax^2 + 2x + c$ parabolünün $(x_0 , y_0) = (1 , 2)$ noktasındaki teğetinin eğimi “1” olduğuna göre a ve c’yi bulunuz.

Çözüm: $(x_0 , y_0) = (1 , 2)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimi $f'(x_0) = f'(1) = 1$ olarak veriliyor.

$y = f(x) = ax^2 + 2x + c$ iken $f'(x) = 2ax + 2$ olup, $f'(1) = 2a + 2 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ bulunur. Verilen parabol $(x_0 , y_0) = (1 , 2)$ noktasından geçtiğinden, bu nokta verilen parabol denklemini sağlar. Yani $y_0 = ax_0^2 + 2x_0 + c$ olur. Bu denklemde $(x_0 , y_0) = (1 , 2)$ noktası ve $a = -\frac{1}{2}$ değeri yerlerine yazılırsa;

$2 = -\frac{1}{2} \times 1^2 + 2 \times 1 + c \Longrightarrow c = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ bulunur.

Teorem 4.4 (Bileşke Fonksiyonun Türevi) $u = g(x)$ fonksiyonu x noktasında ve $y = f(u)$ fonksiyonu da u noktasında türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde $y = f\big(g(x)\big)$ bileşke fonksiyonu da x noktasında türevlenebilirdir ve

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{veya} \quad y'_x = y'_u \times u'_x \tag{4.12}$$

dir. Bu kurala **Zincir Kuralı** denir.

Eğer $y = f\Big(u\Big(v\big(w(x)\big)\Big)\Big)$ bileşke fonksiyonu için zincir kuralı; $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dw} \times \frac{dw}{dx}$ veya $y'_x = y'_u \times u'_v \times v'_w \times w'_x$ dir.

Örnek 4.10 Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz?

a) $y = sin(x^2)$ **b)** $y = (3x + sinx)^2$ **c)** $y = sin^2(3x^2 + x - 1)$

Çözüm: a) Bileşke fonksiyon türevini (zincir kuralını) uygulayalım.

$y = sin(x^2)$; $u = x^2$ ve $y = sinu$ diyelim. Eşitlik (4.12)’ye göre;

$y'_x = y'_u \times u'_x = cosu(2x) = 2xcos(x^2)$ bulunur.

b) $y = (3x + sinx)^2$; $u = 3x + sinx$ dersek $y = u^2$ olur. Eşitlik (4.12)’den;

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2u(3 + cosx) = 2(3x + sinx\,)(3 + cosx)$ bulunur.

c) $y = sin^2(3x^2 + x - 1)$; $u = 3x^2 + x - 1, v = sinu$ dersek $y = v^2$ olur. Zincir kuralı gereğince;

$y'_x = y'_v \times v'_u \times u'_x = 2v \times cosu \times (6x+1)$=$(6x+1)2sin(3x^2+x-1)cos(3x^2+x-1) =$ $(6x+1)sin[2(3x^2+x-1)]$ olarak bulunur.

Teorem 4.5 (Ters Fonksiyonun Türevi) (a,b) açık aralığında tanımlı, sürekli ve monoton bir $y=f(x)$ fonksiyonunun herhangi $x \in (a,b)$ noktasında sıfırdan farklı $y' = f'(x)$ türevi varsa, o zaman bu x noktasına karşılık gelen y noktasında $x = g(y)$ ters fonksiyonunun da türevi vardır ve

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ veya $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ (4.13)

ile verilir.

Örnek 4.11 $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun tersinin türevini bulunuz?

Çözüm: $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun tanım kümesi $D_f = (-\infty, +\infty)$ olup, fonksiyon bu aralıkta sürekli, monoton artan ve türevlenebilirdir. $y'_x = f'(x) = 3x^2$ olup, sadece $a = 0$ noktasında $f'(a) = f'(0) = 0$ olur. Buna göre $y \neq 0$ olan tüm noktalar için $x = g(y)$ ters fonksiyonunun türevi, Eşitlik (4.13)'e göre;

$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{3x^2}$, ($y = x^3 \Rightarrow x = y^{1/3}$ olduğundan) $= \frac{1}{3\left(y^{1/3}\right)^2} = \frac{1}{3y^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ bulunur.

$y = 0$ (yani $x = 0$) noktasında ise $x'_y = \infty$ olur. Böylece;

$$x'_y = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} & , \ y \neq 0 \\ \infty & , \ y = 0 \end{cases}$$ elde edilir.

Örnek 4.12 $y = arcsinx$, $[x \in (-1, +1)]$ fonksiyonunu türevini bulunuz?

Çözüm: $y = arcsinx$ fonksiyonu $(-1, +1)$ aralığında $x = siny$ fonksiyonunun tersidir ve $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dir. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $x = siny$ fonksiyonu sürekli, monoton artan ve türevlenebilir olup, $x'_y = cosy$ dir. Verilen fonksiyonun türevi, Eşitlik (4.13)'e göre;

. $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$ bulunur.

- $y = arcsinx \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dir.