T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

İST.357 VARYANS ANALİZİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

2. Hafta

özenilen üniversite

2.2 PARAMETRE TAHMİNİ

Sabit etkili dengeli tek yönlü varyans analizi modeli için model denklemi:

$$Y_{j\,i} = \mu_{..} + \tau_j + \varepsilon_{j\,i} \quad , j = 1,2,\dots,k; i = 1,2,\dots,n \tag{2.2}$$

olup, burada $\varepsilon_{j\,i} \sim BND(0\,,\ \sigma_\varepsilon^2)$ olduğu varsayılır. Bu nedenle model parametrelerinin tahmini hem En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ile hem de En Çok Olabilirlik (EÇO) yöntemi ile yapılabilir. Her iki yöntemde aynı tahmin edicileri vermektedir. EKK yöntemi Hata Kareler Toplamını (HKT) minimize ederek parametreleri tahmin etmeyi amaçlarken, EÇO yöntemi olabilirlik fonksiyonunu maksimize ederek parametreleri tahmin etmeyi amaçlamaktadır. Hatalar üzerindeki varsayım gereğince EKK tahmin edicileri en güçlü tahmin edicilerdir. Burada model parametreleri $\mu_{..}$, τ_j ve $\mu_{j\,.}$ ile hata varyansı σ_ε^2'nin EKK tahmin edicileri elde edilecektir.

$$HKT = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{ji}^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2 \tag{2.3}$$

$\mu_{..}$–parametresinin tahmini:

$$\frac{\partial HKT}{\partial \mu_{..}} = (-2)\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \hat{\mu}_{..} - \tau_j\right) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} y_{ji} - kn\hat{\mu}_{..} - n\sum_{j=1}^{k}\tau_j = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{k}\tau_j = 0$ olduğu dikkate alındığında

$$\hat{\mu}_{..} = \frac{1}{k*n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} y_{ji} = \frac{T_{..}}{N} = \overline{Y}_{..} \tag{2.4}$$

elde edilir.

$\mu_{j\,.}$–parametresinin tahmini: Önce Eşitlik (2.3)'de $\tau_j = \mu_{j\,.} - \mu_{..}$ yazarak HKT yeniden ifade edilirse;

$HKT = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{ji}^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\Big(y_{ji} - \mu_{..} - \left(\mu_{j\,.} - \mu_{..}\right)\Big)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{j\,.}\right)^2$ olur. Şimdi bu ifadeyi minimize edecek şeklide $\mu_{j\,.}$ parametresi tahmin edilebilir.

$\frac{\partial HKT}{\partial \mu_{j\,.}} = \frac{\partial}{\partial \mu_{j\,.}}\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{j\,.}\right)^2\right] = \frac{\partial}{\partial \mu_{j\,.}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{j\,.}\right)^2\right] =$
$(-2)\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \hat{\mu}_{j\,.}\right) = 0 \;\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_{ji} - n\,\hat{\mu}_{j\,.} = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_{j\,.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ji}$ elde edilir.
Buna göre:

$$\hat{\mu}_{j\,.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ji} = \frac{T_{j\,.}}{n} = \overline{Y}_{j\,.} \quad , j = 1,2,\dots,k \tag{2.5}$$

bulunur.

τ_j–parametresinin tahmini: Eşitlik (2.3) den $\frac{\partial HKT}{\partial \tau_j} = \frac{\partial}{\partial \tau_j}\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2\right] = 0$ olmalı $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial \tau_j}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2\right] = (-2)\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \hat{\mu}_{..} - \hat{\tau}_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_{ji} - n\,\hat{\mu}_{..} - n\hat{\tau}_j = 0 \Rightarrow \hat{\tau}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ji} - \hat{\mu}_{..}$ olup, böylece;

$$\hat{\tau}_j = \overline{Y}_{j\,.} - \overline{Y}_{..} \tag{2.6}$$

elde edilir.

σ_ε^2 - parametresinin tahmini: $E(\varepsilon) = 0$ olduğundan hata varyansı, $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_{ji} - 0\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2$ olup, EKK tahmin edicisi

$$(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \hat{\mu}_{..} - \hat{\tau}_j\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \overline{Y}_{..} - \overline{Y}_{j\,.} + \overline{Y}_{..}\right)^2$$

$$(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \overline{Y}_{j\,.}\right)^2 \tag{2.7}$$

olarak bulunur.

<u>Teorem 2.1</u> Eşitlik (2.7) ile verilen $(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N$ tahmin edicisi, σ_ε^2 parametresi için yanlı bir tahmin edicidir. σ_ε^2 parametresi için yansız bir tahmin edici:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = HKO = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \overline{Y}_{j\,.}\right)^2}{N-k} \tag{2.8}$$

dir.

<u>İspat:</u> Eşitlik (2.2) ile verilen model için $\varepsilon_{ji} \sim BND(0\,,\ \sigma_\varepsilon^2)$ ve böylece $Y_{j\,i} \sim BND\left(\mu_{..} + \tau_j\,, \sigma_\varepsilon^2\right)$ dır. Burada $\sigma_\varepsilon^2 = E\left(y_{ji} - E\left(y_{ji}\right)\right)^2 = E\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2$ dir. Şimdi $(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N$ tahmin edicisi, σ_ε^2 parametresi için yanlı bir tahmin edici olduğunu gösterelim.

$$E[(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \overline{Y}_{j\,.}\right)^2\right] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} E\left(y_{ji} - \overline{Y}_{j\,.}\right)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} E\left[\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right) - \left(\overline{Y}_{j\,.} - \mu_{..} - \tau_j\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} E\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2 - \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} E\left(y_{ji} - \mu_{..} - \tau_j\right)\left(\overline{Y}_{j\,.} - \mu_{..} - \tau_j\right)$$
$$+ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} nE\left(\overline{Y}_{j\,.} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2 = \frac{N\sigma_\varepsilon^2}{N} - \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{k} E\left[n\overline{Y}_{j\,.} - n\mu_{..} - n\tau_j\right]\left(\overline{Y}_{j\,.} - \mu_{..} - \tau_j\right)$$
$$+ \frac{n}{N}\sum_{j=1}^{k} E\left(\overline{Y}_{j\,.} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2 = \sigma_\varepsilon^2 - \frac{n}{N}\sum_{j=1}^{k} E\left(\overline{Y}_{j\,.} - \mu_{..} - \tau_j\right)^2 = \sigma_\varepsilon^2 - \frac{n}{N}\sum_{j=1}^{k}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} =$$

$\sigma_\varepsilon^2 - \frac{k\sigma_\varepsilon^2}{N} = \frac{N-k}{N}\sigma_\varepsilon^2 \neq \sigma_\varepsilon^2$ olduğundan $(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N$ tahmin edicisi, σ_ε^2 parametresi için yanlı bir tahmin edicidir.

Eğer yanlılık düzeltmesi yapılırsa;

$E[(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N] = \frac{N-k}{N}\sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \frac{N}{N-k}\, E\left[\left(\hat{\sigma}_\varepsilon^2\right)_N\right] = \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow E\left[\frac{N}{N-k}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N\right] = \sigma_\varepsilon^2$ olup,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{N}{N-k}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)_N = \frac{N}{N-k}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \overline{Y}_{j\,.}\right)^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \overline{Y}_{j\,.}\right)^2$$

$= \frac{HKT}{N-k} = HKO$ tahmin edicisi, σ_ε^2 parametresi için yansız bir tahmin edicidir.

2.3 HİPOTEZ TESTİ

Eşitlik (2.2) ile verilen sabit etkili dengeli tek yönlü varyans analizi modelinde (sabit etkili dengeli tamamen rastgele kısıtlayıcısız deney tasarım modelinde), amaç denemeler (bağımsız gruplar veya faktör düzeyleri) arasında ortalamalar bakımından anlamlı bir farklılık olup olmadığını test etmektir. Bu amaçla test edilecek hipotezler:

$$H_0: \mu_{1\,.} = \mu_{2\,.} = \cdots = \mu_{k\,.} = \mu_{..}$$

$$H_1: \exists\, \mu_{j\,.} \text{diğerlerinden farklıdır} \tag{2.9}$$

veya

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k = 0$$

$$H_1: \exists\, \tau_j \text{ diğerlerinden farklıdır} \tag{2.10}$$

şeklinde ifade edilir. Bu hipotezleri test etmek için gerekli olan test istatistiği iki farklı yolla türetilebilir.

(i) Toplam değişimin (varyansın) bir ölçüsü olan genel kareler toplamını (KT_{Genel}), birbirinden bağımsız iki varyans kaynağına parçalamak suretiyle

(ii) Sıfır hipotezi altındaki indirgenmiş modele ait hata kareler toplamını ile tam modele ait hata kareler toplamı arasındaki farka dayandırmak suretiyle

2.3.1 Genel Kareler Toplamının Parçalanması

Tablo 2.2 ile verilen veri düzeni için genel kareler toplamı

$$KT_{Genel} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji} - \overline{Y}_{..}\right)^2 \tag{2.11}$$

eşitliği ile verilir. Bu eşitlikte parantez içerisine j. nci deneme için örnek ortalaması olan $\overline{Y}_{j\,.}$ bir eklenip, bir çıkartılırsa, genel kareler toplamı:

$$KT_{Genel} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_{ji} - \overline{Y}_{j\,.}\right) + \left(\overline{Y}_{j\,.} - \overline{Y}_{..}\right)\right]^2$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{j.}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)^2+2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{j.}\right)\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right) \quad (2.12)$$

yazılabilir. Bu eşitlikteki ikili çarpım teriminin değeri sıfırdır. Gerçekten;

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{j.}\right)\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{j.}\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_{ji}-n\overline{Y}_{j.}\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)\left(n\overline{Y}_{j.}-n\overline{Y}_{j.}\right)=0$$

olduğu görülmektedir. Böylece Eşitlik (2.12);

$$KT_{Genel}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{j.}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}n\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)^2 \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer;

$$KT_{Deneme}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)^2=\sum_{j=1}^{k}n\left(\overline{Y}_{j.}-\overline{Y}_{..}\right)^2 \quad (2.14)$$

$$KT_{Hata}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{j.}\right)^2 \quad (2.15)$$

tanımlanırsa, Eşitlik (2.13) kısaca;

$$KT_{Genel}=KT_{Deneme}+KT_{Hata}$$

olarak ifade edilir. Burada Eşitlik (2.11), (2.14) ve (2.15) sırası ile genel örnekleme ait toplam varyansın, denemelere ait varyansın ve hata terimlerine ait varyansın pay kısmını ifade eder. Bu eşitlikler ilgili kareler toplamları için tanımlama formülleri olarak bilinir ve hesaplamalarda genellikle aşağıdaki formülle tercih edilir.

$$KT_{Genel}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}{y_{ji}}^2-\frac{T_{..}^2}{N} \quad (2.16)$$

$$KT_{Deneme}=\sum_{j=1}^{k}\frac{T_{j.}^2}{n}-\frac{T_{..}^2}{N} \quad (2.17)$$

$$KT_{Hata}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}{y_{ji}}^2-\sum_{j=1}^{k}\frac{T_{j.}^2}{n} \quad (2.18)$$

Kareler toplamları kendi serbestlik derecelerine bölündüğünde varyanslar ya da kareler ortalamaları) elde edilir. Böylece Eşitlik (2.2) ile verilen modelde, (2.9) veya (2.10) ile verilen H_0 hipotezini test etmek için;

$$F_{Deneme}=\frac{KT_{Deneme}/(k-1)}{KT_{Hata}/(N-k)}=\frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}} \quad (2.19)$$

test istatistiği kullanılır. H_0 hipotezi altında test istatistiğinin alabileceği değer:

$$F_h=\frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}} \quad (2.20)$$

olacaktır. H_0 hipotezi hakkında karar verebilmek için test istatistiğinin örnekleme dağılımını ve H_1 hipotezi altında alabileceği değeri belirleyip karar kuralını oluşturmalıyız.

Teorem 2.2 Eşitlik (2.2) ile verilen modelde, H_0 hipotezi altında test istatistiğinin örnekleme dağılımı, $k-1$ ve $N-k$ serbestlik dereceli merkezi F dağılımıdır.

İspat: Sabit etkili dengeli tek yönlü varyans analizi modeli için model denklemi:

$$Y_{ji} = \mu_{..} + \tau_j + \varepsilon_{j\,i} \quad , j = 1,2,\dots,k; i = 1,2,\dots,n$$

ve modelin hata terimi için $\varepsilon_{j\,i} \sim BND(0\,,\ \sigma_\varepsilon^2)$ olduğu varsayımı dikkate alındığında, $y_{ji} \sim BND(\mu_{j.}\,,\ \sigma_\varepsilon^2)$ olur, fakat H_0 hipotezi altında $y_{ji} \sim BND(\mu_{..}\,,\ \sigma_\varepsilon^2)$ olur. Böylece $j = 1,2,\dots,k$ ve $i = 1,2,\dots,n$ için $\frac{y_{ji}-\mu_{..}}{\sigma_\varepsilon} \sim BND(0,1)$ ve $\left(\frac{y_{ji}-\mu_{..}}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$ elde edilir. Bağımsız Ki-Kare değişkenlerinin toplanabilirlik özelliği gereğince; $N = k * n$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{ji}-\mu_{..}}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 \sim \chi^2_{(N)} \tag{2.21}$$

elde edilir. Eşitlik (2.21) de $\mu_{..}$ parametresi yerine EKK tahmin edicisi $\overline{Y}_{..}$ yazıldığında serbestlik derecesi 1 tane azalır ve

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{ji}-\overline{Y}_{..}}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 \sim \chi^2_{(N-1)} \tag{2.22}$$

olur (gösteriniz?). Buradan

$$\frac{KT_{Genel}}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{..}\right)^2}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{(N-1)} \tag{2.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde $j = 1,2,\dots,k$ için j.nci denemeye (gruba) ait örnek ortalaması istatistiği için $\overline{Y}_{j\,.} \sim BND\left(\mu_{j.}, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\right)$ olup, H_0 hipotezi altında $\overline{Y}_{j\,.} \sim BND\left(\mu_{..}, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\right)$ ve böylece $j = 1,2,\dots,k$ için $\frac{\overline{Y}_{j\,.}-\mu_{..}}{\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}} \sim BND(0,1)$ olup, $\left(\frac{\overline{Y}_{j\,.}-\mu_{..}}{\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$ elde edilir. Bağımsız Ki-Kare değişkenlerinin toplanabilirlik özelliği gereğince;

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\overline{Y}_{j\,.}-\mu_{..}}{\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}}\right)^2 = \frac{n}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{Y}_{j\,.} - \mu_{..}\right)^2 \sim \chi^2_{(k)} \tag{2.24}$$

elde edilir. Eşitlik (2.24) de $\mu_{..}$ parametresi yerine EKK tahmin edicisi $\overline{Y}_{..}$ yazıldığında serbestlik derecesi 1 tane azalır ve

$$\frac{n}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{Y}_{j\,.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 \sim \chi^2_{(k-1)} \tag{2.25}$$

olur (gösteriniz?). Buradan

$$\frac{KT_{Deneme}}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{n\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{Y}_{j\,.}-\overline{Y}_{..}\right)^2}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2_{(k-1)} \tag{2.26}$$

elde edilir. Eşitlik (2.14) ve (2.15) ile verilen KT_{Deneme} ve KT_{Hata} birbirinden bağımsız olduğundan $\frac{KT_{Deneme}}{\sigma_\varepsilon^2}$ ile $\frac{KT_{Hata}}{\sigma_\varepsilon^2}$ birbirinden bağımsızdır. Ayrıca;

$KT_{Genel} = KT_{Deneme} + KT_{Hata}$ olması sebebiyle $\frac{KT_{Genel}}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{KT_{Deneme}}{\sigma_\varepsilon^2} + \frac{KT_{Hata}}{\sigma_\varepsilon^2}$ eşitliği yazılabilir. Eşitlik (2.23) ve (2.26) nin yanı sıra toplanan terimlerin bağımsızlığı dikkate alındığında;

$$\frac{KT_{Hata}}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ji}-\overline{Y}_{j.}\right)^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{KT_{Genel}}{\sigma_\varepsilon^2} - \frac{KT_{Deneme}}{\sigma_\varepsilon^2} = \chi^2_{(N-1)} - \chi^2_{(k-1)} \sim \chi^2_{(N-k)} \qquad (2.27)$$

elde edilir. Sonuç olarak; H_0 hipotezi doğru iken test istatistiğinin örnekleme dağılımı:

$$F_{Deneme} = \frac{\chi^2_{(k-1)}/(k-1)}{\chi^2_{(N-k)}/(N-k)} = \frac{\frac{KT_{Deneme}}{\sigma_\varepsilon^2}/(k-1)}{\frac{KT_{Hata}}{\sigma_\varepsilon^2}/(N-k)} = \frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}} \sim F_{(k-1);(N-k)} \qquad (2.28)$$

şeklinde merkezi F dağılımı olarak elde edilir.

Karar: α önem seviyesinde test istatistiğinin örnekleme dağılımından elde edilen değer $F_t = F_{\alpha;(k-1);(N-k)}$ olmak üzere, eşitlik (2.20) dikkate alındığında eğer:

$F_h > F_t$ ise H_0 ret edilir. "Denemeler (gruplar) arasında anlamlı bir farklılık olduğu söylenir.

$F_h \leq F_t$ ise H_0 ret edilemez. "Denemeler (gruplar) arasında anlamlı bir farklılık olmadığı söylenir.

Tamamen rastgele kısıtlayıcısız deney tasarımı (sabit etkili dengeli tek yönlü varyan analizi) için analiz sonuçları, ANOVA tablosu olarak bilinen Tablo 2.3 ile verilebilir.

Tablo 2.3 Tek Yönlü ANOVA Tablosu

Kaynak	s.d.	KT	KO	Test İstatistiği
Denemeler(Gruplar)	k-1	KT_{Deneme}	KO_{Deneme}	$F_{Deneme} = \frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}}$
Hata	N-k	KT_{Hata}	KO_{Hata}	
Genel	N-1	KT_{Genel}		

2.4 Dengeli Olmayan Tek Yönlü Varyans Analizi

Eşitlik (2.1) ile verilen tamamen rastgele, kısıtlayıcısız deney düzeni için verilen tek yönlü varyans analizi modelinde, en az bir denemedeki gözlem sayısı diğer deneme düzeylerinden farklı ise bu takdirde modele dengeli olmayan tek yönlü varyans analizi modeli denir. Model denklemi (2.1) de verildiği gibi olup;

$$Y_{j\,i} = \mu_{..} + \tau_j + \varepsilon_{j\,i} \quad , j = 1,2\ ,\dots,k; i = 1,2,\dots,n_j \qquad (2.29)$$

şeklindedir. Bu modelin dengeli modelden tek farkı, j.nci denemede n_j birim olmasıdır. Bu model için parametre tahmininde $\sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j = 0$ olduğu kabul edilir.

Gerek model parametre tahminleri ve gerekse hipotez testi işleni çok küçük nüans farkları dışında genellikle aynıdır. Model parametrelerinin EKK tahmin edicileri;

$\hat{\mu}_{..} = \overline{Y}_{..}$ ve $\hat{\tau}_j = \overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{..}$ olup, burada $T_{j.} = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ji}$ olmak üzere $\overline{Y}_{j.} = \frac{T_{j.}}{n_j}$, $j = 1, \dots, k$ dır. Ayrıca; $N = \sum_{j=1}^{k} n_j$ genel örnek birim sayısı olmak üzere $T_{..} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ji}$ ve $\overline{Y}_{..} = \frac{T_{..}}{N}$ dir.

Denemeler arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını ($H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \cdots = \mu_{k.} = \mu_{..}$ veya $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k = 0$ ya da $H_0: \sigma_\tau^2 = 0$ hipotezini) test etmek için, kullanılacak olan test istatistiği:

$$F_{Deneme} = \frac{KT_{Deneme}/k-1}{KT_{Hata}/N-k} = \frac{KO_{Deneme}}{KO_{Hata}} \tag{2.30}$$

şeklinde tanımlı merkezi F istatistiğidir. Burada

$$KT_{Genel} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ji} - \overline{Y}_{..}\right)^2$$

$$KT_{Deneme} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{..}\right)^2$$

$$KT_{Hata} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ji} - \overline{Y}_{j.}\right)^2$$

şeklinde ifade edilir. H_0 hipotezi hakkında karar verme dengeli tek yönlü varyans analizi ile aynıdır.

2.5 Rastgele Etki Modeli

Eşitlik (2.2) ile dengeli, kısıtlayıcısız, tamamen rastgele deney tasarımında, eğer faktör düzeyleri rastgele seçilmiş ise modele rastgele etki modeli denir. Bu durumda $j = 1,2, \dots, k$ için faktör düzeyleri birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerdir. Bu model için test edilecek hipotezler,: σ_τ^2 gruplar arası (faktör düzeyleri arası) kitle varyansı olmak üzere;

$$H_0: \sigma_\tau^2 = 0$$

$$H_1 :: \sigma_\tau^2 > 0 \tag{2.31}$$

şeklinde ifade edilir. Parametre tahminleri ve hipotez testi işlemleri, sabit etki modelindeki ile aynıdır. H_0 hipotezi ret edildiği zaman gruplar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olduğu söylenir. Bu sonuç, sadece ele alınan faktör düzeyleri için değil, aynı zamanda çalışmada ele alınmayan faktör düzeyleri (denemeler, gruplar) için de geçerlidir.