T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

MATEMATİK I DERSİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

3. Hafta

özenilen üniversite

BÖLÜM 2

FONKSİYONLAR

2.1 FONKSİYON KAVRAMI

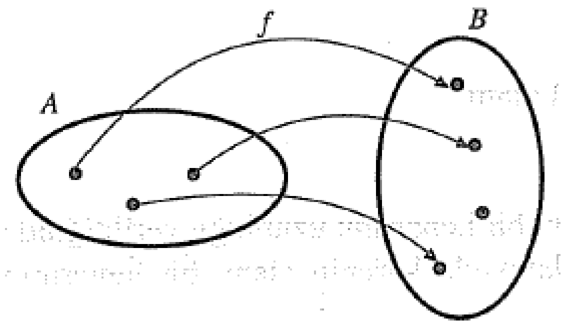
Fizik, Kimya, Biyoloji gibi uygulamalı bilimlerde değişebilen büyüklükler arasında her zaman bir bağıntı kurulabilmektedir. Bu bağıntı /bağıntılar yardımıyla konu ile ilgili olayların incelenmesi oldukça kolaylaşmaktadır. Örneğin bir hareketli cismin aldığı yol cismin hızına ve geçen zamana bağlı iken, bir dairenin alanı yarıçapının büyüklüğüne, bir karenin alanı bir kenarının uzunluğuna bağlıdır. İşte böyle durumlarda değişen büyüklükler arasındaki matematiksel bağıntıların modellenmesi ve bu modellerin özelliklerinin bilinmesi önemli olmaktadır.

Tanım 2.1 A ve B herhangi iki lineer nokta kümesi olsun. A'nın her elemanın B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f kuralına A'dan B'ye bir fonksiyon denir ve $f : A \;\rightarrow\; B$

$$x \;\rightarrow y = f(x)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1'de A: fonksiyonun **tanım kümesi** olup $D_f = A$ ile gösterilirken B : fonksiyonun **değer kümesi** olup $E_f = B$ ile gösterilmektedir. Tanım 2.1'e göre f bağıntısı $f = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$ şeklinde tanımı bir kümedir. Bir f bağıntısının bir fonksiyon olabilmesi için A tanım kümesinin her bir elemanına B değer kümesinde mutlaka bir eleman karşılık gelmelidir ve karşılık gelen bu eleman tek olmalıdır. Yani A'daki bir elemana B'de iki eleman karşılık gelmemelidir. Görsel olarak bir fonksiyon Şekil 2.1'de verildi.



Şekil 2.1 Bir fonksiyonun görsel ifadesi

Buna göre;

$$f : A \;\rightarrow\; B \text{ bir fonksiyon} \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \forall x \in A \ için \ (x,y) \in f \ olacak \ şekilde \ \exists y \in B \ olmalı \\ ii)\ (x,y) \in f \text{ ve } (x,z) \in f \text{ olduğunda } y = z \ olmalı \end{cases} \tag{2.1}$$

yazılabilir. Eğer f fonksiyonu, tanım kümesinin x elemanını değer kümesinin y elemanı ile eşleştirirse x'in f altındaki görüntüsü y'dir denir ve bu $y = f(x)$ şeklinde gösterilir. Burada x bağımsız değişken olup, tanım kümesinde değiştikçe, buna bağlı olarak y'de değer kümesinde değişir. Bu sebeple $y = f(x)$ bir fonksiyon olduğu kadar, aynı zamanda bir bağımlı değişkendir.

Örnek 2.1 Bir karenin alanının karenin bir kenar uzunluğunun bir fonksiyonu olduğunu gösteriniz?

Çözüm: Karenin kenar uzunluğu x ve alanı S olsun. Karenin kenar uzunluklarının kümesini A ile alanlarının kümesini de B ile gösterelim. $f: A \to B$

$x \to f(x)$ =S=x^2 bağıntısını tanımlayalım. Bu bağıntının bir fonksiyon olabilmesi için (2.1) ifadesinde verilen (i) ve (ii) özelliklerinin sağlanması gerekir.

i) $\forall x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in B$ vardır, öyle ki $y = f(x) = S = x^2$ dir.
ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ olsun. Bu takdirde $y = f(x) = x^2$ ve $z = f(x) = x^2$ olup, görüldüğü üzere $y = z$'dir.

(i) ve (ii) den dolayı bir karenin alanı, karenin bir kenar uzunluğunun bir fonksiyonudur.

Örnek 2.2 Bir dikdörtgenin alanının, o dikdörtgenin çevresinin bir fonksiyonu olup olmadığını gösteriniz?

Çözüm: Uzun kenarı a ve kısa kenarı b olan bir dikdörtgeni ele alalım. Bu dikdörtgenin alanı $S = a \times b$ iken çevresi $x = 2(a + b)$ dir. Dikdörtgenin çevre uzunluklarının kümesini A ve alanlarının kümesi B olsun.

$f: A \to B$
$x \to y = f(x) = S$ bir fonksiyon mudur? Bunun doğru olabilmesi için (2.1) ifadesinde verilen (i) ve (ii) özelliklerinin sağlanması gerekir.

i) $\forall x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in B$ vardır, öyle ki $x = 2(a + b)$ iken $y = f(x) = S = a \times b$ dir.
ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ olsun. $(x, y) \in f$ ise, örneğin; $a = 16, b = 4$ iken $x = 2(a + b) = 40$ olup, $y = f(x) = S = a \times b = 16 \times 4 = 64$ dür. Benzer şekilde $(x, z) \in f$ ise, örneğin; $a = 11, b = 9$ iken $x = 2(a + b) = 40$ olup, $z = f(x) = S = a \times b = 11 \times 9 = 99$ dur. Görüldüğü gibi tanım kümesi ait $x = 40$ elemanı değerler kümesinde hem $y = 64$ hem de $z = 99$ gibi iki farlı elemanla eşleşmektedir. Bu sebeple tanımlanan f bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyon değildir. Buna göre dikdörtgenin alanı, çevresinin bir fonksiyonu olamaz.

Tanım 2.2 $A \subset IR$, $B \subset IR$ ve $f: A \to B$ bir fonksiyon ise bu fonksiyona reel değişkenli-reel değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.2'ye göre reel değişkenli reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde, f'in tanım kümesi $f(x)$'i reel yapan bütün x noktalarının kümesidir.

Örnek 2.3 $A \subset IR$, $B \subset IR$ ve $f: A \to B$ fonksiyonu $x \to f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ şeklinde tanımlansın. Fonksiyonun tanım kümesini ve değer kümesini bulunuz?

Çözüm: Tanım Kümesi: $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \in IR$ olması için $1 - x^2 \geq 0$ olması gerekir. $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ olup, işaret tablosu:

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Bu tabloya göre tanım kümesi $D_f = [-1 , +1]$ kapalı aralığıdır.

Değer kümesi: $\forall x \in D_f$ için $-1 \leq x \leq +1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ olup, böylece $0 \leq f(x) \leq 1$ olacağından $E_f = [0 , 1]$ kapalı aralığıdır.

Tanım 2.3 $f: A \to B$ fonksiyonu verildiğinde $\{(x , f(x)): x \in A\}$ kümesine f fonksiyonunun grafiği denir.

Tanım 2.3'e göre $\forall x \in A$ için $(x , f(x))$ noktaları xOy düzleminde işaretlendiğinde fonksiyonun grafiği çizilmiş olur.

Tanım 2.4 f ve g aynı küme üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve bu kümenin her x elemanı için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, f ile g fonksiyonlarına eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.4 $f: IR \to IR$ fonksiyonu $x \to f(x) = x^2 - 1$ şeklinde ve $g: IR \to IR$ fonksiyonu da $x \to g(x) = (x - 1)(x + 1)$ şeklinde tanımlı olsun. f ve g fonksiyonlarının eşit olduğunu gösteriniz?

Çözüm: $f(x) = x^2 - 1$ ve $g(x) = (x - 1)(x + 1)$ fonksiyonlarının her ikisi de $\forall x \in IR$ için tanımlı olduğundan tanım kümeleri IR dir. Keyfi bir $x \in IR$ seçelim. Bu takdirde $f(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = g(x)$ elde edilir. $x \in IR$ keyfi seçildiğinden dolayı bu durum $\forall x \in IR$ için geçerli olup, $f(x) = g(x)$ dir. O halde f ve g fonksiyonlarının eşit fonksiyonlardır.

Tanım 2.5 f ve g tanım kümeleri sırası ile D_f ve D_g, değer kümeleri de yine sırası ile E_f ve E_g olan iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun $f + g$ toplamı, $f - g$ farkı, $f \times g$ çarpımı ve f/g bölümü;

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$; $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$; $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ şeklinde tanımlanır. Burada $f + g$, $f - g$ ve $f \times g$ fonksiyonlarının tanım kümeleri $D_f \cap D_g$ iken f/g fonksiyonunun tanım kümesi $D_f \cap D_g$ kümesinden $g(x) = 0$ eşitliğini sağlayan noktaları çıkarttıktan sonra geriye kalan fark kümesidir. $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarının değerler kümeleri $E_f \cup E_g$ kümesi iken $f \times g$ ve f/g fonksiyonlarının değerler kümesi ya $E_f \cup E_g$ kümesi ya da bunun bir alt kümesidir.

Örnek 2.5 $f: IR \to IR$ fonksiyonu, $f(x) = x^3 - 1$ ve $g: IR \to IR$ fonksiyonu, $g(x) = x - 1$ verilsin. $f + g$, $f - g$, $f \times g$ ve f/g fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların tanım kümeleri ile değerler kümelerini bulunuz?

Çözüm: $f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonu için $D_f = IR$ ve $E_f = IR$ iken $g(x) = x - 1$ fonksiyonu için $D_g = IR$ ve $E_g = IR$ dir.

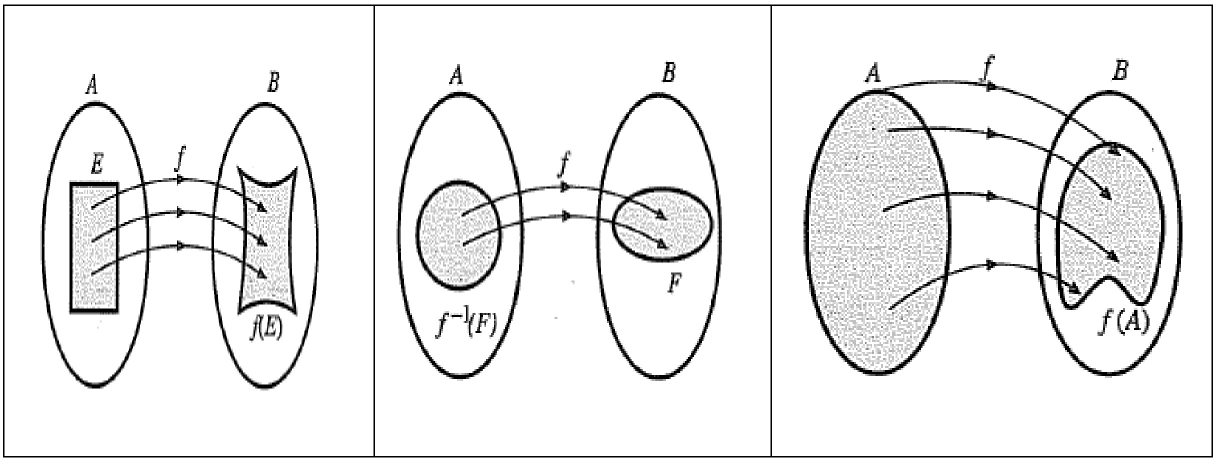
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^3 - 1) + (x - 1) = x^3 + x - 2$ olup, tanım kümesi $D_{f+g} = D_f \cap D_g = IR \cap IR = IR$ ve değerler kümesi $E_{f+g} = E_f \cup E_g = IR \cup IR = IR$ dir.

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^3-1)-(x-1)=x^3-x$ olup, tanım kümesi $D_{f-g}=D_f\cap D_g=IR\cap IR=IR$ ve değerler kümesi $E_{f-g}=E_f\cup E_g=IR\cup IR=IR$ dir.

$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(x^3-1)(x-1)=x^4-x^3-x+1=(x-1)^2(x^2+x+1)$ olup, tanım kümesi $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=IR\cap IR=IR$ ve değerler kümesi $\forall x\in D_{f\times g}$ için $(f\times g)(x)\geq 0$ olduğundan $E_{f\times g}=IR^+\cup\{0\}$ kümesidir.

$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=x^2+x+1$ olup, tanım kümesi $D_{f/g}=D_f\cap D_g=IR\cap IR=IR$ ve değerler kümesi $\forall x\in D_{f/g}$ için $(f/g)(x)\geq 1$ olduğundan $E_{f/g}=[1,\infty)$ aralığıdır.

Tanım 2.6 $f{:}\,A\to B$ bir fonksiyon, $E\subset A$ ve $F\subset B$ olsun. $f(E)=\{f(x){:}\ x\in A\}$ kümesine E kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü, $f^{-1}(F)=\{x{:}\,f(x)\in F\}$ kümesine de F kümesinin f altındaki ters görüntüsü denir. Ayrıca $f(A)$ kümesine de fonksiyonun görüntü kümesi denir ve daima $f(A)\subset B$ dir.



Şekil 2.2 f fonksiyonu altında bir kümenin görüntüsü, ters görüntüsü ve görüntü kümesi

Tanım 2.7 $f{:}\,A\to B$ fonksiyonu için $f(A)=B$ oluyorsa, f fonksiyonuna örten fonksiyon, aksi takdirde f fonksiyonuna içine fonksiyon denir.
Tanım 2.7'ye göre f bir örten fonksiyon $\Leftrightarrow$ $\forall y\in B$ için $y=f(x)$ olacak şekilde $\exists x\in A$ vardır.

Tanım 2.8 $f{:}\,A\to B$ fonksiyonu verildiğinde farklı elemanların görüntüleri de farklı ise ya da görüntüleri aynı olan elemanların kendileri de aynı ise f fonksiyonuna birebirdir denir.

Tanım 2.8'e göre f fonksiyonu birebirdir $\Leftrightarrow \begin{cases}\forall x_1,x_2\in A \text{ için } x_1\neq x_2\ iken\ f(x_1)\neq f(x_2)\\ VEYA\\ \forall x_1,x_2\in A \text{ için } \mathrm{f}(x_1)=f(x_2)\ iken\ x_1=x_2\end{cases}$

oluyorsa.
Hem birebir hem de örten olan bir fonksiyona birebir-örten fonksiyon denir.

Örnek 2.6 $f{:}\,IR\to IR,\ f(x)=2x+3$ fonksiyonu birebir-örten midir?

Çözüm: $D_f=IR$ dir, çünkü verilen fonksiyon $\forall x\in IR$ için tanımlıdır. Ayrıca $\forall x\in IR$ için $f(x)=2x+3\in IR$ olacağından değerler kümesi $E_f=IR$'dır.

Şimdi verilen fonksiyonun birebir olup olmadığına bakalım Keyfi olarak $x_1, x_2 \in IR$ alalım ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Bu durumda $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow \ 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ elde edilir. Buna göre verilen fonksiyon birebirdir.

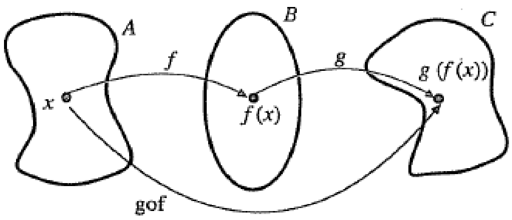
İkinci olarak verilen fonksiyonun örten olup olmadığına bakalım. Keyfi bir $y \in E_f = IR$ alalım. Bu takdirde $y = f(x) = 2x + 3 \quad \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}(y - 3) \in D_f = IR$ vardır. Buna göre değerler kümesinin her elemanına tanım kümesinde en az bir eleman bulunabilecektir. Bu sebeple verilen fonksiyon örten fonksiyondur.

- Hem birebir hem de örten fonksiyonlar için fonksiyonun grafiği çizildiğinde, Ox-eksenine paralel olarak çizilecek olan doğrular bu grafiği yalnız ve yalnız bir tek noktada keserler.

Tanım 2.9 f, A'dan A'ya bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ ise f fonksiyonuna birim (özdeş) fonksiyon denir ve $f = I_A$ ile gösterilir.

Tanım 2.10 $f: A \ \to B$ ve $g: B \ \to C$ fonksiyonları verilsin. Bu takdirde g fonksiyonu $f(A)$'daki her $f(x)$ elemanını C kümesinin bir $g\big(f(x)\big)$ elemanına dönüştürür. Böylece A kümesinin her bir x elemanını C kümesinin bir $z = g\big(f(x)\big)$ elemanına dönüştüren yeni bir fonksiyon elde edilir. Bu yeni fonksiyona f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir ve $g \circ f$ ile gösterilir.

$g \circ f: A \ \to C, z = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ bileşke fonksiyonu Şekil 2.3'de gösterildi.



Şekil 2.3 Bileşke fonksiyon gösterimi

Benzer şekilde g ile f fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu da tanımlanabilir. Eğer $g: B \ \to C$ ve $f: C \ \to A$ fonksiyonlar ise bu takdirde g ile f fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu;

$f \circ g: B \ \to A, \ z = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Genel olarak $f \circ g \neq g \circ f$ dir.

Örnek 2.7 $f: IR \ \to IR, \ f(x) = 3x - 1$ fonksiyonu ile $g: IR \ \to IR, \ g(x) = x^2$ fonksiyonu verilsin. $g \circ f$ ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarını bulunuz?

Çözüm: $g \circ f: IR \ \to IR$

$$x \ \to z = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x - 1) = (3x - 1)^2$$

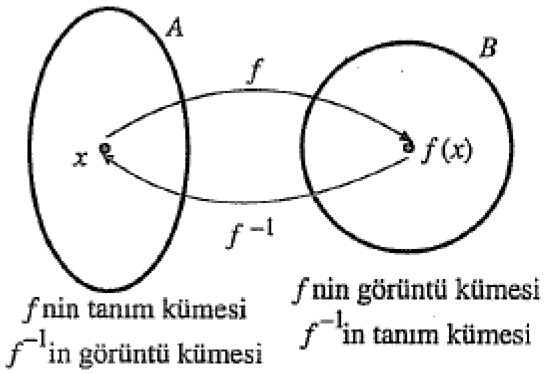
$f \circ g: IR \ \to IR$

$$x \ \to z = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 3x^2 - 1$$

Burada $f \circ g \neq g \circ f$ olduğu görülmektedir.

Tanım 2.11 $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon olsun. $(g \circ f)(x) = x$ ve $(f \circ g)(y) = y$ eşitliklerine sağlayan g fonksiyonuna f'nin ters fonksiyonu denir ve $g = f^{-1}$ ile gösterilir (bakınız Şekil 2.4).

Tanım 2.11'e göre $f^{-1} \circ f = I_A$ iken $f \circ f^1 = I_B$ dir. Burada f ve f^{-1} fonksiyonları birbirlerinin ters fonksiyonları olup, grafikleri aynı koordinat düzleminde çizildiğinde bu grafikler $y = x$ doğrusuna (1. Açı ortay) göre simetrik olacaktır. Çünkü (a, b) noktası $y = f(x)$ eğrisi üzerinde bir nokta ise (b, a) noktası da $y = f^{-1}(x)$ eğrisi üzerinde bir nokta olacaktır. (a, b) ve (b, a) noktaları $y = x$ doğrusuna (1. Açı ortay) göre simetrik noktalardır.



Şekil 2.4 Ters fonksiyon gösterimi

Örnek 2.8 $f: IR \rightarrow IR,\ f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun tersinin olup olmadığını araştırınız. Varsa tersini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun tersinin olabilmesi için verilen fonksiyonun birebir ve örten olması gerekir. $D_f = IR$ ve $E_f = IR$ dir.

f fonksiyonu birebirdir $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f = IR$ için $\mathrm{f}(x_1) = f(x_2)\ iken\ x_1 = x_2$ olmalı.

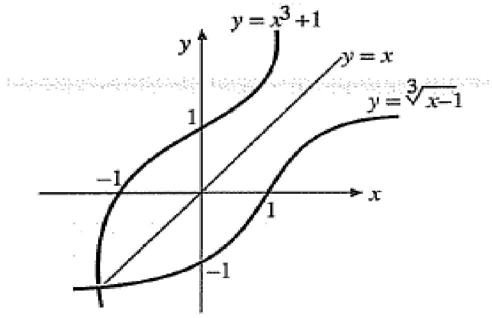
Keyfi $x_1, x_2 \in IR$ alalım ve $\mathrm{f}(x_1) = f(x_2)$ olsun. Bu durumda $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0$ $\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ iken daima $x_1^2 + x_2^2 > x_1x_2$ olacağından ikinci çarpan, yani $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ dır. O zaman eşitliğin sağlanabilmesi için birinci çarpanın, yani $x_1 - x_2 = 0$ olması gerekir ve böylece $x_1 = x_2$ elde edilir. Burada $x_1, x_2 \in IR$ keyfi seçildiğinden bu durum $\forall x_1, x_2 \in IR$ için geçerlidir, dolayısıyla verilen fonksiyon birebirdir.

f bir örten fonksiyon $\Leftrightarrow \forall y \in E_f = IR$ için $y = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in D_f = IR$ olmalı.

Keyfi bir $y \in E_f = IR$ alalım. Bu durumda $y = f(x) = x^3 + 1$ olup, burada $x = \sqrt[3]{y - 1} \in IR$ vardır. O halde verilen fonksiyon örtendir.

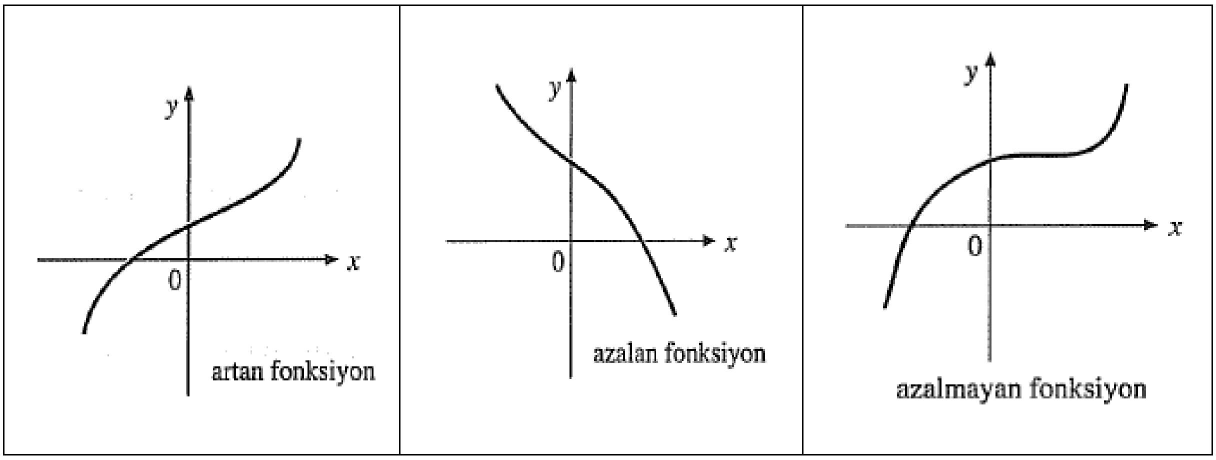
Sonuç olarak verilen fonksiyonun tersi vardır ve ters fonksiyon $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ dir.

Bu iki fonksiyonun grafiği aynı koordinat düzleminde çizildiği zaman Şekil 2.5 elde edilecektir.



Şekil 2.5 Birbirlerinin tersi olan fonksiyonların grafikleri

Tanım 2.12 $A \subset IR$ ve $f: A \to IR$ bir fonksiyon olsun. $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ [veya $f(x_1) \le f(x_2)$] oluyorsa f fonksiyonuna A kümesi üzerinde monoton artan [veya azalmayan] fonksiyon denir. Benzer şekilde $\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ [veya $f(x_1) \ge f(x_2)$] oluyorsa f fonksiyonuna A kümesi üzerinde monoton azalan [veya artmayan] fonksiyon denir. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona bu aralıkta kesin olarak monotondur denir. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artmayan veya azalmayansa bu fonksiyon bu aralıkta monotondur denir. Eğer bir fonksiyonun tanımlı olduğu her sonlu aralık, fonksiyonun monoton olduğu sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa, bu fonksiyona parçalı monoton fonksiyon denir.



Şekil 2.6 Artan ve azalan fonksiyon örnekleri

Örnek 2.9 $f: IR \to IR$, $f(x) = 2x + 4$ ve $g: IR \to IR$, $g(x) = x^2$ fonksiyonlarının monotonluk durumunu inceleyiniz. Monotonluk aralıklarını belirleyiniz.

Çözüm: Önce $f(x) = 2x + 4$ fonksiyonunu ele alalım. Tanım kümesi $D_f = IR$ ve değer kümesi $E_f = IR$ dir. $\forall x_1, x_2 \in IR$ için $x_1 < x_2$ olsun. Bu durumda $2x_1 < 2x_2$ ve böylece $2x_1 + 4 < 2x_2 + 4$, yani $f(x_1) < f(x_2)$ olacaktır. Buna göre f fonksiyonu tanım kümesi üzerinde monoton artan bir fonksiyon olup, monotonluk aralığı tanım kümesidir.

Şimdi de $g(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım. Tanım kümesi $D_f = IR$ ve değer kümesi $E_f = IR^+ \cup \{0\}$ dir. Monotonluk durumunu tanım kümesini iki ayrık kümenin birleşimi olarak alıp, her bir alt kümede ayrı ayrı incelememiz gerekir.

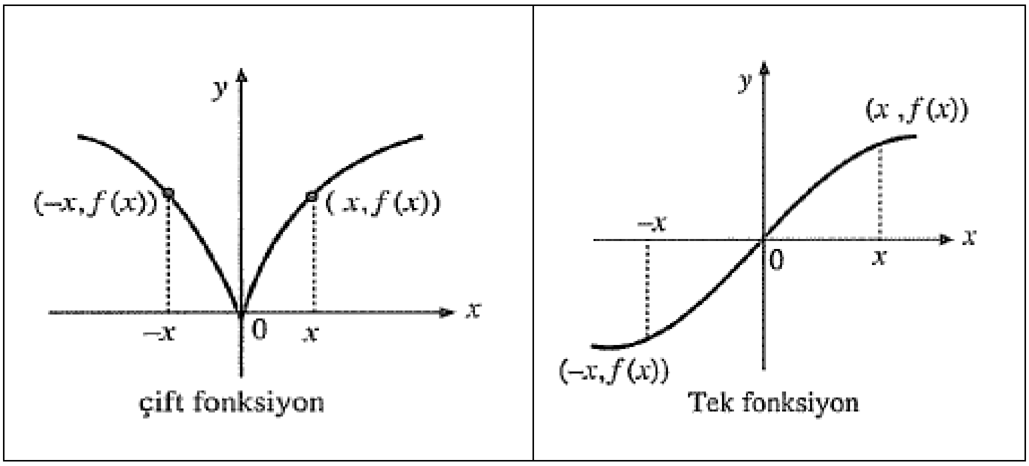
$D_f = IR = (-\infty\,,0) \cup [0\,,+\infty) = A_1 \cup A_2$ diyelim, öyle ki $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ dir.

$A_1 = (-\infty\,,0)$ aralığı üzerinde monotonluk durumu: $\forall x_1, x_2 \in A_1$ için $x_1 < x_2$ olsun. Bu durumda $x_1^2 > x_2^2$ yani $g(x_1) > g(x_2)$ olacağından $A_1 = (-\infty\,,0)$ aralığı üzerinde g fonksiyonu monoton azalandır.

$A_2 = [0\,,+\infty)$ aralığı üzerinde monotonluk durumu: $\forall x_1, x_2 \in A_2$ için $x_1 < x_2$ olsun. Bu durumda $x_1^2 < x_2^2$ yani $g(x_1) < g(x_2)$ olacağından $A_2 = [0\,,+\infty)$ aralığı üzerinde g fonksiyonu monoton artandır.

Sonuç olarak g fonksiyonu tanım kümesi olan $D_f = IR$ üzerinde parçalı monotondur. Böylece g fonksiyonun monotonluk aralığı da tanım kümesidir.

Tanım 2.13 A herhangi bir lineer nokta kümesi olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $-x \in A$ oluyorsa, o zaman A kümesine bir simetrik küme denir. A simetrik bir küme olmak üzere $f: A \to B$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon, $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.



Şekil 2.7 Tek-Çift fonksiyon örneği

Örnek 2.10 Reel değişkenli ve reel değerli olarak verilen $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = x^3$; $h(x) = x + 2$ ve $k(x) = 0$ fonksiyonlarının teklik ve çiftlik durumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $f: IR \to IR$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu için tanım kümesi $D_f = IR$ olup, $\forall x \in IR$ için $-x \in IR$ olacağından tanım kümesi bir simetrik kümedir. $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu bir çift fonksiyondur.

g: $IR \to IR$, $g(x) = x^3$ fonksiyonu için tanım kümesi $D_g = IR$ olup, $\forall x \in IR$ için $-x \in IR$ olacağından tanım kümesi bir simetrik kümedir. $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu bir tek fonksiyondur.

$h: IR \to IR$, $h(x) = x + 2$ fonksiyonu için tanım kümesi $D_h = IR$ olup, $\forall x \in IR$ için $-x \in IR$ olacağından tanım kümesi bir simetrik kümedir. $h(-x) = -x + 2$ ve $-h(x) = -(x+2) = -x - 2$ olup, $h(-x) \neq \begin{cases} h(x) \\ -h(x) \end{cases}$ olduğundan h fonksiyonu ne çift ne de tek fonksiyondur.

$k: IR \to IR,\ k(x) = 0$ fonksiyonu için tanım kümesi $D_k = IR$ olup, $\forall x \in IR$ için $-x \in IR$ olacağından tanım kümesi bir simetrik kümedir. $k(-x) = 0 = k(x)$ olduğundan k fonksiyonu bir çift fonksiyondur. Ayrıca $-k(x) = -0 = 0$ olup $k(-x) = 0 = -k(x)$ olduğundan k fonksiyonu bir tek fonksiyondur. O halde k fonksiyonu hem çift hem de tek fonksiyondur.

Tanım 2.14 $f: IR \to IR$ fonksiyonu için $A \subset D_f$ olsun. $\forall x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna A kümesinde sınırlı fonksiyon denir. A kümesinde sınırlı olmayan fonksiyona ise sınırsız fonksiyon denir.

Tanım 2.15 $f: IR \to IR$ fonksiyonu için $D_f = IR$ olsun. Belli bir $T > 0$ sayısı için $\forall x \in D_f$ iken $f(x+T) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da fonksiyonun peryodu denir.

Eğer $T > 0$ sayısı bir f fonksiyonun peryodu ise $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere kT (yani Tperyodunun pozitif tam sayı katları) sayısı da aynı f fonksiyonun bir peryodudur. Buna göre periyodik bir fonksiyonun peryotlarının sayısı keyfidir. Ancak; pozitif peryotların en küçüğüne fonksiyonun esas peryodu denir.

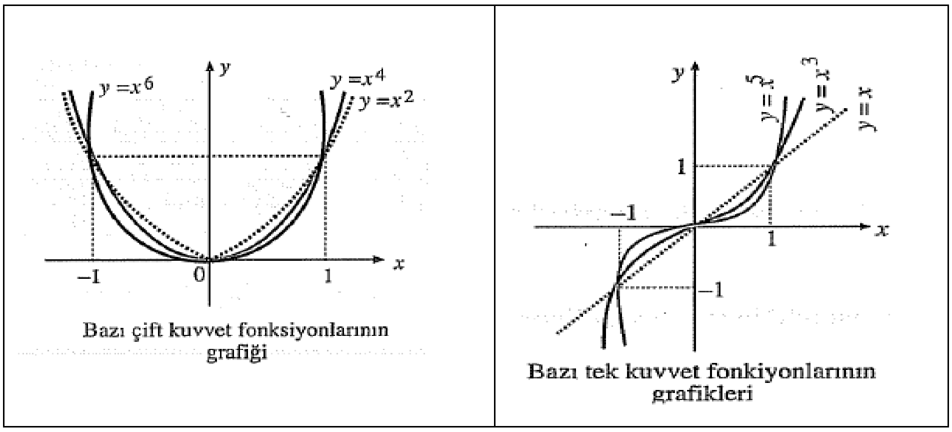
Tanım 2.16 İki değişken arasındaki bağıntının değişkenlerden herhangi birisine göre çözümlenmemiş şekilde verilmesine fonksiyonun kapalı formu veya kısaca kapalı fonksiyon denir.

Tanım 2.16'ya göre x ve y arasındaki bağıntı kuralı F olmak üzere bir kapalı fonksiyon $F(x\,,y) = 0$ şeklinde gösterilir. $y = f(x)$ yazılışı ise fonksiyonun açık ifadesidir.

$F(x\,,y) = x + 2y - 1 = 0$; $F(x,y) = y^2 + 4x^2 = 0$; $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ v.s. birer kapalı fonksiyon örneğidir.

2.2 BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Tanım 2.17 $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $f: IR \to IR,\ f(x) = x^n$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlara kuvvet fonksiyonu denir. Kuvvet fonksiyonu için $D_f = IR$, $E_f = \begin{cases} IR \cup \{0\}, n\ çift\ sayı\ ise \\ \quad IR \quad\ , n\ tek\ sayı\ ise \end{cases}$ şeklindedir.



Şekil 2.8 Kuvvet Fonksiyonu grafikleri

Eğer n çift sayı ise kuvvet fonsiyonu bir çift fonksiyon olup, grafiği Oy- eksenine göre simetriktir. Eğer n tek sayı ise kuvvet fonsiyonu bir tek fonksiyon olup, grafiği orijine göre simetriktir.

Tanım 2.18 $n \geq 0$ bir tam sayı ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$'ler de $, a_n \neq 0$ olmak üzere sabit reel sayılar olsun. $p_n: IR \to IR, p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x_1 + a_0$ fonksiyonuna n-nci dereceden bir polinom fonksiyon denir. Burada $n \geq 0$ tam sayısına polinomun derecesi ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılarına ise polinomun katsayıları adı verilir. Polinom fonksiyon için $D_f = IR$ iken değerler kümesi polinomun derecesine ve katsayılara göre değişebilir.

Tanım 2.19 $p_n(x), n$-nci dereceden, $q_m(x), m$-nci dereceden polinom fonksiyonlar ve $q(x) \neq 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ fonksiyonuna rasyonel fonksiyon denir.

Tanım 2.19'da özel olarak $q_m(x) = 1$ alınırsa $f(x) = p_n(x)$ olur, yani her polinom fonksiyon bir rasyonel fonksiyondur, ama tersi her zaman doğru değildir. Bir rasyonel fonksiyon paydayı sıfır yapan noktalar hariç her yerde tanımlıdır.

Tanım 2.20 $A \subset IR$ olmak üzere $f: A \to IR,\ f(x) = [\![x]\!]$ şeklinde tanımlanan fonksiyona tam değer fonksiyonu denir. Burada $[\![x]\!]$: x reel sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıyı göstermektedir.

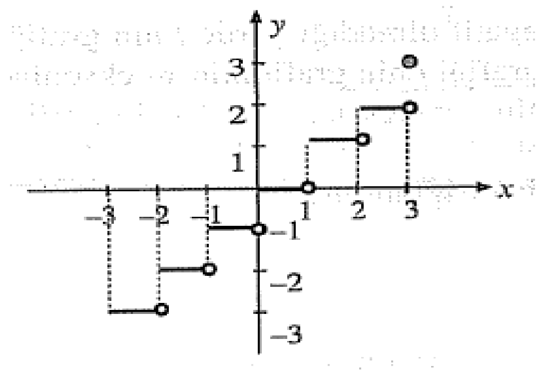
Bu tanıma göre $[\![x]\!]$; $n \leq x$ eşitsizliğini sağlayan n tam sayılarının en büyüğünü gösterdiğinden, p bir tam sayı olmak üzere $p \leq x < p + 1$ eşitsizliğini sağlayan x reel sayıları için $[\![x]\!] = p$ dir.

Örnek 2.11 a) $f: [-3, 3] \to IR$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonunu Tanım 2.20'yi dikkate alarak yeniden tanımlayınız ve grafiğini çiziniz.

b) $f: [-2, 2] \to IR$, $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonunu Tanım 2.20'yi dikkate alarak yeniden tanımlayınız ve grafiğini çiziniz.

c) $f: [-2, 2] \to IR$, $f(x) = [\![x^2]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

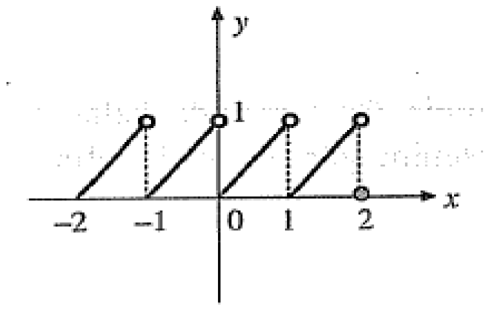
Çözüm: a)

$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} -3, & -3 \leq x < -2 \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$	

Şekil 2.8 $y = [\![x]\!]$ fonksiyonu ve $[-3, 3]$ aralığında grafiği

b)

$$f(x) = x - [\![x]\!] = \begin{cases} x+2 & , -2 \le x < -1 \\ x+1 & , -1 \le x < 0 \\ x & , 0 \le x < 1 \\ x-1 & , 1 \le x < 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$$



Şekil 2.10 $\boldsymbol{y} = x - [\![x]\!]$ fonksiyonu ve $[-2\,,2]$ aralığında grafiği

c) $f(x) = [\![x^2]\!]$ fonksiyonu için D_f=$[-2\,,2]$ aralığı olup bir simetrik kümedir. Çünkü $\forall x \in [-2\,,2]$ için $-x \in [-2\,,2]$ dir. Ayrıca $f(-x) = [\![(-x)^2]\!] = [\![x^2]\!] = f(x)$ olduğundan verilen fonksiyon bir çift fonksiyondur. Bu sebeple grafiği Oy-eksenine göre simetrik olacaktır. Bu durumda fonksiyonun grafiğini $[0\,,2]$ aralığında çizip sonra simetriğini almak yeterli olacaktır.

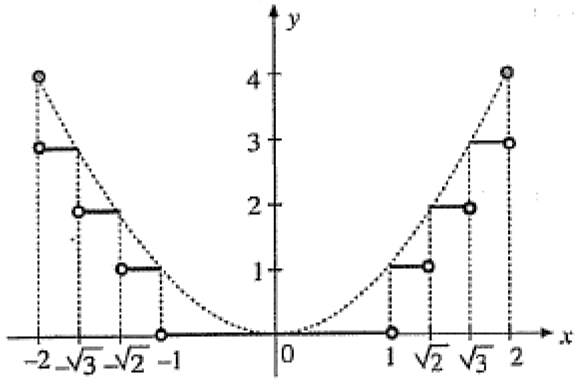
$0 \le x < 1$ için $0 \le x^2 < 1 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 0$

$1 \le x < \sqrt{2}$ için $1 \le x^2 < 2 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 1$

$\sqrt{2} \le x < \sqrt{3}$ için $2 \le x^2 < 3 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 2$

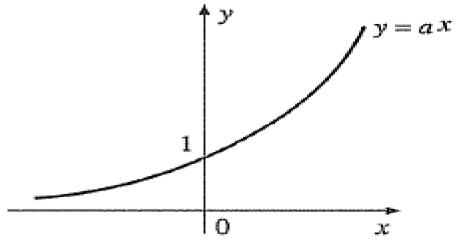
$\sqrt{3} \le x < 2$ için $3 \le x^2 < 4 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 3$

$x = 2$ için $x^2 = 4 \Rightarrow [\![x^2]\!] = 4$

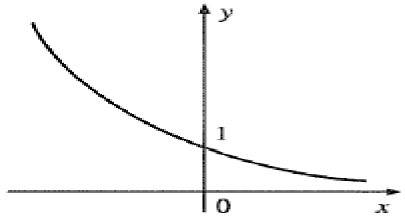


Şekil 2.11 $\boldsymbol{y} = [\![x^2]\!]$ fonksiyonu ve $[-2\,,2]$ aralığında grafiği

Tanım 2.21 $a \ne 1, a > 0$ olmak üzere $f: IR \to IR^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna veya özel olarak $a = e$, $(e = 2{,}718218\ ...)$ sayısı alındığında $f: IR \to IR^+$, $f(x) = e^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon denir. Üstel fonksiyon için $D_f = IR$ ve $E_f = IR^+$ dır.



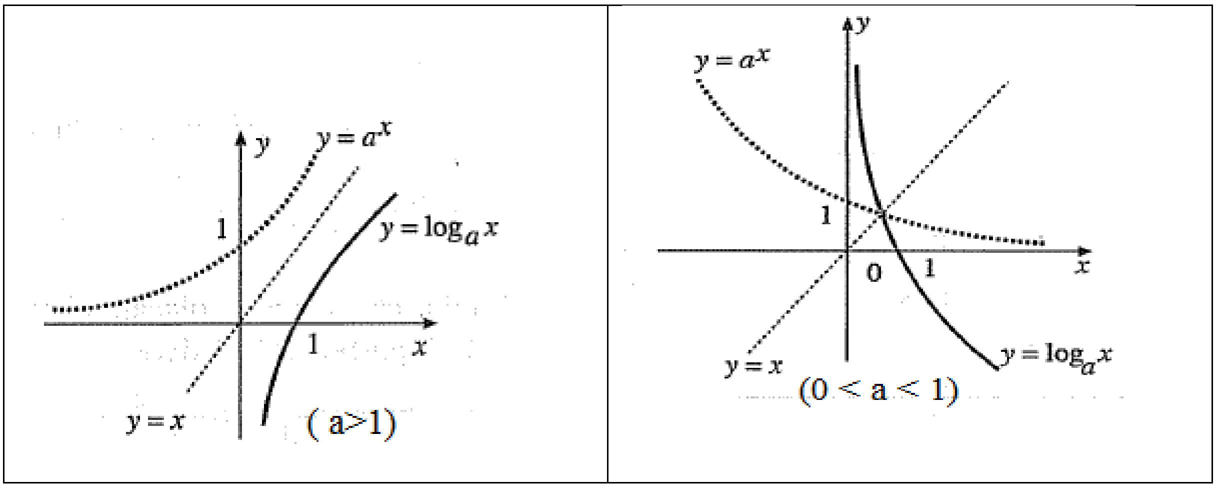
$(a > 1)$



$(0 < a < 1)$

Şekil 2.12 $y = a^x$ üstel fonksiyonunun grafiği

Tanım 2.22 $a \neq 1, a > 0$ olmak üzere $f: IR^+ \to IR$, $f(x) = log_a x$ fonksiyonuna veya özel olarak $a = e$, $(e = 2{,}718218 \ldots)$ sayısı alındığında $f: IR^+ \to IR$, $f(x) = log_e x = lnx$ fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir. Bunlardan birincisine "a" tabanına göre logaritma, eğer $a = 10$ alınırsa "bayağı logaritma", ikincisine ise "doğal ogaritma" adı verilir. Logaritma fonksiyonu için $D_f = IR^+$ ve $E_f = IR$ dır.



Şekil 2.13 $y = log_a x$ fonksiyonunun grafiği

- Üstel fonksiyon ile logaritma fonksiyonu birbirinin tersi olan fonksiyonlardır. Bu sebeple; $y = log_a x \iff x = a^y$ veya $y = lnx \iff x = e^y$ ilişkileri her zaman geçerlidir.
- $log_a(u.v) = log_a u + log_a v$; $ln(u.v) = lnu + lnv$
- $log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - log_a v$; $ln\left(\frac{u}{v}\right) = lnu - lnv$
- $log_a u^k = k log_a u$; $lnu^k = klnu$, $k \in IR.$

Tanım 2.23 $D_f \subset IR, f: D_f \to IR$ bir fonksiyon olsun. $|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , f(x) < 0 \end{cases}$ fonksiyonuna f-fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu denir.

Tanım 2.24 $D_f \subset IR, f: D_f \to IR$ bir fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$ fonksiyonuna işaret fonksiyonu denir ve $f = sgn$ ile gösterilir.

Tanım 2.24'e göre işaret fonksiyonu; $y = sgn(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$ olacaktır.

İşaret fonksiyonu ile herhangi bir f fonksiyonunun bileşke fonksiyonu;

$$(f \circ sgn)(x) = f\big(sgn(x)\big) = \begin{cases} f(-1) & , x < 0 \\ f(0) & , x = 0 \\ f(1) & , x > 0 \end{cases}$$

iken, herhangi bir f fonksiyonu ile işaret fonksiyonunun bileşke fonksiyonu;

$$(sgn \circ f)(x) = sgn\big(f(x)\big) = \begin{cases} -1 \ , & f(x) < 0 \\ 0 \ , & f(x) = 0 \\ 1 \ , & f(x) > 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlıdır.