BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım:1 Verilen bir aralığın tüm noktalarında $F'(x)=f(x)$ eşitliğini sağlayan $F(x)$ fonksiyonuna, bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu denir.

Örneğin; $F(x)=\sin 2x$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında $f(x)=2\cos 2x$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonudur. Çünkü; $F'(x)=2\cos 2x=f(x)$ dir. $F(x)=\tan x$ fonksiyonu $(-\pi/2,\pi/2)$ aralığında ve aynı zamanda, $k\in\mathbb{Z}$ için $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ aralıklarında, $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonudur. Çünkü $F'(x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=f(x)$ dir. $F(x)=\ln x$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında, $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonun bir ilkel fonksiyonudur. Çünkü $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}=f(x)$ dir. v.s.

Özellik: 1. $F(x)$ fonksiyonu herhangi bir aralıkta $f(x)$'in ilkel fonksiyonu ise, $F(x)+C$ fonksiyonu da $f(x)$ in bir ilkel fonksiyonudur.

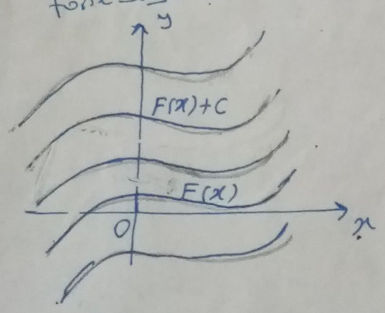
Gerçekten; verilen bir aralıkta $F(x)$, $f(x)$'in bir ilkel fonksiyonu olduğundan $F'(x)=f(x)$ dir. $[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)$ olup, $F(x)+C$'de $f(x)$ in bir ilkel fonksiyonudur.

2. $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları herhangi bir aralıkta aynı bir $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonları ise, o zaman $F(x)-G(x)=C$ (sabit) dir.

Gerçekten: $F(x)$ ve $G(x)$, verilen bir aralıkta aynı bir $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonları olsun. $\Rightarrow F'(x)=f(x)$ ve $G'(x)=f(x)$ dir. $[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0 \Rightarrow F(x)-G(x)=C$ (sabit) bulunur.

Bu özelliklere göre; $F(x)$, $f(x)$ in bir ilkel fonksiyonu ise, $f(x)$ in tüm ilkel fonksiyonları $F(x)+C$ şeklindedir.

Örneğin; $f(x)=\frac{1}{x}$ in tüm ilkel fonksiyonları $(0,\infty)$ aralığında $\ln x+C$ şeklindedir.



Tanım:2 Verilen bir (a,b) aralığında $f(x)$ fonksiyonunun tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine $f(x)$ fonksiyonunun bu aralıktaki BELİRSİZ İNTEGRALİ denir ve $\int f(x)\,dx$ şeklinde yazılır.

$f(x)$ in tüm ilkel fonksiyonlarının bulunmasına, $f(x)$ in integrallenmesi denir. Burada $\int$: integral işareti, $f(x)dx$: integral altı ifade,

$f(x)$: integral içi fonksiyon ve x: integralleme değişkenidir. Ve

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad \text{-----} \quad (1)$$

formülü geçerlidir. Buna göre; $f(x)=\frac{1}{x}$ ise;

$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \Rightarrow F(x)+C = \ln x + C$ dır.

$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ise $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$ olur.

Özellik: ① $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$ 2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$ 3) $\int dF(x) = F(x)+C$

④ $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi bir aralıkta integrallenebilen fonksiyonlar ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için bu aralıkta

a) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

b) $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ dır.

⑤ Herhangi bir aralıkta $F'(x)=f(x)$ ise, bu aralıkta

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $(a\neq 0)$ dır.

Gerçekten: Verilen bir aralıkta $F'(x)=f(x)$ olsun. $\Rightarrow \left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' =$

$\frac{1}{a}\cdot F'(ax+b)\cdot a = F'(ax+b) = f(ax+b) \Rightarrow \int f(ax+b)\,dx = \int\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]'dx \Rightarrow$

$\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ olur.

Örneğin: $\int \cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$

ÖRNEK:1 Verilen fonksiyonların ilkel fonksiyonlarını bulunuz?

a) $f(x)=3x^8$ b) $f(x)=5\sqrt[4]{x}$ c) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$ d) $f(x)=e^{3-2x}$

e) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 5x}$

Çözüm: $F'(x)=f(x)$ eşitliğini sağlayan $F(x)$ fonksiyonlarını bulmalıyız.

a) $f(x)=3x^8 \Rightarrow$ ilkel fonksiyonu $F(x)=\frac{1}{3}x^9+C$ dur. Çünkü $F'(x)=3x^8=f(x)$ dir.

Tanım.2 ve öz.5 dikkate alındığında;

$\int f(x)\,dx = \int 3x^8\,dx = 3\int x^8\,dx = 3\cdot\frac{1}{9}x^9+C = \frac{1}{3}x^9+C = F(x)$

b) $f(x)=5\sqrt[4]{x} = 5x^{1/4} \Rightarrow$ ilkel fonksiyonu $F(x)=5\cdot\frac{1}{5/4}\cdot x^{5/4} = 4x^{5/4}+C$

dir. Çünkü $F'(x)=5x^{1/4} = 5\sqrt[4]{x} = f(x)$ dir.

$\int f(x)\,dx = \int 5\sqrt[4]{x}\,dx = 4\sqrt[4]{x^5}+C = F(x)$

c) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ $\Rightarrow$ İlkel fonksiyonu $F(x) = 2\ln|x| - \frac{3}{x} + c$ dir. Çünkü

$F'(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = f(x)$ dir. Buna göre $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x^2}\,dx$

$= 2\ln|x| - \frac{3}{x} + c = F(x)$ olur.

d) $f(x) = e^{3-2x}$ $\Rightarrow$ İlkel fonksiyonu $F(x) = -\frac{1}{2} e^{3-2x} + c$ dir. Çünkü

$F'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)\, e^{3-2x} = e^{3-2x} = f(x)$ dir. Buna göre;

$\int f(x)\,dx = \int e^{3-2x}\,dx = -\frac{1}{2} e^{3-2x} + c = F(x)$ dis.

e) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 5x}$ $\Rightarrow$ İlkel fonksiyonu $F(x) = \frac{1}{5} \tan 5x + c$ dir. Çünkü

$F'(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{\cos^2 5x} = \frac{1}{\cos^2 5x} = f(x)$ dir. Buna göre $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 5x}\,dx =$

$= \frac{1}{5} \tan 5x + c = F(x)$ olur.

İNTEGRAL HESAPLAMA METOTLARI

I. DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME METODU

$I=\int f(x)\,dx$ integrali verilsin. $x=\varphi(t)$ değişken değiştirmesini yapalım. B
takdirde; $dx=\varphi'(t)\,dt$ ve böylece $I=\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt$
elde edilir. Buna göre x-değişkenine göre verilen integral, t-değişkeni
göre integrale dönüşür. Sonuç olarak; bu integral çözüldükten sonra,
edilen ifade de $t=\varphi^{-1}(x)$ yazılır.

Bazı özel değişken değiştirmeler:

1) İntegral altındaki ifade de sadece, $\sqrt{a^2-x^2}$ ifadesi varsa, $x=a\sin$
(veya $x=a\cos t$) değişken değişimi uygulanır. Ayrıca $x=a/t$ değiş
değişimi de uygulanabilir. $(a>0)$

2) İntegral altındaki ifade de sadece $\sqrt{x^2-a^2}$ ifadesi varsa; $x=\frac{a}{\cos}$
$x=a\sec t$, $x=a\cosh t$ veya $x=\frac{a}{t}$ değişken değişimi uygulanabilir.

3) İntegral altındaki ifade de sadece $\sqrt{a^2+x^2}$ ifadesi varsa; $x=at$
$x=a\sinh t$, $x=a\cosh t$ veya $x=\frac{a}{t}$ değişken değişimi uygulanabil

4) İntegral altındaki ifade de $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ ifadesi varsa, $x=a\cos 2t$
ken değişimi uygulanır.

5) İntegral altındaki fonksiyon $\sqrt[n_i]{ax+b}$ şeklindeki ifadeler
yorsa, E.K.O.K $(n_1,n_2,\dots,n_i,\dots)=p$ olmak üzere $ax+b=t^p$ değiş
değişimi uygulanır.

6) İntegral altındaki fonksiyon, trigonometrik fonksiyonların r
ifadesi ise; $\tan\frac{x}{2}=t$ değişken değişimi uygulanır. Bu duru

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ ve $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$ dir.

ÖRNEK:2 Verilen integralleri hesaplayınız?

a) $\int x\sqrt{4+3x^2}\,dx$ b) $\int \frac{e^x\,dx}{3+2e^x}$ c) $\int \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\,dx$ d) $\int 5^{2\sin x}\cdot\cos x\,dx$

e) $\int x\cos(3x^2+1)\,dx$ f) $\int \tan x\,dx$ g) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$ h) $\int \sin^2 x\,dx$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$ j) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}$ k) $\int \frac{e^x\,dx}{4+e^{2x}}$ l) $\int (3x^3+2)^2\,dx$

m) $\int \frac{x^5+2x^4-3x^3+1}{x^2+4}\,dx$ n) $\int \frac{dx}{\sin x}$

Çözüm: a) $I=\int x\sqrt{4+3x^2}\,dx$, $x\,dx=\frac{1}{6}\,d(4+3x^2)$ şeklinde yazalım ve Formül. 3'ü uygulayalım.

$$I=\int x\sqrt{4+3x^2}\,dx=\int (4+3x^2)^{1/2}\cdot\frac{1}{6}\,d(4+3x^2)=\frac{1}{6}\int (4+3x^2)^{1/2}\,d(4+3x^2)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot(4+3x^2)^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{9}(4+3x^2)^{3/2}+C$$ // bulunur.

b) $I=\int \frac{e^x\,dx}{3+2e^x}$, $e^x\,dx=\frac{1}{2}\,d(3+2e^x)$ yazalım ve Formül. 4'ü uygulayalım.

$$I=\int \frac{\frac{1}{2}\,d(3+2e^x)}{3+2e^x}=\frac{1}{2}\int \frac{d(3+2e^x)}{3+2e^x}=\frac{1}{2}\ln|3+2e^x|+C$$ // bulunur.

c) $I=\int \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\,dx$, $(a^x-a^{-x})\,dx=\frac{1}{\ln a}\,d(a^x+a^{-x})$, Formül. 4'ü uygula.

$$I=\int \frac{\frac{1}{\ln a}\,d(a^x+a^{-x})}{a^x+a^{-x}}=\frac{1}{\ln a}\int \frac{d(a^x+a^{-x})}{a^x+a^{-x}}=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln|a^x+a^{-x}|+C$$ //

bulunur.

d) $I=\int 5^{2\sin x}\cdot\cos x\,dx$, $\cos x\,dx=\frac{1}{2}d(2\sin x)$, Formül. 5 'i uygula

$I=\int 5^{2\sin x}\cdot\frac{1}{2}d(2\sin x)=\frac{1}{2}\int 5^{2\sin x}\,d(2\sin x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 5}5^{2\sin x}+c$

$=\frac{1}{\ln 25}5^{2\sin x}+C$ // bulunur.

e) $I=\int x\cos(3x^2+1)\,dx$, $x\,dx=\frac{1}{6}d(3x^2+1)$, Formül. 7 yi uygula.

$I=\int\cos(3x^2+1)\,\frac{1}{6}d(3x^2+1)=\frac{1}{6}\int\cos(3x^2+1)\,d(3x^2+1)=\frac{1}{6}\sin(3x^2+1)+C$ //

bulunur.

f) $I=\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$, $\sin x\,dx=-d(\cos x)$ ve Formül. 4 uyg.

$I=\int\frac{-d\cos x}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$ // bulunur.

g) $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$, $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3)$ ve Formül. 15'i uyg.

$I=\int\frac{\frac{1}{3}dx^3}{\sqrt{1-(x^3)^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{\sqrt{1-(x^3)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$ // bulunur.

h) $I=\int\sin^2x\,dx$, $\sin^2x=1-\cos^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ olduğundan

$I=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\int dx-\int\cos 2x\,dx\right]=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$

$dx=\frac{1}{2}d(2x)$, Formül. 7.

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x\,.\,d(2x)$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}(\sin 2x)+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$ // bulunur.

i) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\Rightarrow d\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,d\sqrt{x}$ olduğundan, (Formül:9)

$I=\int\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\frac{2\,d\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}=2\tan\sqrt{x}+C$ // bulunur.

j) $I=\int\frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ olduğundan, (Formül:3)

$I=\int\frac{1}{(\arcsin x)^5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{(\arcsin x)^5}\cdot d(\arcsin x)=-\frac{1}{4}(\arcsin x)^{-4}+C$ //

elde edilir.

k) $I = \int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}} = \int \frac{e^x dx}{4+(e^x)^2}$, $\Rightarrow$ $d(e^x) = e^x . dx$ olduğundan, (Formül:16)

$I = \int \frac{d e^x}{2^2+(e^x)^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x}{2} + c$ // elde edilir.

l) $I = \int (3x^3+2)^2 dx = \int (9x^6+12x^3+4) dx = 9\int x^6 dx + 12\int x^3 dx + 4\int dx$

$= \frac{9}{7} x^7 + \frac{12}{4} x^4 + 4x + c = \frac{9}{7} x^7 + 3x^4 + 4x + c$ // bulunur.

m) $I = \int \frac{x^5+2x^4-3x^3+1}{x^2+4} dx$, $n=5$ pay kısmındaki polinomun derecesi
$m=2$ paydadaki " "
$n>m$ ise pay, paydaya bölünerek, düzenleme yapılır.

$$\frac{x^5+2x^4-3x^3+1}{x^2+4} = x^3+2x^2-7x-8+\frac{28x+33}{x^2+4}$$ olduğundan

$$I = \int \left(x^3+2x^2-7x-8+\frac{28x}{x^2+4}+\frac{33}{x^2+4}\right) dx$$

$= \int x^3 dx + 2\int x^2 dx - 7\int x dx - 8\int dx + 28\int \frac{x\,dx}{x^2+4} + 33\int \frac{dx}{x^2+2^2}$, (Formül:16)

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 8x + 28\int \frac{\frac{1}{2} d(x^2+4)}{x^2+4} + \frac{33}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$, (Formül:4)

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 8x + 14\ln(x^2+4) + \frac{33}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$ // bulunur.

n) $I = \int \frac{dx}{\sin x}$ $\Rightarrow$ $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$ ve $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ olduğu dikkate alınırsa; integral içindeki fonksiyon:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)$$ yazılır. Buna göre

$$I = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx + \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} dx\right]$$

$d(\sin\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} dx \Rightarrow \cos\frac{x}{2} . dx = 2\, d(\sin\frac{x}{2})$

$d(\cos\frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} dx \Rightarrow \sin\frac{x}{2} dx = -2\, d(\cos\frac{x}{2})$ olduğundan

$$I = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2\, d(\sin\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} + \int \frac{-2\, d(\cos\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}}\right] = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$ //

bulunur.

ÖRNEK: 3 Verilen integralleri hesaplayınız?

a) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$ b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}},\ a>0$ c) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}},\ a>0$ n) $\int \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\cos x)}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}},\ a>0$ e) $\int \frac{dx}{a+e^{bx}},\ a>0$ f) $\int \sqrt{a^2+e^{bx}}\,dx$ daha sonra

g) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ h) $\int \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ i) $\int \frac{2\sin\sqrt{x}-3\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sin 2\sqrt{x}}\,dx$

j) $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^4+3x^2+1)\arctan\frac{x^2+1}{x}}$ k) $\int \frac{e^x\,dx}{3+2e^x}$ l) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}\,dx$

m) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

Çözüm a) $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $(a>0)$, $x=a\sin t$ dersek $dx=a\cos t\,dt$ olacağından:

$$I=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt=\int a^2\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt$$

$$=a^2\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(\int dt+\int\cos 2t\,dt\right)=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$x=a\sin t \Rightarrow \sin t=\frac{x}{a} \Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{a}$ yerine koyarsak:

$$I=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right)\right]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\right]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C \quad //$$ bulunur.

b) $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$, $(a>0)$. $x=\frac{a}{t}$ dersek $dx=-\frac{a}{t^2}dt$ olur. Bu durumda,

$$I=\int\frac{-a/t^2}{\frac{a}{t}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{t^2}}}\,dt=-\int\frac{a/t^2}{\frac{a}{t}\cdot\sqrt{\frac{a^2(t^2-1)}{t^2}}}\,dt=-\int\frac{\cancel{a/t^2}}{\frac{\cancel{a}}{\cancel{t^2}}\cdot a\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$, (Formül 17'den, $a=1$ için)

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C,\ x=\frac{a}{t}\Rightarrow t=\frac{a}{x}$$ yazarsak;

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right|+C=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C \quad //$$ bulunur.

c) $I=\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}$, $(a>0)$ $x=a/\cos t$ dersek $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ olur. Buna göre:

$$I=\int\frac{a\sin t/\cos^2 t}{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2\right)^{3/2}}\,dt=\int\frac{a\sin t/\cos^2 t}{\left[a^2(1-\cos^2 t)\right]^{3/2}/(\cos^2 t)^{3/2}}\,dt=\int\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\cdot\frac{\cos^3 t}{a^3\sin^3 t}\,dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt,$$ $u=\sin t$ dersek, $du=\cos t\,dt$

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{a^2}\int u^{-2}du = \frac{1}{a^2}\cdot\left(-u^{-1}\right)+C = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{u}+C \;;\quad u=\sin t \text{ old.}$$

$$= -\frac{1}{a^2\sin t}+C, \qquad x=\frac{a}{\cos t} \Rightarrow \cos t = \frac{a}{x} \Rightarrow t=\arccos\frac{a}{x} \text{ old.}$$

$$= -\frac{1}{a^2\sin\left(\arccos\frac{a}{x}\right)}+C = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}+C = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}+C$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+C \;//$$ bulunur.

II. yol $\quad I = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}, \quad x=\frac{a}{t}$ diyelim. $\Rightarrow dx = -\frac{a}{t^2}dt$

$$I = \int \frac{-a/t^2}{\left(\frac{a^2}{t^2}-a^2\right)^{3/2}}dt = -\int \frac{a/t^2}{\frac{a^3}{t^3}(1-t^2)^{3/2}}dt = -\int \frac{a}{t^2}\cdot\frac{t^3}{a^3(1-t^2)^{3/2}}dt$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}dt \;; \qquad u=1-t^2 \Rightarrow du=-2t\,dt \Rightarrow t\,dt = -\frac{1}{2}du$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int \frac{-\frac{1}{2}du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2a^2}\int u^{-\frac{3}{2}}du = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\cdot u^{-\frac{1}{2}}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}+C = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+C, \quad (u=1-t^2 \text{ old.}) \quad x=\frac{a}{t} \Rightarrow t=\frac{a}{x}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}+C = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C \;//$$ bulunur.

d) $I = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, \ (a>0) \quad x=a\tan t$ dersek $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$ olur. Buna göre:

$$I = \int \frac{a/\cos^2 t}{\left[a^2(1+\tan^2 t)\right]^{3/2}}dt = \int \frac{a}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{a^3(1+\tan^2 t)^{3/2}}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{3/2}}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C, \quad x=a\tan t \Rightarrow t=\arctan\frac{x}{a}$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin\left(\arctan\frac{x}{a}\right)+C = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x/a}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+C = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C \;//$$ bulunur

Not: Aynı integrali $x = a\sinh t$, $x = a\cosh t$ ve $x = a/t$ değişken değiştirme-leri uygulayarak da çözebiliriz.

e) $I = \int \frac{dx}{a+e^{bx}}$, $(a>0)$ $\quad t = a+e^{bx}$ diyelim. $\Rightarrow e^{bx} = t-a \Rightarrow$

$bx = \ln(t-a) \Rightarrow x = \frac{1}{b}\ln(t-a) \Rightarrow$

$dx = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{t-a}\,dt$

$$I = \int \frac{\frac{1}{b(t-a)}}{t}\,dt = \int \frac{1}{b(t-a)}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t(t-a)} \quad \text{---- } (*)$$

İntegral içinde yer alan $\frac{1}{t(t-a)}$ fonksiyonunu, basit kesirlerin toplamı şeklinde yazalım.

$$\frac{1}{t(t-a)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-a} = \frac{A(t-a)+Bt}{t(t-a)} = \frac{(A+B)t - Aa}{t(t-a)} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ -Aa = 1 \\ A = -\frac{1}{a},\ B = \frac{1}{a} \end{array}$$

$$\frac{1}{t(t-a)} = \frac{-1/a}{t} + \frac{1/a}{t-a} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t}\right)$$ olacağından

$$I = \frac{1}{b}\int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{ab}\left[\int\frac{dt}{t-a} - \int\frac{dt}{t}\right] = \frac{1}{ab}\left[\ln|t-a| - \ln|t|\right] + C$$

$= \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{t-a}{t}\right| + C$, $\quad t = a+e^{bx}$ olduğundan $t-a = e^{bx}$ olur, ve böylece

$= \frac{1}{ab}\ln\frac{e^{bx}}{a+e^{bx}} + C$ // bulunur.

f) $I = \int\sqrt{a^2+e^{bx}}\,dx$, $\quad t = \sqrt{a^2+e^{bx}}$ diyelim. $\Rightarrow t^2 = a^2+e^{bx} \Rightarrow e^{bx} = t^2-a^2$

$\Rightarrow bx = \ln(t^2-a^2) \Rightarrow x = \frac{1}{b}\ln(t^2-a^2) \Rightarrow$

$dx = \frac{2}{b}\frac{t}{t^2-a^2}\,dt$ olur. Buna göre:

$$I = \int t\cdot\frac{2t}{b(t^2-a^2)}\,dt = \frac{2}{b}\int\frac{t^2}{t^2-a^2}\,dt = \frac{2}{b}\int\left(1+\frac{a^2}{t^2-a^2}\right)dt$$

$= \frac{2}{b}\left[\int dt + a^2\int\frac{dt}{t^2-a^2}\right] = \frac{2}{b}\left[t + a^2\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|\right] + C$, (Formül: 2 ve Formül: 19'dan)

$= \frac{2}{b}\left[t + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|\right] + C$, $\quad t = \sqrt{a^2+e^{bx}}$ olduğundan

$$= \frac{2}{b}\left[\sqrt{a^2+e^{bx}} + \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2+e^{bx}}-a}{\sqrt{a^2+e^{bx}}+a}\right] + C$$ // bulunur.

g) $I=\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$, $x=a\cos 2t$ diyelim. $\Rightarrow dx=-2a\sin 2t\,dt$ olur. Buna göre:

$(1+\cos 2t=2\cos^2 t;\ 1-\cos 2t=2\sin^2 t)$

$I=\int\sqrt{\frac{a+a\cos 2t}{a-a\cos 2t}}\cdot(-2a\sin 2t)\,dt=-2a\int\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}\,\sin 2t\,dt$, $(\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t$, $\sin 2t=2\sin t\cos t$ old.)

$=-2a\int\sqrt{\frac{\cancel{2}\cos^2 t}{\cancel{2}\sin^2 t}}\cdot 2\sin t\cos t\,dt=-4a\int\cos^2 t\,dt$, $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ old.

$=-4a\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=-2a\left(\int dt+\int\cos 2t\,dt\right)=-2a\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$

$=-a(2t+\sin 2t)+C$, $x=a\cos 2t\Rightarrow\cos 2t=\frac{x}{a}\Rightarrow 2t=\arccos\frac{x}{a}\Rightarrow$

$t=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{a}$ dolayısıyla

$=-a\left[2\cdot\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{a}+\sin\left(2\cdot\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{a}\right)\right]+C=-a\left[\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]+C$

$=-a\cdot\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$ // bulunur.

*h) $I=\int\frac{\cos x\cdot\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$, $t=\cos x$ dersek $dt=-\sin x\,dx$ olur. Buna göre

$I=\int\frac{t(-dt)}{\sqrt{1+t^2}}=-\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$, $u=1+t^2\Rightarrow du=2t\,dt\Rightarrow t\,dt=\frac{1}{2}du$

$=-\int\frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1/2}\cdot u^{1/2}+C=-\sqrt{u}+C$, $u=1+t^2$ old.

$=-\sqrt{1+t^2}+C$, $t=\cos x$ old.

$=-\sqrt{1+\cos^2 x}+C$ // bulunur.

II. yol $I=\int\frac{\cos x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx=\int(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cos x\sin x\,dx$, $d(1+\cos^2 x)=-2\cos x\sin x\,dx$

$\cos x\sin x\,dx=-\frac{1}{2}d(1+\cos^2 x)$

$=-\frac{1}{2}\int(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+\cos^2 x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1/2}(1+\cos^2 x)^{1/2}+C$

$=-\sqrt{1+\cos^2 x}+C$ // bulunur.

i) $I=\int \frac{2\sin\sqrt{x}-3\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sin 2\sqrt{x}}\,dx$, $t=\sqrt{x}$ dersek $\Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$ olur. Buna göre:

$$I=\int \frac{2\sin t-3\cos t}{t\sin 2t}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{2\sin t-3\cos t}{\sin 2t}\,dt = 2\int \frac{2\sin t-3\cos t}{2\sin t.\cos t}\,dt$$

$$=2\left[\int \frac{dt}{\cos t}-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sin t}\right] = 2\int \frac{dt}{\cos t}-3\int \frac{dt}{\sin t}$$, $\tan\frac{t}{2}=u$ dersek $\Rightarrow$

$\frac{t}{2}=\arctan u \Rightarrow t=2\arctan u \Rightarrow dt=2\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{2\,du}{1+u^2}$

$$\cos t=\cos(2\arctan u)=\cos^2(\arctan u)-\sin^2(\arctan u)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2-\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2$$

$$=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin t=\sin(2\arctan u)=2\sin(\arctan u).\cos(\arctan u)=2.\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{2u}{1+u^2}$$

olur. Buna göre:

$$I=2\int \frac{2\,du/1+u^2}{1-u^2/1+u^2}-3\int \frac{2\,du/1+u^2}{2u/1+u^2}=2\int \frac{2\,du}{1-u^2}-3\int \frac{\cancel{2}\,du}{\cancel{2}u}$$

$$=4\underbrace{\int \frac{du}{1-u^2}}_{F.18}-3\underbrace{\int \frac{du}{u}}_{F.4}=4.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|-3.\ln|u|+C,$$ $u=\tan\frac{t}{2}$ old.

$$=2\ln\left|\frac{1+\tan\frac{t}{2}}{1-\tan\frac{t}{2}}\right|-3\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C=2\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-3\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C;$$

$t=\sqrt{x}$ old.

$$=2\ln\left|\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-3\ln\left|\tan\frac{\sqrt{x}}{2}\right|+C$$ // bulunur.

*j) $I=\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^4+3x^2+1)\arctan\frac{x^2+1}{x}}$, $t=\frac{x^2+1}{x}$ dersek, $dt=\frac{2x.x-(x^2+1).1}{x^2}\,dx$

$=\frac{x^2-1}{x^2}\,dx$ olur.

İntegral içerisinde bu terimi elde edebilmek için, pay kısmını x^2 ile bir çarpıp, bir bölelim.

$$I=\int \frac{\frac{x^2(x^2-1)}{x^2}\,dx}{(x^4+3x^2+1)\arctan\frac{x^2+1}{x}}=\int \frac{\frac{x^2-1}{x^2}\,dx}{\frac{(x^4+3x^2+1)}{x^2}\arctan\frac{x^2+1}{x}}=\int \frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)\arctan\frac{x^2+1}{x}}$$

$$=\int \frac{\frac{x^2-1}{x^2}\,dx}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\right]\arctan\frac{x^2+1}{x}}=\int \frac{dt}{(t^2+1)\arctan t}$$, $u=\arctan t \Rightarrow du=\frac{dt}{1+t^2}$

$$=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\arctan t|+C=\ln\left|\arctan\frac{x^2+1}{x}\right|+C$$ // bulunur.

* k) $I=\int \frac{e^x dx}{3+2e^x}$, $t=3+2e^x$ dersek $dt=2e^x dx \Rightarrow e^x dx=\frac{1}{2}dt$ olur.

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln|3+2e^x|+C$ // bulunur.

* l) $I=\int \frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}dx$, $t=\cos x$ dersek $dt=-\sin x\, dx \Rightarrow \sin x\, dx=-dt$ olur.

$I=-\int \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}} = -\ln|t+\sqrt{4+t^2}|+C$, (F.17'den $a=2$ için)

$=-\ln|\cos x+\sqrt{4+\cos^2 x}|+C$ // bulunur

m) $I=\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$, $\sqrt[n_i]{ax+b}$ durumunu kapsıyor. Kök kuvvetleri $n_1=2$, $n_2=3$ olup, E.K.O.K. $(2,3)=2\times 3=6=p$ dir. Burada $t^p=ax+b$, $p=6$, $a=1$, $b=1$ old. $t^6=x+1$ değişken değiştirmesi yapılır.

$t^6=x+1 \Rightarrow dx=6t^5dt$ olur.

$I=\int \frac{\sqrt{t^6}+1}{\sqrt[3]{t^6}}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{(t^3+1)t^5}{t^2}dt = 6\int(t^6+t^3)dt = 6\left[\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right]+C$

$= \frac{6}{7}t^7+\frac{3}{2}t^4+C$, $t^6=x+1 \Rightarrow t=(x+1)^{1/6}$ old.

$= \frac{6}{7}(x+1)^{7/6}+\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+C$ // bulunur.

n) $I=\int \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx$, İntegral altındaki fonksiyon, trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi olduğundan, burada $\tan\frac{x}{2}=t$ değişken değiştirmesi yapılır.

$\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow \frac{x}{2}=\arctan t \Rightarrow x=2\arctan t \Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$\sin x=\sin(2\arctan t)=2\sin(\arctan t)\cos(\arctan t)=2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x=\cos(2\arctan t)=\cos^2(\arctan t)-\sin^2(\arctan t)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$I=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{(t^2+2t+1)/(1+t^2)}{2(1-t^2)/(1+t^2)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$

$=\cancel{2}\int \frac{t^2+2t+1}{\cancel{(1+t^2)}}\cdot\frac{(1+t^2)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}(1-t^2)}\cdot\frac{dt}{\cancel{(1+t^2)}} = \int \frac{(1+t)^{\cancel{2}}}{\cancel{(1+t)}(1-t)}dt = \int \frac{1+t}{1-t}dt = \int\left(-1+\frac{2}{1-t}\right)dt$

$=-\int dt+2\int\frac{dt}{1-t} = -t-2\ln|1-t|+C = -\tan\frac{x}{2}-2\ln|1-\tan\frac{x}{2}|+C$ // bulunur.