T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

10. Hafta

i.b) Bileşim Kesişim Testi ile:

$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımına sahip bir çok değişkenli kitle verilsin. $\underline{a}$: $1 \times p$ boyutlu bilinen bir vektör olmak üzere, $Y = \underline{a}\,\underline{X} = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_pX_p$ doğrusal dönüşümü ile çok değişkenli kitleyi tek değişkenli kitleye dönüştürelim. $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ olduğundan dönüşüm kitlesinin dağılımı için $Y = \underline{a}\,\underline{X} \sim N\left(\underline{a}\,\underline{\mu}\,, \sigma_Y^2 = \underline{a}\Sigma\underline{a}'\right)$ olur. Burada çok değişkenli kitlenin varyans kovaryans matrisi Σ bilindiğinden, dönüşüm kitlesinin varyansı $\sigma_Y^2 = \underline{a}\Sigma\underline{a}'$'da biliniyordur. Bu durumda Eşitlik (4.7)'de verilen hipotezler yerine dönüşüm kitlesinin ortalamasına ait olan;

$$H_0: \underline{a}\,\underline{\mu} = \underline{a}\,\underline{\mu}_0$$

$$H_1: \underline{a}\,\underline{\mu} \neq \underline{a}\,\underline{\mu}_0 \tag{4.18}$$

hipotezleri test edilir. Bu durumda problem tek değişkenli normal dağılıma sahip kitlede kitle varyansı biliniyorken kitle ortalamasına ait hipotez testi problemine dönüşür. Bu problemin çözümü için gerekli olan test istatistiğinin elde edebilmek amacıyla dönüşüm kitlesinden çekilen n birimlik bir rastgele örneklem $Y_1 = \underline{a}\,\underline{X}_1, Y_2 = \underline{a}\,\underline{X}_2,\ \ldots\ , Y_n = \underline{a}\,\underline{X}_n$ olsun. Bu örnek, gerçekte çok değişkenli kitleden rastgele çekilen n birimlik örneklemde her bir örnek birimine aynı doğrusal dönüşümü uygulayarak elde edilen örnekten başka bir şey değildir. Bu örneklemin örnek ortalama istatistiği;

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{a}\,\underline{X}_i\right) = \underline{a}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{X}_i\right] = \underline{a}\,\overline{\underline{X}} \tag{4.19}$$

olup, bu istatistik $\underline{a}\,\underline{\mu}$ parametresi için bir yansız tahmin edicidir. Burada $\overline{\underline{X}} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \frac{1}{n}\Sigma\right)$ olduğundan $\overline{Y} = \underline{a}\,\overline{\underline{X}} \sim \mathrm{N}\left(\underline{a}\,\underline{\mu}\,, \frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}\right)$ dağılımlıdır. Buna göre $E\left(\overline{Y}\right) = \underline{a}\,\underline{\mu}$ ve $\sigma_{\overline{Y}}^2 = \frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}$ dir. Böylece test istatistiği, örnek ortalama istatistiğinin standartlaştırılması ile elde edilecek olan Z istatistiği olup;

$$Z\left(\underline{a}\right) = \frac{\overline{Y} - E\left(\overline{Y}\right)}{\sigma_{\overline{Y}}} = \frac{\underline{a}\,\overline{\underline{X}} - \underline{a}\,\underline{\mu}}{\left(\frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}\right)^{1/2}} = \frac{\underline{a}\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)}{\left(\frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}\right)^{1/2}} \sim N(0\,, 1) \tag{4.20}$$

şeklinde tanımlıdır. α önem seviyesinde, eğer;

$\left|Z\left(\underline{a}\right)\right| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 kabul edilir veya buna eşdeğer olarak

$$Z^2\left(\underline{a}\right) \leq Z_{\alpha/2}^2 \text{ ise } H_0 \text{ kabul edilir} \tag{4.21}$$

Öyle ki Eşitlik (4.20)'de her iki tarafın karesi alınırsa;

$$Z^2\left(\underline{a}\right) = \frac{n\underline{a}\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}'}{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'} \tag{4.22}$$

elde edilir. Eğer Eşitlik (4.22)'yi maksimum yapan $\underline{a}$ vektörü için (4.21) ile verilen eşitsizlik sağlanıyor ise, diğer tüm $\underline{a}$ vektörleri için de sağlanacağından, amaç; Eşitlik (4.22)'yi maksimum yapan $\underline{a}$ vektörünü bulmaktır.

Amaç fonksiyonu:

$$L(\underline{a}) = n\underline{a}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}' \tag{4.23}$$

ve yan şart;

$$\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}' = 1 \tag{4.24}$$

olmak üzere, Lagrange çarpanları yöntemi ile $Z^2(\underline{a})$'yı maksimum yapan $\underline{a}$ vektörü bulunabilir. $\lambda > 0$ Lagrange çarpanı olmak üzere Lagrange fonksiyonu;

$$L(\underline{a}\,,\lambda) = n\underline{a}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}' - \lambda(\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}' - 1) \tag{4.25}$$

şeklinde yazılır. Eşitlik (4.25)'de $\underline{a}$ vektörüne göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse;

$\frac{\partial L(\underline{a}\,,\lambda)}{\partial \underline{a}} = 2n\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}' - 2\lambda\Sigma\,\underline{a}' = \underline{0}$, Her iki taraf 2 ile bölünürse

$$n\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}' - \lambda\Sigma\,\underline{a}' = \underline{0} \tag{4.26}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını solda Σ^{-1} matrisi ile çarpalım ve sol tarafı $\underline{a}'$ vektörünün parantezine alalım:

$$\left[n\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)' - \lambda I_p\right]\underline{a}' = \underline{0} \tag{4.27}$$

Elde edilen Eşitlik (4.27)'ye göre $n\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'$: $p \times p$ matrisinin özdeğerleri ve her bir özdeğerine karşılık gelen özvektörleri bulunabilir. Bu eşitliğe göre $\lambda > 0$ Lagrange çarpanı $n\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'$matrisinin özdeğeri olup, $\underline{a}$ vektörü ise bu özdeğere karşılık gelen özvektör olmalıdır. İlgili matrisin öz değerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p > 0$ ve λ_j'ye karşılık gelen özvektör $\underline{a}_j$ olsun. Şimdi Eşitlik (4.26)'nın her iki tarafını soldan $\underline{a}$ vektörü ile çarpalım.

$$n\underline{a}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}' - \lambda\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}' = 0 \Rightarrow \lambda\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}' = n\underline{a}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}' \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{n\underline{a}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\underline{a}'}{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'} = Z^2(\underline{a}) \tag{4.28}$$

olup, eğer $\lambda = max\{\lambda_1,\ \lambda_2\,, \ldots, \lambda_p\}$ alındığında, $Z^2(\underline{a})$ maksimum olacaktır. Buna göre $Z^2(\underline{a})$'yı maksimum yapan $\underline{a}$ vektörü en büyük özdeğere karşılık gelen öz vektördür. Diğer taraftan bir matrisin izi özdeğerlerin toplamına eşit olduğundan $\lambda = max\{\lambda_1,\ \lambda_2\,, \ldots, \lambda_p\}$ dışında kalan diğer özdeğerler sıfıra eşit kabul edilirse, test istatistiği;

$$\lambda = Z^2(\underline{a}) = \text{İz}\left[n\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\right] = n\text{İz}\left[\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)'\right]$$

$$= n\dot{I}z\left[\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)\right] = n\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)$$

şeklinde elde edilir. Bu istatistik Eşitlik (4.17) ile verilen test istatistiği ile aynı olup, örnekleme dağılımı;

$$\chi^2 = n\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{X}}-\underline{\mu}\right) \sim \chi^2_{(p)}$$

olacaktır.

Karar: Olabilirlik oran testinde verilen karar ile aynıdır.

Yorum: H_0 hipotezi kabul edilsin. Bu durumda n birimlik örneklemin ortalama vektörü $\underline{\mu}_0$ olan bir çok değişkenli normal kitleden çekilmiş olma olasılığı $(1-\alpha)$'dır.

H_0 hipotezi ret edilsin. Bu durumda n birimlik örneklemin ortalama vektörü $\underline{\mu}_0$ olan bir çok değişkenli normal kitleden çekilmiş olma olasılığı α' dır, ya da örneklem ortalama vektörü $\underline{\mu}_0$ olan çok değişkenli kitleden çekilmemiştir.

H_0 hipotezi ret edildiği zaman bu kararın ortaya çıkmasında $j = 1, 2, \dots, p$ için X_j değişkenlerinden hangisinin ya da hangilerinin etkili olduğu incelenebilir. Bu inceleme olabilirlik oran testi ile yapılamazken, bileşim-kesişim testinde yapılabilmektedir. Bu inceleme yapılırken $\underline{a}$ vektörü için uygun seçimler yapılarak $\underline{a}\,\underline{\mu}$ parametresi ile ilgili oluşturulacak olan alt hipotezler test edilmelidir.

Örneğin; $\underline{a} = [0, \dots \dots \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] : 1 \times p$ seçilsin (j-nci bileşen "1" ve diğer bileşenlerin hepsi "0" seçiliyor). Bu seçilişe göre parametre; $\underline{a}\,\underline{\mu} = \mu_j$, $(j = 1, 2, \dots, p)$ olup, alt hipotezler;

$$H_0: \mu_j = \mu_{j0} \quad , \quad \left(\mu_{j0} = \underline{a}\,\underline{\mu}_0\right)$$

$$H_1: \mu_j \neq \mu_{j0} \quad , (j = 1, 2, \dots, p) \tag{4.29}$$

olup, p- tanedir. Bu alt hipotezler $\underline{a}\,\underline{\mu}$ parametresi ile ilgili $(1-\alpha)$ güven katsayılı güven aralıkları (Bonferroni güven aralığı) ile test edilir. Söz konusu güven aralığı;

$$P\left[\underline{a}\,\underline{\overline{X}} - \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}}\sqrt{\frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}} \leq \underline{a}\,\underline{\mu} \leq \underline{a}\,\underline{\overline{X}} + \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}}\sqrt{\frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}}\right] = 1-\alpha \tag{4.30}$$

şeklinde verilir.

Eğer güven aralığı μ_{j0}, $(j = 1, 2, \dots, p)$değerini kapsıyor ise $H_0: \mu_j = \mu_{j0}$ hipotezi kabul edilir ve $X_j, (j = 1, 2, \dots, p)$ değişkeni $H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezinin ret edilmesinde etkili olmamıştır.
Eğer güven aralığı μ_{j0}, $(j = 1, 2, \dots, p)$değerini kapsamıyor ise $H_0: \mu_j = \mu_{j0}$ hipotezi retedilir ve bu durumda $X_j, (j = 1, 2, \dots, p)$ değişkeni $H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezinin ret edilmesinde etkili olmuştur denir. Eşitlik (4.30) seçilen $\underline{a}$ vektörüne göre düzenlenirse;

$\mathrm{P}[\overline{X}_j - \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}} \times \sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}} \leq \mu_j \leq \overline{X}_j + \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}} \times \sqrt{\frac{\sigma_{jj}}{n}}] = 1-\alpha$ elde edilir.

Örnek 4.1 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ için $\Sigma = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 4 \\ -5 & 16 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun.

a) Bu dağılımdan çekildiği iddia edilen 50 birimlik bir örneklem için $\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ bulunmuştur. Kitleye ait ortalama vektörünün $\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ olup olamayacağına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

b) Eğer farklılık varsa, farklılığın hangi değişkenlerden kaynaklandığını belirleyiniz?

Çözüm: a) $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ ve Σ matrisi biliniyor. Hipotezler;

$H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$

$H_1: \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$

olup, test istatistiği Σ matrisi bilindiğinden $\chi^2 = n\left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{\overline{X}} - \underline{\mu}\right) \sim \chi^2_p$ dir.

H_0 doğru iken test istatistiğinin alabileceği değer;

$$\chi^2 = 50\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 55 & 32 & -79 \\ 32 & 20 & -47 \\ -79 & -47 & 119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 60{,}526$$

$\alpha = 0{,}05$ için H_1'e göre kritik değer; $\chi^2_{p;\alpha} = \chi^2_{3:0{,}05} = 7{,}815$ dir. Buna göre 60,526>7,815 olduğundan H_0 ret edilir.%95 güvenle örneklemin çekildiği kitlenin ortalama vektörü, verilen $\underline{\mu}_0$ vektöründen farklıdır.

b) H_0 hipotezi ret edildiği için bu kararın verilmesinde etkili olan değişkenleri belirlemek mümkündür. Bunun için $\underline{a}\,\underline{\mu}$ parametresine ait güven aralığından yararlanılır.

i) X_1 değişkeni için inceleyelim: $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ seçelim. Bu takdirde $\underline{a}\,\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \mu_1$

ve $\underline{a}\,\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = 6$ olup test edilecek hipotezler:

$H_0: \mu_1 = 6$

$H_1: \mu_1 \neq 6$

dır. Güven aralığı ise Σ matrisi bilindiğinden Eşitlik (4.30)'a göre;

$$P\left[\underline{a}\,\underline{\overline{X}} - \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}} \sqrt{\frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}} \leq \underline{a}\,\underline{\mu} \leq \underline{a}\,\underline{\overline{X}} + \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}} \sqrt{\frac{\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}'}{n}}\right] = 1 - \alpha$$

şeklindedir. Burada $\underline{a}\,\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4$, $\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -5 & 4 \\ -5 & 16 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 9$ ve $\chi^2_{p;\alpha} = \chi^2_{3;0{,}05} = 7{,}815$ olup, bu değerler güven aralığında yerlerine yazılırsa;

$$P\left(4-\sqrt{7,815}\sqrt{\frac{9}{50}} \leq \mu_1 \leq 4+\sqrt{7,815}\sqrt{\frac{9}{50}}\right)=0,95 \quad \Rightarrow \quad P(2,81 \leq \mu_1 \leq 5,19)=0,95$$

bulunur. Güven aralığı $\mu_{10}=6$ değerini kapsamadığından $H_0: \mu_1 = 6$ hipotezi ret edilir. Buna göre X_1 değişkeni $H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezinin ret edilmesinde etkili olmuştur.

ii) X_2 değişkeni için inceleyelim: $\underline{a} = [0 \;\; 1 \;\; 0]$ seçelim. Bu takdirde $\underline{a}\,\underline{\mu} = [0 \;\; 1 \;\; 0]\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix} = \mu_2$

ve $\underline{a}\,\underline{\mu}_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0]\begin{bmatrix}6\\ 8\\ 5\end{bmatrix} = 8$ olup test edilecek hipotezler:

$H_0: \mu_2 = 8$
$H_1: \mu_2 \neq 8$

dır. Güven aralığı ise Σ matrisi bilindiğinden Eşitlik (4.30)'a göre bulunur.

Burada $\underline{a}\,\underline{\overline{X}} = [0 \;\; 1 \;\; 0]\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 4\end{bmatrix} = 8$, $\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}' = [0 \;\; 1 \;\; 0]\begin{bmatrix}9 & -5 & 4\\ -5 & 16 & 3\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = 16$ ve $\chi^2_{p;\alpha} = \chi^2_{3;0,05} = 7,815$ olup, bu değerler güven aralığında yerlerine yazılırsa;

$$P\left(8-\sqrt{7,815}\sqrt{16/50} \leq \mu_2 \leq 8+\sqrt{7,815}\sqrt{\frac{16}{50}}\right)=0,95 \Rightarrow P(6,42 \leq \mu_2 \leq 9,58)=0,95$$

bulunur. Güven aralığı $\mu_{20}=8$ değerini kapsadığından $H_0: \mu_2 = 8$ hipotezi ret edilemez. Buna göre X_2 değişkeni $H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezinin ret edilmesinde etkili olmamıştır.

iii) X_3 değişkeni için inceleyelim: $\underline{a} = [0 \;\; 0 \;\; 1]$ seçelim. Bu takdirde $\underline{a}\,\underline{\mu} = [0 \;\; 0 \;\; 1]\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix} = \mu_3$

ve $\underline{a}\,\underline{\mu}_0 = [0 \;\; 0 \;\; 1]\begin{bmatrix}6\\ 8\\ 5\end{bmatrix} = 5$ olup test edilecek hipotezler:

$H_0: \mu_3 = 5$
$H_1: \mu_3 \neq 5$

dır. Güven aralığı ise Σ matrisi bilindiğinden Eşitlik (4.30)'a göre bulunur.

Burada $\underline{a}\,\underline{\overline{X}} = [0 \;\; 0 \;\; 1]\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 4\end{bmatrix} = 4$, $\underline{a}\,\Sigma\,\underline{a}' = [0 \;\; 0 \;\; 1]\begin{bmatrix}9 & -5 & 4\\ -5 & 16 & 3\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = 4$ ve $\chi^2_{p;\alpha} = \chi^2_{3;0,05} = 7,815$ olup, bu değerler güven aralığında yerlerine yazılırsa;

$$P\left(4-\sqrt{7,815}\sqrt{\frac{4}{50}} \leq \mu_3 \leq 4+\sqrt{7,815}\sqrt{\frac{4}{50}}\right)=0,95 \quad \Rightarrow \quad P(3,21 \leq \mu_3 \leq 4,79)=0,95$$

bulunur. Güven aralığı $\mu_{30}=5$ değerini kapsamadığından $H_0: \mu_3 = 5$ hipotezi ret edilir. Buna göre X_3 değişkeni $H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezinin ret edilmesinde etkili olmuştur.

Örnek:4.2 $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$ verilsin. Eğer X_1 ve X_2 değişkenleri ilişkisiz ise bu değişkenlerin bağımsız olduğunu gösteriniz?

Çözüm

I.YOL X_1 ve X_2 değişkenlerinin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\left[f\left(\underline{x}\right) = f(x_1, x_2)\right] = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2)$ olmasıdır.

$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$ ve X_1 ile X_2 değişkenleri ilişkisiz olduğundan $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12} = 0$ ve böylece $Cov\left(\underline{X}\right) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ yazılabilir. Buna göre $f\left(\underline{x}\right) = f(x_1, x_2) = kexp\left\{-\frac{1}{2}Q\left(\underline{x}\right)\right\}$ öyleki $k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$ ve $Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)$ dir. $p = 2$, $|\Sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22}$, $|\Sigma|^{\frac{1}{2}} = \sigma_1\sigma_2$ ve

$Q\left(\underline{x}\right) = [x_1 - 10 \quad x_2 - 12]' \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 10 \\ x_2 - 12 \end{bmatrix} = \left(\frac{x_1 - 10}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 10}{\sigma_2}\right)^2$ bulunur. Bu sonuçlar fonksiyonda yerlerine yazılırsa;

$$f\left(\underline{x}\right) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1 - 10}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 12}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - 10}{\sigma_1}\right)^2\right\} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - 12}{\sigma_2}\right)^2\right\} = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2)$ elde edilir. Yani X_1 ve X_2 değişkenlerinin bağımsızdır.

II.YOL X_1 ve X_2 değişkenlerinin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $M_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = M_{X_1}(t_1) * M_{X_2}(t_2)$ olmasıdır.

$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$ olduğundan $\underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ için $M_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}\right\}$ dir. X_1 ile X_2 değişkenleri ilişkisiz olduğundan $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12} = 0$ ve böylece $Cov\left(\underline{X}\right) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ yazılabilir. Böylece; $\underline{t}'\underline{\mu} = 10t_1 + 12t_2$ ve $\underline{t}'\Sigma\underline{t} = \sigma_{11}t_1^2 + \sigma_{22}t_2^2$ olduğundan;

$M_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{10t_1 + 12t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_{11}t_1^2 + \sigma_{22}t_2^2)\right\} = exp\left\{10t_1 + \frac{1}{2}(\sigma_{11}t_1^2)\right\} * exp\left\{12t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_{22}t_2^2)\right\} = M_{X_1}(t_1) * M_{X_2}(t_2)$ elde edilir. O halde X_1 ve X_2 değişkenlerinin bağımsızdır.

III.YOL X_1 ve X_2 değişkenlerinin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\varphi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = \varphi_{X_1}(t_1) * \varphi_{X_2}(t_2)$ olmasıdır.

$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}\,,\ \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$ olduğundan $\underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ için $\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{i\underline{t}'\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}\right\}$ dir. X_1 ile X_2 değişkenleri ilişkisiz olduğundan $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12} = 0$ ve böylece $Cov(\underline{X}) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ yazılabilir. Böylece; $\underline{t}'\underline{\mu} = 10t_1 + 12t_2$ ve $\underline{t}'\Sigma\underline{t} = \sigma_{11}t_1^2 + \sigma_{22}t_2^2$ olduğundan;

$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{10it_1 + 12it_2 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}t_1^2 + \sigma_{22}t_2^2)\right\} = exp\left\{10it_1 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}t_1^2)\right\} * exp\left\{12it_2 - \frac{1}{2}(\sigma_{22}t_2^2)\right\} = \varphi_{X_1}(t_1) * \varphi_{X_2}(t_2)$ elde edilir. O halde X_1 ve X_2 değişkenlerinin bağımsızdır.

IV.YOL $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}\,,\ \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$ veriliyor. X_1 ile X_2 değişkenleri ilişkisiz olduğundan $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12} = 0$ ve böylece $Cov(\underline{X}) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ yazılabilir. Çok değişkenli normal dağılıma sahip bir sistemin her bir bileşeni tek değişkenli normal dağılıma sahip olacağından $X_1 \sim N(10,\ \sigma_{11})$ ve $X_2 \sim N(12,\ \sigma_{22})$ yazılabilir. Normal dağılıma sahip X_1 ile X_2 değişkenleri için $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12} = 0$ olduğundan bu değişkenler bağımsızdır.

Örnek:4.3 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,,\ \Sigma\right)$ dağılımı için Σ matrisi biliniyor olsun. $\underline{\mu}_0\ : p * 1$ boyutlu bilinen bir vektör olmak üzere $H_0: \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ hipotezini $H_1: \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$ hipotezine karşı test etmek için kullanılacak olan test istatistiği, verilen kitleden rastgele çekilen n birimlik bir örneklemden elde edilen $\chi^2_{\underline{X}} = \left[\overline{\underline{X}} - E(\overline{\underline{X}})\right]'\left[Cov(\overline{\underline{X}})\right]^{-1}\left[\overline{\underline{X}} - E(\overline{\underline{X}})\right] = n\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)$ istatistiğidir. Kabul edelim ki bu dağılım üzerinde $A : p * p$ boyutlu bilinen, singüler olmayan bir matris olmak üzere $\underline{Y} = A\underline{X}$ dönüşümü uygulanarak yeni bir $\underline{Y}$ rastgele vektörü tanımlansın. Buna göre;

a) $\underline{Y}$ rastgele vektörünün dağılımını bulunuz?

b) Yeni dağılımın kitle ortalama vektörü için test edilecek hipotezleri oluşturunuz?

c) (b) de oluşturduğunuz H_0 hipotezini test etmede kullanılabilecek olan bir test istatistiği bulunuz?

d) (c) de bulduğunuz test istatistiğini $\chi^2_{\underline{Y}}$ ile gösterirsek, $\chi^2_{\underline{Y}} = \chi^2_{\underline{X}}$ olduğunu ispatlayınız?

Çözüm

a) $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,,\ \Sigma\right)$ ve $\underline{Y} = A\underline{X}$: $p * p$ boyutlu olduğundan $\underline{Y} \sim N_p\left(A\underline{\mu}\,, A\,\Sigma A'\right)$ dağılımlıdır ve Σ ile A matrisi bilindiğinden $\mathrm{Cov}(\underline{Y}) = A\,\Sigma A'$ matrisi de biliniyordur.

b) Yeni dağılımın kitle ortalama vektörü $A\underline{\mu}$ olup test edilecek olan hipotezler: $\underline{\mu}_0 \in IR^p$ olmak üzere

$H_0: A\,\underline{\mu} = A\underline{\mu}_0$

$H_1: A\,\underline{\mu} \neq A\underline{\mu}_0$

şeklinde olacaktır.

c) H_0 hipotezini test etmede kullanılabilecek olan bir test istatistiği $\mathrm{Cov}(\underline{Y}) = A\,\Sigma A'$ matrisi bilindiğinden Ki-kare istatistiği olup,

$$\chi^2_{\underline{Y}} = \left[\overline{\underline{Y}} - E(\overline{\underline{Y}})\right]'\left[Cov(\overline{\underline{Y}})\right]^{-1}\left[\overline{\underline{Y}} - E(\overline{\underline{Y}})\right]$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $i = 1,2,\dots,n$ için $\underline{Y_i}$ ler dönüşüm kitlesinden çekilen örnek birimleri olmak üzere $\overline{\underline{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{Y_i}$ olup, $\underline{Y_i} \sim N_p\left(A\underline{\mu}\,, A\,\Sigma A'\right)$ ve bağımsız olduklarından $E(\overline{\underline{Y}}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{Y_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\underline{Y_i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A\underline{\mu} = A\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{\mu}\right) = A\frac{1}{n}n\,\underline{\mu} = A\underline{\mu}$ ve $Cov(\overline{\underline{Y}}) = Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{Y_i}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Cov(\underline{Y_i}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}A\,\Sigma A' =$ $A\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\Sigma\right)A' = \frac{A\Sigma A'}{n}$ dir. Bu değerler yerine yazılırsa;

$$\chi^2_{\underline{Y}} = \left[\overline{\underline{Y}} - A\underline{\mu}\right]'\left[\frac{A\Sigma A'}{n}\right]^{-1}\left[\overline{\underline{Y}} - A\underline{\mu}\right] = n\left[\overline{\underline{Y}} - A\underline{\mu}\right]'\left[A\Sigma A'\right]^{-1}\left[\overline{\underline{Y}} - A\underline{\mu}\right]$$

elde edilir.

d) Dönüşüm kitlesi $\underline{Y} = A\underline{X}$ olduğundan bu kitleden çekilen n birimlik örneklemde $i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere i.nci örnek birimi için $\underline{Y_i} = A\underline{X_i}$ yazılabilir. Buna göre; örnek ortalama istatistiği;

$\overline{\underline{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{Y_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A\underline{X_i} = A\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{X_i}\right) = A\overline{\underline{X}}$ olacaktır. Bu sonuç (c) de elde edilen test istatistiğinde yerine yazılırsa;

$$\chi^2_{\underline{Y}} = n\left[\overline{\underline{Y}} - A\underline{\mu}\right]'\left[A\Sigma A'\right]^{-1}\left[\overline{\underline{Y}} - A\underline{\mu}\right] = n\left[A\overline{\underline{X}} - A\underline{\mu}\right]'\left[A\Sigma A'\right]^{-1}\left[A\,\overline{\underline{X}} - A\underline{\mu}\right]$$

$$= n\left[A\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)\right]'(A')^{-1}\Sigma^{-1}A^{-1}\left[A\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)\right] = \left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)'A'(A')^{-1}\Sigma^{-1}A^{-1}A\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)$$

$$= n\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\overline{\underline{X}} - \underline{\mu}\right) = \chi^2_{\underline{X}}$$ elde edilir.