# T.C.

# ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

## ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

**PROF. DR. YÜKSEL ÖNER**

## 13. Hafta

## 4.5 Çok Değişkenli Normal Dağılıma Sahip İkiden Fazla Bağımsız Grubun Ortalama Vektörleri Yönünden Karşılaştırılması

Grup sayısı $g \geq 3$ ve değişken sayısı $p \geq 2$ olmak üzere her biri $p$ değişkenli birbirinden bağımsız $g$ tane grup verilsin. Bu grupların ortak (homojen) kovaryans matrisli olduğunu kabul edelim. $k = 1, 2, \dots, g$ için $k$-ncı grup $\underline{X}_k : p \times 1$vektörü ile gösterilsin ve $\underline{X}_k \sim N_p\left(\underline{\mu}_k, \Sigma\right)$ olsun.

**AMAÇ:** Bu grupları ortalama vektörleri yönünden karşılaştırmaktır.

Bu amaçla uygulanacak olan analize çok değişkenli tek faktör varyans analizi (MANOVA) adı verilir. Bu analizde bağımsız gruplar değişkenler vektörünü etkilediği düşünülen tek faktörün düzeyleridir. Çok değişkenli tek faktör varyans analizi için model denklemi:

$$\underline{X}_{ki} = \underline{\mu}_{..} + \underline{\tau}_k + \underline{\varepsilon}_{ki} \ , \ k = 1, 2, \dots, g; i = 1, 2, \dots, n_k \qquad (4.48)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$\underline{X}_{ki}$ : Faktörün $k$-ncı düzeyinde ($k$-ncı grupta) $i$-nci birime ait gözlem vektörü

$\underline{\mu}_{..}$ : Genel kitle ortalama vektörü

$\underline{\tau}_k$ : Faktörün $k$-ncı düzeyinin bağımlı değişkenler vektörü üzerine etkisi ($\underline{\tau}_k = \underline{\mu}_{k.} - \underline{\mu}_{..}$ ve $\sum_{k=1}^{g} n_k \underline{\tau}_k = \underline{0}$ )

$\underline{\varepsilon}_{ki}$ : Faktörün $k$-ncı düzeyinde ($k$-ncı grupta) $i$-nci birime ait rastgele hata vektörü

### 4.5.1 Parametre Tahmini

Eşitlik (4.48) ile verilen çok değişkenli tek faktör varyans analizinde model parametrelerinin tahmin edilmesinde En Küçük Kareler (EKK) veya En Çok Olabilirlik (EÇO) yöntemleri kullanılabilir. Çünkü $k = 1, 2, \dots, g$ için $k$-ncı grup $\underline{X}_k : p \times 1$rastgele vektörü olup dağılımı $\underline{X}_k \sim N_p\left(\underline{\mu}_k, \Sigma\right)$ olarak bilinmektedir. EKK yöntemi hata kareler ve çarpımlar toplamını en küçük yaparak parametreleri tahmin ederken, EÇO yöntemi ise örnekleme ait olabilirlik fonksiyonunu (veya olasılığını) en büyük yaparak parametreleri tahmin etmektedir. Her iki yöntemde aynı tahmin edicileri verdiği için burada EKK yöntemi ile parametrelerin tahmin edilmesi verilecektir. Bunun için her bir gruptan rastgele olarak $n_k$ birimlik örnekler çekilir. $k$-ncı gruptan çekilen $i$-nci örnek birimi:

$$\underline{X}_{ki} = \begin{bmatrix} X_{1ki} \\ X_{2ki} \\ \vdots \\ X_{pki} \end{bmatrix} ; k = 1, 2, \dots, g; i = 1, 2, \dots, n_k$$

olmak üzere, veri düzeni Tablo 4.1’deki gibi verilebilir.

**Tablo 4.1** Çok Değişkenli Tek Faktör Varyans Analizi Veri Düzeni

| | **I. Grup** | | | | **II. Grup** | | | | **…** | **g. Grup** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_j$ | 1 | 2 | … | $n_1$ | 1 | 2 | … | $n_2$ | | 1 | 2 | … | $n_g$ |
| $X_1$ | $x_{111}$ | $x_{112}$ | … | $x_{11n_1}$ | $x_{121}$ | $x_{122}$ | … | $x_{12n_2}$ | … | $x_{1g1}$ | $x_{1g2}$ | … | $x_{1gn_g}$ |
| $X_2$ | $x_{211}$ | $x_{212}$ | … | $x_{21n_1}$ | $x_{221}$ | $x_{222}$ | … | $x_{22n_2}$ | … | $x_{2g1}$ | $x_{2g2}$ | … | $x_{2gn_g}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $X_p$ | $x_{p11}$ | $x_{p12}$ | … | $x_{p1n_1}$ | $x_{p21}$ | $x_{p22}$ | … | $x_{p2n_2}$ | … | $x_{pg1}$ | $x_{pg2}$ | … | $x_{pgn_g}$ |

Model denklemine göre hata kareler ve çarpımlar toplamı (HKÇT);

$$HKÇT = \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{\varepsilon}_{k\,i}\underline{\varepsilon}'_{k\,i} = \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_{k}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_{k}\right)' \qquad (4.49)$$

eşitliği ile verilir.

**$\underline{\mu}_{..}$- parametresinin tahmini:**

$\left.\frac{\partial HKÇT}{\partial \underline{\mu}_{..}}\right]_{\underline{\mu}_{..}=\underline{\hat{\mu}}_{..}} = -2\sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\hat{\mu}}_{..} - \underline{\tau}_{k}\right) = \underline{0} \implies \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} - \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{\hat{\mu}}_{..} - \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{\tau}_{k} = \underline{0} \implies \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} - \left(\sum_{k=1}^{g}n_k\right)\underline{\hat{\mu}}_{..} - \sum_{k=1}^{g}n_k\underline{\tau}_{k} = \underline{0} \implies$ model varsayımı gereğince $\sum_{k=1}^{g}n_k\underline{\tau}_{k} = \underline{0}$ ve $N = \sum_{k=1}^{g}n_k$ olduğundan $\sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} - N\underline{\hat{\mu}}_{..} = \underline{0}$. Böylece;

$$\underline{\hat{\mu}}_{..} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} = \frac{\underline{T}_{..}}{N} = \underline{\overline{X}}_{..} \qquad (4.50)$$

bulunur. Bu sonuca göre genel kitle ortalama vektörünün en küçük kareler tahmin edicisi genel örnek ortalama vektörüdür.

**$\underline{\mu}_{k\,.}$- parametresinin tahmini ($k = 1, 2, \ldots, g$):**

Eşitlik (4.49) ile verilen HKÇT'da $\underline{\tau}_{k} = \underline{\mu}_{k\,.} - \underline{\mu}_{..}$ yazarak HKÇT'nı yeniden ifade edelim.

$$HKÇT = \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{k\,.} + \underline{\mu}_{..}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{k\,.} + \underline{\mu}_{..}\right)'$$

$$HKÇT = \sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{k\,.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{k\,.}\right)'$$

$$\left.\frac{\partial HKÇT}{\partial \underline{\mu}_{k\,.}}\right]_{\underline{\mu}_{k\,.}=\underline{\hat{\mu}}_{k\,.}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\mu}_{k\,.}}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\left(\underline{X}_{1i} - \underline{\mu}_{1\,.}\right)\left(\underline{X}_{1i} - \underline{\mu}_{1\,.}\right)' + \cdots + \sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{k\,.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{k\,.}\right)' + \cdots + \sum_{i=1}^{n_g}\left(\underline{X}_{gi} - \underline{\mu}_{g\,.}\right)\left(\underline{X}_{gi} - \underline{\mu}_{g\,.}\right)'\right]_{\underline{\mu}_{k\,.}=\underline{\hat{\mu}}_{k\,.}}$$

$$= \left[\underline{0} + \underline{0} + \cdots + \underline{0} - 2\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{k.}\right) + \underline{0} + \cdots + \underline{0}\right]_{\underline{\mu}_{k.} = \underline{\hat{\mu}}_{k.}}$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\hat{\mu}}_{k.}\right) = \underline{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} - \sum_{i=1}^{n_k}\underline{\hat{\mu}}_{k.} = \underline{0} \Longrightarrow$$

$$n_k\underline{\hat{\mu}}_{k.} = \sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} \Longrightarrow$$

$$\underline{\hat{\mu}}_{k.} = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} = \frac{T_{k.}}{n_k} = \underline{\overline{X}}_{k.}\,,\ k = 1, 2, \ldots, g \qquad (4.51)$$

elde edilir. Bu sonuca göre $k$ −ncı gruba ait kitle ortalama vektörünün EKK tahmin edicisi bu gruba ait örnek ortalama vektörüdür.

**$\underline{\tau}_{k.}$- parametresinin tahmini ($k = 1, 2, \ldots, g$):**

Eşitlik (4.49) ile verilen HKÇT'nı kullanalım.

$$\left.\frac{\partial HKÇT}{\partial \underline{\tau}_{k.}}\right]_{\underline{\tau}_{k.} = \underline{\hat{\tau}}_{k.};\, \underline{\mu}_{..} = \underline{\hat{\mu}}_{..}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\tau}_{k.}}\Big[\sum_{i=1}^{n_1}\left(\underline{X}_{1i} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_1\right)\left(\underline{X}_{1i} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_1\right)' + \cdots +$$

$$\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_k\right)\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_k\right)' + \cdots + \sum_{i=1}^{n_g}\left(\underline{X}_{gi} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_g\right)\left(\underline{X}_{gi} - \underline{\mu}_{..} -\right.$$

$$\left.\left.\underline{\tau}_g\right)'\Big]\right|_{\underline{\tau}_{k.} = \underline{\hat{\tau}}_{k.};\, \underline{\mu}_{..} = \underline{\hat{\mu}}_{..}} \Longrightarrow$$

$$= \left[\underline{0} + \underline{0} + \cdots + \underline{0} - 2\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_k\right) + \underline{0} + \cdots + \underline{0}\right]_{\underline{\tau}_{k.} = \underline{\hat{\tau}}_{k.};\, \underline{\mu}_{..} = \underline{\hat{\mu}}_{..}}$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \underline{\hat{\mu}}_{..} - \underline{\hat{\tau}}_k\right) = \underline{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} - \sum_{i=1}^{n_k}\underline{\overline{X}}_{..} - \sum_{i=1}^{n_k}\underline{\hat{\tau}}_k = \underline{0} \Longrightarrow$$

$$n_k\underline{\hat{\tau}}_k = \sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} - n_k\underline{\overline{X}}_{..} \Longrightarrow \underline{\hat{\tau}}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{..} \Longrightarrow$$

$$\underline{\hat{\tau}}_k = \underline{\overline{X}}_{k.} - \underline{\overline{X}}_{..}\,,\ k = 1, 2, \ldots, g \qquad (4.52)$$

elde edilir. Diğer taraftan $k = 1, 2, \ldots, g$ ve $i = 1, 2, \ldots, n_k$ için $k$-ncı grupta $i$-nci birime hatanın kestirimi;

$\underline{\varepsilon}_{ki} = \underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\tau}_k = \underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{..} - \underline{\mu}_{k.} + \underline{\mu}_{..} = \underline{X}_{ki} - \underline{\mu}_{k.}$ olduğundan;

$$\underline{\hat{\varepsilon}}_{ki} = \underline{X}_{ki} - \underline{\hat{\mu}}_{k.} = \underline{X}_{ki} - \underline{\overline{X}}_{k.}\,,\ k = 1, 2, \ldots, g\,;\ i = 1, 2, \ldots, n_k \qquad (4.53)$$

olarak bulunur.

### 4.5.1 Hipotez Testi

Çok değişkenli tek faktör varyans analizinde faktör düzeylerinin bağımlı değişkenler vektörü üzerine etkilerinin önemliliği veya faktör düzeylerinin oluşturduğu ve her birisi çok değişkenli normal dağılıma sahip bağımsız grupları ortalama vektörleri yönünden karşılaştırma bir hipotez testi ile kontrol edilebilir. Bu amaçla test edilecek olan hipotezler:

$$H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \cdots = \underline{\tau}_g = \underline{0} \quad \left( veya\, \underline{\mu}_{1\,.} = \underline{\mu}_{2\,.} = \cdots = \underline{\mu}_{g\,.} = \underline{\mu}_{.\,.} \right)$$
$$H_1 : \exists\, \underline{\tau}_k \neq \underline{0} \quad \left( veya\, \exists \underline{\mu}_{k\,.}\, diğerlerinden\, farklı \right) \tag{4.54}$$

şeklinde oluşturulur. Bu hipotezleri test edebilmek için kullanılan belli başlı teknikler;

i) Wilks'in olabilirlik oran testi

ii) Roy'un en büyük özdeğer testi

iii) Hotelling –Lawley iz testi

iv) Pillai iz testi

Test istatistiklerinin elde edilebilmesi için her bir gruptan rastgele olarak $n_k$ birimlik örnekler çekilir. Bu takdirde Tablo 4.1'de verilen örnek veri düzeninden yararlanarak Tablo 4.2'de verilen istatistikleri hesaplanabilir.

**Tablo 4.2** $g$-Tane Gruba Ait Çok Değişkenli Veri Düzeninden Hesaplanan Bazı İstatistikler

| | **I. Grup** | **II. Grup** | **…** | **g. Grup** | **GENEL** |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_k$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_g$ | $N$ |
| $\overline{\underline{X}}_{k\,.}$ | $\overline{\underline{X}}_{1\,.}$ | $\overline{\underline{X}}_{2\,.}$ | … | $\overline{\underline{X}}_{g\,.}$ | $\overline{\underline{X}}_{.\,.}$ |
| $S_k$ | $S_1$ | $S_2$ | … | $S_g$ | $S$ |
| $W_k$ | $W_1$ | $W_2$ | … | $W_g$ | $W = \sum_{k=1}^{g} W_k$ |

Tablo 4.2'de;

$\overline{\underline{X}}_{.\,.} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{g}\sum_{i=1}^{n_k}\underline{X}_{ki} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{g} n_k \overline{\underline{X}}_{k\,.}$ veya $n_1 = n_2 = \cdots = n_g = n$ ise $\overline{\underline{X}}_{.\,.} = \frac{1}{g}\sum_{k=1}^{g}\overline{\underline{X}}_{k\,.}$ … Genel örnek ortalama vektörü

$N = \sum_{k=1}^{g} n_k$ …Genel örnek hacmi

$S_k = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{k\,.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{k\,.}\right)'\,; k = \overline{1,g}$

( $\Sigma_k$ parametresinin EKK tahmin edicisi) … Faktörün $k$-ncı düzeyine ($k$-ncı gruba) ait örnek varyans kovaryans matrisi

$$W_k = (n_k - 1)S_k = \sum_{i=1}^{n_k}\left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{k\,.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{k\,.}\right)'\,; k = \overline{1,g} \tag{4.55}$$

Faktörün $k$-ncı düzeyine ($k$-ncı gruba) ait örnek kareler ve çarpımlar toplamı matrisi

$$S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{g}(n_k - 1)} \sum_{k=1}^{g} (n_k - 1) S_k = \frac{1}{N-g} \sum_{k=1}^{g} W_k \tag{4.56}$$

(Gruplar için ortak kitle varyans kovaryans matrisi Σ parametresinin tahmin edicisi) Örnek için ortak varyans kovaryans matrisidir.

Test istatistiklerinin elde edilmesinde varyans analizinin temel denklemi olarak bilinen;

$GKT = GAKT + HKT$ denkleminden yararlanırız. Bu denklemin çok değişkenli analizde karşılığı GKÇTM=GAKÇTM+HKÇTM, yani "Genel kareler ve çarpımlar toplamı matrisi = Gruplar arası kareler ve çarpımlar toplamı matrisi + Hata kereler ve çarpımlar toplamı matrisi" denklemidir. Burada;

$$T = \sum_{k=1}^{g} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{..}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{..}\right)' : p \times p \text{ ….(GKÇTM)} \tag{4.57}$$

$$B = \sum_{k=1}^{g} n_k \left(\overline{\underline{X}}_{k.} - \overline{\underline{X}}_{..}\right)\left(\overline{\underline{X}}_{k.} - \overline{\underline{X}}_{..}\right)' : p \times p\text{… (GAKÇTM)} \tag{4.58}$$

$$W = \sum_{k=1}^{g} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{k.}\right)\left(\underline{X}_{ki} - \overline{\underline{X}}_{k.}\right)' : p \times p \text{ … (HKÇTM)} \tag{4.59}$$

olmak üzere, $T = B + W$ dir.

Yukarıda bahsedilen teknikler (4.54)'de verilen hipotezleri test etmek için kullanılacak olan test istatistiklerini bu matrisleri veya bu matrislere ait bilgileri kullanarak türetmektedirler.

**i) Wilks'in Olabilirlik Oran Testi:**

Bu yöntem; $\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|}$ , $0 \leq \Lambda \leq 1$

olabilirlik oran istatistiği olmak üzere, test istatistiği olarak;

$$L = -\left[N - 1 - \frac{p+g}{2}\right] ln\Lambda \sim \chi^2_{p(g-1)} \tag{4.60}$$

veya

$$L = \left[N - 1 - (\Lambda)\frac{p+g}{2}\right] ln\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \sim \chi^2_{p(g-1)} \tag{4.61}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Karar:** $\alpha$ önem seviyesinde kritik değer; $\chi^2_{p(g-1)\,;\,\alpha}$ olmak üzere, eğer;

$L > \chi^2_{p(g-1)\,;\,\alpha}$ ise $H_0$ hipotezi ret edilir, $L \leq \chi^2_{p(g-1)\,;\,\alpha}$ ise $H_0$ hipotezi ret edilemez.

**ii) Roy'un En Büyük Özdeğer Testi**

Bu yöntem, $\lambda_j$ , $(j = 1, 2, \dots, p)$ ler $BW^{-1}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, test istatistiği olarak;

$$\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda} : 0 \leq \theta \leq 1 \tag{4.62}$$

istatistiği kullanılır. Burada $\lambda = Enb\{\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$'dır. $\hat{\theta}$ : Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri olsun. $\hat{\theta}$ istatistiğinin örneklem dağılımından yararlanarak oluşturulan kritik değerler tablosundan (Tablo A.10) $\alpha$ önem seviyesinde ve

$$s = min(g-1\,, p),\ m = \frac{(|g-p-1|-1)}{2}\,,\ \tilde{n} = \frac{(N-p-g-1)}{2} \tag{4.63}$$

parametrelerine göre belirlenecek olan kritik değer $\theta_t = \theta_{s;m;\,\tilde{n}\,:\alpha}$ olmak üzere $\hat{\theta} > \theta_t$ ise $H_0$ ret edilir, $\hat{\theta} \leq \theta_t$ ise $H_0$ ret edilemez.

**iii) Hotelling-Lawley İz Testi**

Bu yöntemde $\lambda_j\,, (j = 1, 2, \ldots, p)$ ler $BW^{-1}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$T_0^2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \text{İ}z(BW^{-1}) \tag{4.64}$$

istatistiği test istatistiği olarak kullanılır. Bu istatistiğin örnekleme dağılımı;

$$HL = NT_0^2 \sim \chi^2_{p(g-1)} \tag{4.65}$$

veya

$$F = \frac{p(N-p-1)+2}{p^2(g-1)} T_0^2 \sim F_{p^2(g-1);\, p(N-p-1)+2} \tag{4.66}$$

şeklindedir. $\alpha$ önem seviyesinde kritik değerler $\chi_t^2 = \chi^2_{p(g-1):\ \alpha}$ veya $F_t = F_{p^2(g-1);\, p(N-p-1)+2;\alpha}$ olmak üzere, eğer;

$HL > \chi_t^2$ veya $F > F_t$ ise $H_0$ ret edilir, $HL \leq \chi_t^2$ veya $F \leq F_t$ ise $H_0$ ret edilemez.

**iv) Pillai İz Testi**

Bu yöntemde $\lambda_j\,, (j = 1, 2, \ldots, p)$ ler $BW^{-1}$ matrisinin sıfırdan büyük özdeğerleri olmak üzere;

$$T = \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j}{1+\lambda_j} \tag{4.67}$$

istatistiği kullanılır. $T$ istatistiğinin örnekleme dağılımı için;

$$F = \frac{2\tilde{n}+s+1}{2m+s+1} \times \frac{T}{s-T} \sim F_{s(2m+s+1);s(2\tilde{n}+s+1)} \tag{4.68}$$

olduğu bilinmektedir. . $\alpha$ önem seviyesinde kritik değer $F_t = F_{s(2m+s+1);\, s(2\tilde{n}+s+1)\,;\alpha}$ olmak üzere, eğer;

$F > F_t$ ise $H_0$ ret edilir, $F \leq F_t$ ise $H_0$ ret edilemez.

**Yorum:** $H_0$ kabul edildiğinde grupların ortalama vektörlerinin birbirine eşit olduğunu, yani faktör düzeylerinin bağımlı değişkenler vektörü üzerine etkilerinin önemsiz olduğu söylenir. Her bir düzey aynı etkiyi yapmaktadır.

$H_0$ ret edildiğinde ise en az bir faktör düzeyinin etkisinin diğerlerinden farklı olduğu söylenir.

Bu durumda farklılığın kaynakları (hangi gruplar arasında ve hangi değişkenler yönünden) araştırılabilir. Bu amaçla $\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k$ parametresi için $1-\alpha$ güven katsayılı güven aralığı kullanılır. Burada;

$\underline{a} = [0 \ \ ... \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ ... \ \ 0]: 1 \times p$ ($j$-nci bileşeni “1” diğer bileşenleri “0” seçerek oluşturulur), bu vektör karşılaştırılacak olan değişkenler için kullanılır $(j = 1, 2, \dots, p)$.

$c_k \in \underline{C}$ öyle ki $\underline{C} = [c_1 \quad c_2 \ \dots \ c_g] = [0 \ \ \dots 1 \ \dots -1 \ \ \dots \ \ 0] : 1 \times g$ ($k$-ncı bileşen “1” ve $l$-nci bileşen “-1” ve diğer bileşenler “0” seçilerek oluşturulur), karşılaştırılacak gruplar için kullanılır $(k \neq l = 1, 2, \dots g)$. Ayrıca $\sum_{k=1}^{g} c_k = 0$ olmasına dikkat edilmelidir.

Bu seçimlere göre $\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k$ parametresi;

$\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}\left(\underline{\tau}_k - \underline{\tau}_l\right) = \underline{a}\left[\underline{\mu}_{k.} - \underline{\mu}_{l.}\right] = \mu_{jk} - \mu_{jl} \ ; \ j = \overline{1,p}; k \neq l = \overline{1,g}$ olup, test edilecek hiotezler;

$$H_0 : \mu_{jk} - \mu_{jl} = 0 \ \ j = \overline{1,p}; k \neq l = \overline{1,g}$$

$$H_1 : \mu_{jk} - \mu_{jl} \neq 0 \tag{4.69}$$

şeklinde oluşturulur. Toplam test edilecek olan hipotez sayısı $p\binom{g}{2}$ kadardır. Güven aralığı;

$$P\left[\underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k - \sqrt{\theta_t}\sqrt{\underline{a}\,W\,\underline{a}'\left(\sum_{k=1}^{g}\frac{c_k^2}{n_k}\right)} \leq \underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\tau}_k \leq \underline{a}\sum_{k=1}^{g} c_k \underline{\hat{\tau}}_k + \sqrt{\theta_t}\sqrt{\underline{a}\,W\,\underline{a}'\left(\sum_{k=1}^{g}\frac{c_k^2}{n_k}\right)}\right] = 1 - \alpha \tag{4.70}$$

bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsıyorsa $H_0$ kabul edilir ve böylece $X_j$ ; $(j = 1, 2, \ \ p)$ değişkeni bakımından $k$-ncı ve $l$-nci gruplar arasında fark yoktur. Güven aralığı sıfırı kapsamıyorsa $H_0$ ret edilir, buna göre $X_j$ ; $(j = 1, 2, \ \ p)$ değişkeni bakımından $k$-ncı ve $l$-nci gruplar arasında farkvardır.

**Table A.10. Upper Critical Values for Roy's Test, $\alpha = .05$**

Roy's test statistic is given by

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1},$$

where $\lambda_1$ is the largest eigenvalue of $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$. The parameters are

$$s = \min(\nu_H, p), \qquad m = \frac{|\nu_H - p| - 1}{2}, \qquad N = \frac{\nu_E - p - 1}{2}.$$

Reject $H_0$ if $\theta >$ table value.

| | $m$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 | 15 |
| | | | | $s = 2$ | | | | | |
| 5 | .565 | .651 | .706 | .746 | .776 | .799 | .834 | .868 | .901 |
| 10 | .374 | .455 | .514 | .561 | .598 | .629 | .679 | .732 | .789 |
| 15 | .278 | .348 | .402 | .446 | .483 | .515 | .567 | .627 | .696 |
| 20 | .221 | .281 | .329 | .369 | .404 | .434 | .486 | .546 | .620 |
| 25 | .184 | .236 | .278 | .314 | .346 | .375 | .424 | .484 | .558 |
| 30 | .157 | .203 | .241 | .274 | .303 | .330 | .376 | .433 | .507 |
| 40 | .122 | .159 | .190 | .218 | .243 | .266 | .306 | .359 | .428 |
| 50 | .099 | .130 | .157 | .180 | .202 | .222 | .259 | .306 | .370 |
| 60 | .084 | .110 | .133 | .154 | .173 | .191 | .223 | .266 | .326 |
| 80 | .064 | .085 | .103 | .119 | .135 | .149 | .176 | .211 | .263 |
| 120 | .043 | .058 | .070 | .082 | .093 | .104 | .123 | .150 | .190 |
| 240 | .022 | .030 | .036 | .042 | .048 | .054 | .065 | .080 | .103 |
| | | | | $s = 3$ | | | | | |
| 5 | .669 | .729 | .770 | .800 | .822 | .840 | .867 | .894 | .920 |
| 10 | .472 | .537 | .586 | .625 | .656 | .683 | .725 | .770 | .819 |
| 15 | .362 | .422 | .469 | .508 | .541 | .569 | .616 | .669 | .730 |
| 20 | .293 | .346 | .390 | .427 | .458 | .486 | .533 | .589 | .656 |
| 25 | .246 | .294 | .333 | .367 | .397 | .424 | .470 | .525 | .594 |
| 30 | .212 | .255 | .291 | .322 | .350 | .375 | .419 | .473 | .543 |
| 40 | .166 | .201 | .232 | .259 | .283 | .305 | .345 | .395 | .462 |
| 50 | .136 | .167 | .192 | .216 | .237 | .257 | .292 | .339 | .402 |
| 60 | .116 | .142 | .164 | .185 | .204 | .221 | .254 | .296 | .355 |
| 80 | .089 | .109 | .127 | .144 | .160 | .174 | .201 | .237 | .288 |
| 120 | .061 | .075 | .088 | .100 | .111 | .122 | .142 | .169 | .209 |
| 240 | .031 | .039 | .046 | .052 | .058 | .064 | .075 | .090 | .114 |

**Table A.10.** (*Continued*)

| $N$ | $m$ = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $s = 4$ | | | | |
| 5 | .739 | .782 | .813 | .836 | .854 | .868 | .889 | .911 | .933 |
| 10 | .547 | .601 | .641 | .674 | .700 | .723 | .759 | .798 | .840 |
| 15 | .431 | .482 | .523 | .558 | .587 | .612 | .654 | .701 | .756 |
| 20 | .354 | .402 | .441 | .474 | .503 | .529 | .572 | .623 | .684 |
| 25 | .301 | .344 | .380 | .412 | .440 | .464 | .507 | .559 | .624 |
| 30 | .261 | .301 | .334 | .364 | .390 | .414 | .455 | .507 | .572 |
| 40 | .207 | .240 | .269 | .294 | .318 | .339 | .377 | .426 | .490 |
| 50 | .171 | .199 | .224 | .247 | .268 | .287 | .322 | .367 | .428 |
| 60 | .145 | .170 | .193 | .213 | .232 | .249 | .280 | .322 | .380 |
| 80 | .112 | .132 | .150 | .167 | .182 | .196 | .223 | .259 | .309 |
| 120 | .077 | .091 | .104 | .116 | .127 | .138 | .158 | .185 | .226 |
| 240 | .040 | .047 | .054 | .061 | .067 | .073 | .084 | .100 | .124 |
| | | | | | $s = 5$ | | | | |
| 5 | .788 | .821 | .845 | .863 | .877 | .888 | .906 | .924 | .942 |
| 10 | .607 | .651 | .685 | .713 | .735 | .755 | .786 | .820 | .857 |
| 15 | .488 | .533 | .569 | .599 | .625 | .648 | .685 | .728 | .777 |
| 20 | .407 | .449 | .485 | .515 | .542 | .565 | .604 | .651 | .708 |
| 25 | .349 | .388 | .422 | .451 | .477 | .500 | .540 | .588 | .648 |
| 30 | .305 | .341 | .373 | .400 | .425 | .448 | .487 | .535 | .597 |
| 40 | .243 | .275 | .302 | .327 | .349 | .370 | .406 | .453 | .514 |
| 50 | .202 | .230 | .254 | .276 | .296 | .315 | .348 | .392 | .451 |
| 60 | .173 | .197 | .219 | .238 | .257 | .274 | .304 | .345 | .401 |
| 80 | .134 | .154 | .171 | .188 | .203 | .217 | .243 | .278 | .329 |
| 120 | .093 | .107 | .120 | .132 | .143 | .154 | .174 | .201 | .241 |
| 240 | .048 | .056 | .063 | .069 | .076 | .082 | .093 | .109 | .134 |

(*continued*)

**Table A.10.** ***(Continued)***

| $N$ | $m$ = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $s = 6$ | | | | | |
| 5 | .825 | .850 | .869 | .883 | .895 | .904 | .918 | .934 | .949 |
| 10 | .655 | .692 | .721 | .744 | .764 | .781 | .808 | .838 | .871 |
| 15 | .537 | .576 | .608 | .635 | .658 | .678 | .711 | .750 | .795 |
| 20 | .454 | .491 | .523 | .551 | .575 | .596 | .632 | .676 | .728 |
| 25 | .392 | .428 | .458 | .485 | .509 | .531 | .568 | .613 | .669 |
| 30 | .345 | .378 | .407 | .433 | .457 | .478 | .514 | .560 | .618 |
| 40 | .278 | .307 | .333 | .356 | .378 | .397 | .432 | .477 | .536 |
| 50 | .232 | .258 | .281 | .302 | .322 | .340 | .372 | .414 | .472 |
| 60 | .200 | .223 | .243 | .262 | .280 | .297 | .327 | .366 | .421 |
| 80 | .156 | .174 | .192 | .208 | .222 | .236 | .262 | .297 | .346 |
| 120 | .108 | .122 | .134 | .146 | .157 | .168 | .188 | .215 | .255 |
| 240 | .056 | .064 | .071 | .078 | .084 | .090 | .101 | .118 | .142 |
| | | | | $s = 7$ | | | | | |
| 5 | .852 | .872 | .887 | .899 | .908 | .917 | .929 | .941 | .955 |
| 10 | .695 | .726 | .750 | .771 | .788 | .802 | .826 | .853 | .882 |
| 15 | .579 | .613 | .641 | .665 | .686 | .704 | .734 | .769 | .810 |
| 20 | .494 | .528 | .557 | .582 | .604 | .624 | .657 | .697 | .745 |
| 25 | .431 | .463 | .491 | .516 | .538 | .558 | .593 | .635 | .688 |
| 30 | .381 | .412 | .439 | .463 | .485 | .505 | .540 | .583 | .638 |
| 40 | .309 | .337 | .362 | .384 | .404 | .423 | .456 | .499 | .555 |
| 60 | .224 | .246 | .266 | .285 | .302 | .318 | .347 | .386 | .439 |
| 80 | .176 | .194 | .211 | .226 | .241 | .255 | .280 | .314 | .363 |
| 100 | .145 | .160 | .175 | .188 | .200 | .212 | .235 | .265 | .310 |
| 200 | .077 | .085 | .093 | .101 | .109 | .116 | .129 | .148 | .175 |
| 300 | .052 | .058 | .064 | .069 | .074 | .079 | .089 | .103 | .125 |
| 500 | .032 | .036 | .039 | .042 | .046 | .049 | .055 | .064 | .078 |
| 1000 | .016 | .018 | .020 | .022 | .023 | .025 | .028 | .033 | .041 |

**Table A.10.** *(Continued)*

| $N$ | $m$ = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $s = 8$ | | | | |
| 5 | .874 | .890 | .902 | .912 | .920 | .927 | .937 | .948 | .959 |
| 10 | .728 | .754 | .775 | .793 | .808 | .821 | .842 | .865 | .892 |
| 15 | .615 | .645 | .670 | .692 | .710 | .727 | .754 | .786 | .824 |
| 20 | .531 | .561 | .587 | .610 | .630 | .648 | .679 | .716 | .761 |
| 25 | .466 | .495 | .521 | .544 | .565 | .583 | .616 | .655 | .705 |
| 30 | .414 | .443 | .468 | .491 | .511 | .530 | .563 | .603 | .655 |
| 40 | .339 | .365 | .388 | .409 | .428 | .446 | .478 | .519 | .573 |
| 60 | .248 | .269 | .288 | .306 | .323 | .338 | .367 | .404 | .456 |
| 80 | .195 | .213 | .229 | .244 | .259 | .272 | .297 | .330 | .378 |
| 100 | .161 | .176 | .190 | .203 | .216 | .228 | .250 | .279 | .323 |
| 200 | .086 | .094 | .103 | .110 | .118 | .125 | .138 | .157 | .185 |
| 300 | .058 | .065 | .070 | .076 | .081 | .086 | .096 | .109 | .130 |
| 500 | .036 | .040 | .043 | .047 | .050 | .053 | .059 | .068 | .081 |
| 1000 | .018 | .020 | .022 | .024 | .025 | .027 | .030 | .035 | .042 |
| | | | | | $s = 9$ | | | | |
| 5 | .891 | .904 | .914 | .922 | .929 | .935 | .944 | .953 | .963 |
| 10 | .756 | .778 | .797 | .812 | .825 | .837 | .855 | .876 | .901 |
| 15 | .647 | .674 | .696 | .715 | .732 | .747 | .771 | .801 | .835 |
| 20 | .563 | .591 | .614 | .635 | .654 | .670 | .698 | .733 | .775 |
| 25 | .497 | .525 | .549 | .570 | .589 | .606 | .636 | .673 | .720 |
| 30 | .445 | .471 | .495 | .516 | .535 | .552 | .583 | .622 | .671 |
| 40 | .366 | .391 | .413 | .433 | .451 | .468 | .499 | .538 | .590 |
| 60 | .270 | .291 | .309 | .326 | .343 | .358 | .385 | .421 | .472 |
| 80 | .214 | .231 | .247 | .262 | .276 | .289 | .313 | .346 | .392 |
| 100 | .177 | .192 | .206 | .219 | .231 | .242 | .264 | .293 | .336 |
| 200 | .095 | .104 | .112 | .119 | .127 | .134 | .147 | .166 | .194 |
| 300 | .065 | .071 | .077 | .082 | .087 | .092 | .102 | .115 | .136 |
| 500 | .040 | .043 | .047 | .051 | .054 | .057 | .063 | .072 | .086 |
| 1000 | .020 | .022 | .024 | .026 | .028 | .029 | .032 | .037 | .044 |
| | | | | | $s = 10$ | | | | |
| 5 | .905 | .916 | .924 | .931 | .937 | .941 | .949 | .958 | .967 |
| 10 | .780 | .799 | .815 | .829 | .840 | .851 | .867 | .886 | .908 |
| 15 | .675 | .699 | .719 | .736 | .751 | .764 | .787 | .814 | .846 |
| 20 | .592 | .617 | .639 | .658 | .675 | .690 | .716 | .748 | .787 |
| 25 | .526 | .551 | .573 | .593 | .611 | .627 | .655 | .690 | .734 |
| 30 | .473 | .497 | .519 | .539 | .557 | .573 | .603 | .639 | .686 |
| 40 | .392 | .415 | .436 | .455 | .473 | .489 | .518 | .555 | .605 |
| 60 | .292 | .311 | .329 | .346 | .361 | .376 | .402 | .438 | .487 |
| 80 | .232 | .249 | .264 | .278 | .292 | .305 | .329 | .361 | .406 |
| 100 | .193 | .207 | .220 | .233 | .245 | .256 | .278 | .306 | .348 |
| 200 | .104 | .112 | .120 | .128 | .135 | .142 | .156 | .174 | .202 |
| 300 | .071 | .077 | .083 | .088 | .093 | .098 | .108 | .122 | .143 |
| 500 | .044 | .047 | .051 | .054 | .058 | .061 | .067 | .076 | .090 |
| 1000 | .022 | .024 | .026 | .028 | .030 | .031 | .034 | .039 | .047 |