En Küçük ve En Büyük Değerlerin Bulunması

$f(x)$ fonksiyonu $[a\,,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Bu fonksiyonun verilen aralıkta, $\underset{x\in[a\,,b]}{\text{EKD}} f(x)$ ve $\underset{x\in[a\,,b]}{\text{EBD}} f(x)$ ile gösterilen en küçük ve en büyük değerlerinin bulunması için;

i) Aralığın içindeki bütün kritik noktalar bulunur ve bu noktalarda fonksiyon değerleri hesaplanır.

ii) Aralığın uç noktalarında fonksiyon değerleri hesaplanır.

iii) Bulunan bütün fonksiyon değerleri karşılaştırılarak en küçük ve en büyük değerler belirlenir.

Örnek:20 $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2x$ fonksiyonunun $[-1\,,+1]$ aralığında en küçük ve en büyük değerlerini bulunuz?

Çözüm i) Fonksiyonun $[-1\,,+1]$ aralığındaki kritik noktalarını ve bo noktalarda fonksiyon değerlerini bulalım.

$f'(x) = 2x^4 - 5x^2 + 2$ olup, bu türev $[-1\,,+1]$ aralığında tanımlıdır. Yani fonksiyonun türevini bu aralıkta tanımsız yapan hiçbir nokta yoktur. Bu durumda kritik noktalar türevi sıfır yapan noktalar olacaktır.

$f'(x) = 0 \Rightarrow\ 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = t$ dersek $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$ ve $t_2 = 2$ bulunur.

$t_1 = \frac{1}{2}$ olsun. $x^2 = t \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1\,,+1]$ dir.

$t_2 = 2$ olsun. $x^2 = t \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{2} \notin [-1\,,+1]$ dir. Buna göre $[-1\,,+1]$ aralığının içindeki kritik noktalar $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dir. Bu kritik noktalarda fonksiyonun değeri sırası ile;

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{20\sqrt{2}} + \frac{5}{6\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{19\sqrt{2}}{30}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{20\sqrt{2}} - \frac{5}{6\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{19\sqrt{2}}{30}$$

ii) Aralığın uç noktalarında fonksiyonun değerleri bulunur.

$a = -1$ için $f(-1) = \frac{2}{5}(-1)^5 - \frac{5}{3}(-1)^3 + 2(-1) = -\frac{2}{5} + \frac{5}{3} - 2 = -\frac{11}{5}$

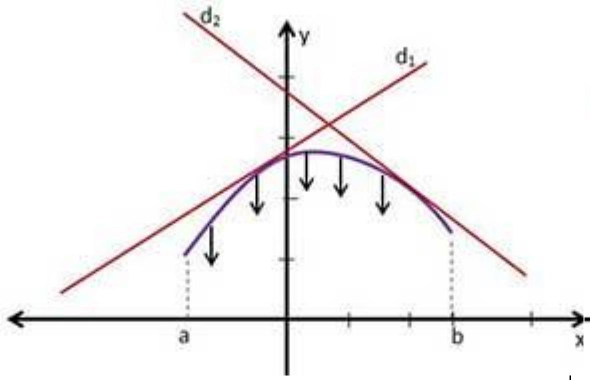
$b = 1$ için $f(1) = \frac{2}{5}(1)^5 - \frac{5}{3}(1)^3 + 2(1) = \frac{2}{5} - \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{5}$

iii) Bulunan tüm değerler karşılaştırılırsa:

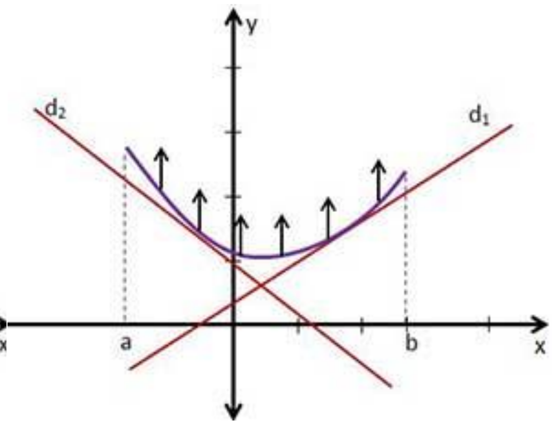
$-\frac{19\sqrt{2}}{30} < -\frac{11}{5} < \frac{11}{5} < \frac{19\sqrt{2}}{30}$ olduğundan; $\underset{x\in[-1\,,+1]}{\text{EKD}} f(x) = -\frac{19\sqrt{2}}{30}$ ve $\underset{x\in[-1\,,+1]}{\text{EBD}} f(x) = \frac{19\sqrt{2}}{30}$ bulunur.

Tanım:10 $x_0 \in (a\,,b)$ noktasının herhangi bir komşuluğunda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, tamamen fonksiyonun x_0 noktasındaki (yani apsisi x_0 olan $(x_0\,,y_0)$ noktasındaki) teğetinin üstünde [veya altında] kalıyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında dış bükey (konveks) [veya iç bükey (konkav)]dir denir.

Fonksiyonun içbükey [veya dışbükey] olduğu tüm noktalar kümesine, fonksiyonun içbükeylik [veya dış bükeylik] bölgesi adı verilir. Sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu, tanım bölgesinin bir kısmında içbükey, diğer kısmında dışbükey olabilir.



Fonksiyon $(a\,,b)$ aralığında içbükey (konkav) dir.



Fonksiyon $(a\,,b)$ aralığında dış bükey (konveks)dir.

Tanım:11 $y = f(x)$ fonksiyonunun içbükey kısmını dışbükey kısmından ayıran noktaya büküm (düğüm) noktası denir.

Teorem:11 $f\colon [a\,,b] \to IR$ fonksiyonunun $(a\,,b)$ aralığında ikinci mertebeden türevi var olsun. Eğer $\forall x \in (a\,,b)$ için $f''(x) > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu $[a\,,b]$ aralığında konvekstir. Eğer $\forall x \in (a\,,b)$ için $f''(x) < 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu $[a\,,b]$ aralığında konkavdır.

Sonuç: (Büküm noktasının varlığı için yeter şart)

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a\,,b]$ aralığında sürekli ve ikinci mertebeden türeve sahip olsun. $x_0 \in (a\,,b)$ olmak üzere $f''(x)$ türevi, x_0 noktasından geçerken işaret değiştiriyorsa $(x_0\,,y_0)$ noktası $y = f(x)$ fonksiyonu için bir büküm noktasıdır.

Sonuç: $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında ikinci mertebeden türevi var ve $(x_0\,,y_0)$ noktası bir büküm noktası ise o zaman $f''(x_0) = 0$ dır. Ancak; bu sonucun tersi doğru değildir.

Örnek:21 $y = f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ fonksiyonunun konveks ve konkav bölgelerini belirleyiniz? Varsa büküm noktalarını bulunuz?

Çözüm: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ fonksiyonu için $D(f) = (-\infty\,,+\infty)$ olup, fonksiyon bu aralıkta süreklidir. Fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden türevleri sırasıyla

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right] \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}\right]$$

olup, bu türevler $x_1 = -1$ ve $x_2 = 1$ noktalarında tanımlı değildir. Buna göre türev fonksiyonları $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında süreklidirler. Bu sebeple bu bölgelerin her birinde $f''(x)$ işaretini korur. Çünkü aralıkların içinde $f''(x) \neq 0$ dır. Her bir aralıkta ikinci türevin işareti referans noktaları seçilerek belirlenebilir.

<table>
<tr><td>Aralık</td><td>Referans Noktası</td><td>$f''(x)$ işareti</td><td>Karar</td><td rowspan="4">$x_1 = -1$ ve $x_2 = 1$ noktalarında $f''(x)$ tanımlı olmamasına rağmen $\left(-1, \sqrt[3]{2}\right)$ ve $\left(1, \sqrt[3]{2}\right)$ noktaları fonksiyonun büküm noktalarıdır.</td></tr>
<tr><td>$(-\infty, -1)$</td><td>$x = -7$</td><td>+ (0,00427)</td><td>Fonksiyon konveks</td></tr>
<tr><td>$(-1, 1)$</td><td>$x = 0$</td><td>- (-0,4444)</td><td>Fonksiyon konkav</td></tr>
<tr><td>$(1, \infty)$</td><td>$x = 7$</td><td>+ (0,2222)</td><td>Fonksiyon konveks</td></tr>
</table>

Örnek:22 $f(x) = x^6 - x^4$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları ve varsa büküm noktalarını bulunuz?

Çözüm: $f(x) = x^6 - x^4$ fonksiyonu için $D(f) = (-\infty, +\infty)$ olup, fonksiyon bu aralıkta sürekli ve her mertebeden türeve sahiptir. Fonksiyonun ikinci mertebeden türevi için işaret incelemesi yapalım.

$f'(x) = 6x^5 - 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 30x^4 - 12x^2 = 30x^2\left(x^2 - \frac{2}{5}\right) = 30x^2\left(x + \sqrt{2/5}\right)\left(x - \sqrt{2/5}\right)$
$\Rightarrow f''(x) = 0$ ise ya $30x^2 = 0$ veya $x + \sqrt{2/5} = 0$ ya da $x - \sqrt{2/5} = 0$ olmalıdır. Böylece $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2/5}$ ve $x_3 = \sqrt{2/5}$ ikinci türev fonksiyonunun kökleridir. Bu türev için işaret tablosu aşağıdadır. Bu tabloya göre;

$\left(-\infty, -\sqrt{2/5}\right)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ konvekstir

$\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, 0\right)$ aralığında $f''(x) < 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ konkavdır

$\left(0, \sqrt{2/5}\right)$ aralığında $f''(x) < 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ konkavdır

$\left(\sqrt{2/5}, \infty\right)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ konvekstir

x	$-\infty$	$-\sqrt{2/5}$		0		$\sqrt{2/5}$		$+\infty$
$30x^2$	+		+	⊙	+		+	
$x + \sqrt{2/5}$	-	⊙	+		+		+	
$x - \sqrt{2/5}$	-		-		-	⊙	+	
$f''(x)$	+	⊙	-	⊙	-	⊙	+	
$f(x)$	∪		∩		∩		∪	

Ayrıca apsisleri $x_2 = -\sqrt{2/5}$ ve $x_3 = \sqrt{2/5}$ olan noktalarda ikinci türevin işareti değiştiği için bu noktalar fonksiyonun büküm noktalarıdır, ancak $x_1 = 0$ noktası bir büküm noktası değildir. Çünkü bu noktada ikinci türevin işareti değişmemektedir.

Örnek:23 $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları ve varsa büküm noktalarını bulunuz?

Çözüm: $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu için $D(f) = (-\infty, +\infty)$ olup, fonksiyon bu aralıkta sürekli ve her mertebeden türeve sahiptir. Fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin sıfır olduğu noktaları ve işaretinin korunduğu aralıkları belirleyelim.

$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow$

$f''(x) = -2e^{-x^2} - (2x)(-2x)e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) = 0 \quad \Rightarrow$ $\forall x \in D(f)$ için $2e^{-x^2} > 0$ olduğundan ya $\sqrt{2}x + 1 = 0$ veya $\sqrt{2}x - 1 = 0$ olmalıdır. Buna göre kökler; $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve ; $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur. İkinci türevin işaret tablosu:

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
$2e^{-x^2}$	+	+	+
$\sqrt{2}x + 1$	- $\quad \odot$	+	+
$\sqrt{2}x - 1$	-	- $\quad \odot$	+
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	∪	∩	∪

Bu tabloya göre;

$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ konvekstir.

$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ aralığında $f''(x) < 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ konkavdır.

$(\sqrt{2}/2, \infty)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ konvekstir.

Ayrıca; $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve ; $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ noktalarının her ikisi de verilen fonksiyon için birer büküm noktasıdır. Çünkü bu noktalarda türevin işareti değişmektedir.

Asimptotlar

<u>Tanım:12</u> $y = f(x)$ fonksiyonu ve sonlu bir a sayısı verilsin $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ise $x = a$ doğrusuna $y = f(x)$ eğrisinin bir düşey asimptotu denir.

* Fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda düşey asimptot aranır.

<u>Tanım:13</u> $y = f(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ ise, $y = b$ doğrusuna $y = f(x)$ eğrisinin bir yatay asimptotu denir.

<u>Tanım:14</u> $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde $\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ veya $\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ olacak şekilde bir $y_1 = g(x)$ eğrisi varsa, bu eğriye $y = f(x)$ eğrisinin bir Eğri Asimptotu denir.

Eğer $y_1 = g(x)$ özel olarak bir doğru denklemi (yani $y_1 = g(x) = a + bx$ şeklinde) ise o zaman $y_1 = g(x)$ doğrusuna $y = f(x)$ eğrisinin bir Eğik Asimptotu denir.

Buna göre ;

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1 \neq 0$ ve $\lim_{x\to\infty} [f(x) - m_1 x] = k_1$ limitleri mevcut ve reel ise bu takdirde $y_1 = m_1 x + k_1$ doğrusuna $y = f(x)$ eğrisinin 1-nci Eğik Asimptotu adı verilir.

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2 \neq 0$ ve $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - m_2 x] = k_2$ limitleri mevcut ve reel ise bu takdirde $y_2 = m_2 x + k_2$ doğrusuna $y = f(x)$ eğrisinin 2-nci Eğik Asimptotu adı verilir.

3) Özel olarak $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,$(n > m;\ n, m \in \mathbb{Z}^+)$ şeklinde bir rasyonel fonksiyon ise bu durumda $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$,$(k < m; k, m \in \mathbb{Z}^+)$ şeklinde yazılabilir. Bu yazılışta $T_{n-m}(x)$ polinom fonksiyonu, $f(x)$ fonksiyonu için bir eğik asimptottur.

<u>Örnek:24</u> $y = f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$ fonksiyonunun asimptotlarını araştırınız?

<u>Çözüm:</u> <u>i) Düşey asimptot:</u> Fonksiyon $x = 0$ noktasında tanımsız olduğundan bu noktada düşey asimptot olabilir. Eğer $a \in IR$ olmak üzere $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ise $x = a$ doğrusu düşey asimptottur. $a = 0$ için;

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ doğrusu (} y \text{ ekseni) bir düşey asimptottur.}$$

<u>ii) Yatay asimptot:</u> $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ ise, $y = b$ doğrusu yatay asimptottur.

$$|x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 \ , & \left(-\infty < x \leq -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3} \leq x < \infty\right) \\ -(x^2 - 3) \ , & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x} = 1$$ olduğundan $y = 1$ doğrusu bir yatay asimptottur.

<u>iii) Eğik Asimptot:</u> $m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ olduğundan 1-nci eğik asimptot yoktur.

$m_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x^2} = \frac{1}{-\infty} = 0$ olduğundan 1-nci eğik asimptot yoktur.

<u>Örnek:25</u> $y = f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x}$ fonksiyonunun asimptotlarını araştırınız, varsa bulunuz?

<u>Çözüm:</u> <u>i) Düşey asimptot:</u> $D(f) = IR - \{0\}$ olup, $x = 0$ noktasında düşey asimptot olabilir.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x-3}{x} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x-3}{x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ olduğundan $x = 0$ doğrusu bir düşey asimptottur

<u>ii) Yatay asimptot:</u> $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x} = +\infty$ $(n = 2 > m = 1\ olduğundan)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-3}{x} = -\infty$ $(n = 2 > m = 1\ olduğundan)$

Bu sonuçlara göre yatay asimptot yoktur.

<u>iii) Eğik Asimptot:</u> $m_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2} = 1 \neq 0$ ($n = m = 2$ olduğından)

$k_1 = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - m_1x] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-3}{x} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x}\right) = 2$ olduğundan $y_1 = m_1x + k_1 = x + 2$ doğrusu 1-nci eğik asimptottur.

$m_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2} = 1 \neq 0$ ($n = m = 2$ olduğından)

$k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - m_2x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+2x-3}{x} - x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x}\right) = 2$ olduğundan $y_2 = m_2x + k_2 = x + 2$ doğrusu 2-nci eğik asimptottur.