



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

14. Hafta

özenilen üniversite

Örnek 4.6 Bir araştırmacı üç farklı hastalık grubundaki (Kronik Hepatit, Siroz ve Malignite) hastaların β -fonksiyonlarını (ü/l) ve albüminlerini (gr/dl) ölçmüştür. Bu ölçümlerin gruplara (hastalık türlerine) göre değişip değişmediğini öğrenmek istemektedir. Her bir gruba ait dağılımlar $N_2(\underline{\mu}_k, \Sigma)$, ($k = 1, 2, 3$) olduğu varsayılmıştır. Her gruptan 15 hasta üzerinde elde edilen ölçümler aşağıdadır. Buna göre;

a) Bu problemin çözümleri için uygun olan istatistiksel analizi ve model denklemini belirleyiniz.

b) Model parametrelerinin EKK tahmin edicilerini ve ikinci grupta beřinci gözlemin hata kestirimini bulunuz?

c) Gruplara (hastalık türlerine) göre kitle ortalama vektörleri arasında fark olup olmadığına

i) Wilks'in olabilirlik oran testi ile

ii) Hotelling-Lawley İz testi ile

iii) Roy'un en büyük özdeğer testi ile

iv) Pillai İz testi ile

%5 önem seviyesinde karar veriniz.

d) Gruplar arasında farklılık varsa, bu farklılığın hangi değişken yönünden hangi gruplar arasında ortaya çıktığını belirleyiniz.

HASTALIK TÜRLERİ (GRUPLAR)						
Kronik Hepatit		Siroz		Malignite		
$X_1(\beta - fonk)$	$X_2(\text{Albümin})$	$X_1(\beta - fonk)$	$X_2(\text{Albümin})$	$X_1(\beta - fonk)$	$X_2(\text{Albümin})$	
21	5,0	11	3,0	17	0,8	
16	5,1	13	4,3	15	1,3	
15	4,5	14	3,4	17	2,2	
19	4,7	10	1,8	18	2,7	
18	2,8	9	2,2	17	1,9	
13	5,3	12	2,7	16	1,4	
16	4,7	10	2,5	14	2,6	
14	4,5	8	3,1	16	1,0	
17	3,6	12	2,8	17	1,5	
16	3,8	11	2,2	15	0,7	
19	2,7	14	1,5	19	0,4	
15	3,8	9	1,6	19	1,4	
17	3,5	13	1,7	14	1,5	
17	5,0	11	1,4	16	1,7	
16	3,1	10	1,9	13	1,0	
$T_{11} =$	$T_{21} =$	$T_{12} =$	$T_{22} =$	$T_{13} =$	$T_{23} =$	
$\bar{X}_{1.} = \begin{bmatrix} 16,6 \\ 4,14 \end{bmatrix}$		$\bar{X}_{2.} = \begin{bmatrix} 11,133 \\ 2,407 \end{bmatrix}$		$\bar{X}_{3.} = \begin{bmatrix} 16,2 \\ 1,473 \end{bmatrix}$		$\bar{X}_{..} = \begin{bmatrix} 14,644 \\ 2,673 \end{bmatrix}$

Çözüm: a) Bağımlı değişkenler...

X_1 : Beta fonksiyon değeri ($\beta - \text{ü/l}$)... Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

X_2 : Albümin değeri (gr/dl)... Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama, olmak üzere değişkenler vektörü $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ olacaktır.

Faktör (Bağımsız değişken): Hastalık türü.... Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

$$\text{Faktör Düzeyleri...} \begin{cases} \text{Kronik Hepatit (I. Grup) ... } \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}_{1.}, \Sigma) \\ \text{Siroz (II. Grup) ... } \underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}_{2.}, \Sigma) \\ \text{Malignite (III. Grup) ... } \underline{X}_3 = \begin{bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \end{bmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}_{3.}, \Sigma) \end{cases} \quad \text{Gruplar bağımsız ve}$$

homojen kovaryans matrislidir. Bu açıklamalar göre problemin çözümü için uygun olan istatistiksel analiz, çok değişkenli tek faktör varyans analizidir. Bu analiz için model denklemi; Eşitlik (4.48)'den

$$\underline{X}_{ki} = \underline{\mu}_{.} + \underline{\tau}_k + \underline{\varepsilon}_{ki}, \quad k = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n_k; (g = 3; p = 2)$$

şeklinindedir. Burada, $k = 1, 2, 3$ için $\underline{\tau}_k = \underline{\mu}_{k.} - \underline{\mu}_{.}$ dür.

b)

Parametre	EKK Tahmin Edicileri
$\underline{\mu}_{.}$	$\bar{\underline{X}}_{.} = \frac{T_{.}}{N} = \begin{bmatrix} 14,644 \\ 2,673 \end{bmatrix}$
$\underline{\mu}_{1.}$	$\bar{\underline{X}}_{1.} = \frac{T_{1.}}{n_1} = \begin{bmatrix} 16,6 \\ 4,14 \end{bmatrix}$
$\underline{\mu}_{2.}$	$\bar{\underline{X}}_{2.} = \frac{T_{2.}}{n_2} = \begin{bmatrix} 11,133 \\ 2,407 \end{bmatrix}$
$\underline{\mu}_{3.}$	$\bar{\underline{X}}_{3.} = \frac{T_{3.}}{n_3} = \begin{bmatrix} 16,2 \\ 1,473 \end{bmatrix}$
$\underline{\tau}_1$	$\hat{\underline{\tau}}_1 = \bar{\underline{X}}_{1.} - \bar{\underline{X}}_{.} = \begin{bmatrix} 16,6 \\ 4,14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14,644 \\ 2,673 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,956 \\ 1,467 \end{bmatrix}$
$\underline{\tau}_2$	$\hat{\underline{\tau}}_2 = \bar{\underline{X}}_{2.} - \bar{\underline{X}}_{.} = \begin{bmatrix} 11,133 \\ 2,407 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14,644 \\ 2,673 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,511 \\ -0,266 \end{bmatrix}$
$\underline{\tau}_3$	$\hat{\underline{\tau}}_3 = \bar{\underline{X}}_{3.} - \bar{\underline{X}}_{.} = \begin{bmatrix} 16,2 \\ 1,473 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14,644 \\ 2,673 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,556 \\ -1,2 \end{bmatrix}$
$\underline{\varepsilon}_{25}$	$\hat{\underline{\varepsilon}}_{25} = \underline{X}_{25} - \bar{\underline{X}}_{2.} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2,2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11,133 \\ 2,407 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,133 \\ -0,207 \end{bmatrix}$

c) Test edilecek hipotezler

$$H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \underline{\tau}_3 = \underline{0} \quad (\text{veya } \underline{\mu}_{1.} = \underline{\mu}_{2.} = \underline{\mu}_{3.} = \underline{\mu}_{.})$$

$$H_1 : \exists \underline{\tau}_k \neq \underline{0} \quad (\text{veya } \exists \underline{\mu}_{k.} \text{ diğerlerinden farklı})$$

i) Wilks'in olabilirlik oran testi ile

$$\text{Test istatistiği; } L = - \left[N - 1 - \frac{p+g}{2} \right] \ln \Lambda \sim \chi_{p(g-1)}^2$$

$$N = \sum_{k=1}^g n_k = n_1 + n_2 + n_3 = 15 + 15 + 15 = 45$$

$$\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|}, 0 \leq \Lambda \leq 1$$

$$W = \sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^{n_k} (\underline{X}_{ki} - \bar{X}_{k.}) (\underline{X}_{ki} - \bar{X}_{k.})' = W_1 + W_2 + W_3 = \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix}$$

$$B = \sum_{k=1}^g n_k (\bar{X}_{k.} - \bar{X}_{..}) (\bar{X}_{k.} - \bar{X}_{..})' ; \quad \bar{X}_{k.} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \underline{X}_{ki}, k = 1, 2, 3; \quad \bar{X}_{1.} = \begin{bmatrix} 16,6 \\ 4,14 \end{bmatrix} ;$$

$$\bar{X}_{2.} = \begin{bmatrix} 11,133 \\ 2,407 \end{bmatrix}; \bar{X}_{3.} = \begin{bmatrix} 16,2 \\ 1,473 \end{bmatrix} \text{ ve ise } \bar{X}_{..} = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^g \bar{X}_{k.} = \frac{1}{3} \{ \bar{X}_{1.} + \bar{X}_{2.} + \bar{X}_{3.} \} = \begin{bmatrix} 14,644 \\ 2,673 \end{bmatrix}$$

$$B = 15 \left\{ \begin{bmatrix} 1,956 \\ 1,467 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,956 & 1,467 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3,511 \\ -0,266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3,511 & -0,266 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,556 \\ -1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,556 & -1,2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 278,61 & 29,04 \\ 29,04 & 54,945 \end{bmatrix}$$

$$B + W = \begin{bmatrix} 278,61 & 29,04 \\ 29,04 & 54,945 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 430,343 & 27,347 \\ 27,347 & 81,04 \end{bmatrix}$$

$$|W| = \begin{vmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{vmatrix} = 3956,606386 ; |B + W| = \begin{vmatrix} 430,343 & 27,347 \\ 27,347 & 81,04 \end{vmatrix} = 34127,13831$$

$$\Lambda = \frac{3956,606386}{34127,13831} = 0,116 \Rightarrow L = - \left[45 - 1 - \frac{2+3}{2} \right] \ln(0,116) = 89,398$$

Kritik değer; $\alpha = 0,05$ için $\chi_{p(g-1)}^2; \alpha = \chi_{4;0,05}^2 = 9,488 \Rightarrow L = 89,398 > 9,488$ olduğundan H_0 ret edilir.

ii) Hotelling-Lawley İz Testi

Test istatistiği; $HL = NT_0^2 \sim \chi_{p(g-1)}^2$ veya $F = \frac{p(N-p-1)+2}{p^2(g-1)} T_0^2 \sim F_{p^2(g-1); p(N-p-1)+2}$

$N = 45; p = 2; g = 3; T_0^2 = \sum_{j=1}^p \lambda_j$ ve λ_j 'ler BW^{-1} matrisinin özdeğerleri

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0066 & 0,0004 \\ 0,0004 & 0,0383 \end{bmatrix} \Rightarrow BW^{-1} = \begin{bmatrix} 1,8505 & 1,224 \\ 0,2137 & 2,1159 \end{bmatrix} \Rightarrow |BW^{-1} - \lambda I| = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2,512 \text{ ve } \lambda_2 = 1,455$$

$$T_0^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 3,967 = \text{İz}(BW^{-1}) \Rightarrow HL = 45 \times 3,967 = 178,515$$

Kritik değer; $\alpha = 0,05$ için $\chi_{p(g-1)}^2; \alpha = \chi_{4;0,05}^2 = 9,488 \Rightarrow HL = 178,515 > 9,488$ olduğundan H_0 ret edilir.

iii) Roy'un Enbüyük Özdeğer Testi

Test istatistiği;

$\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda} : 0 \leq \theta \leq 1; \lambda = \text{Enb}\{\lambda_1, \lambda_2\} = \text{Enb}\{2,512; 1,455\} = 2,512$ olmak üzere, test istatistiğinin alabileceği değer $\hat{\theta} = \frac{2,512}{1+2,512} = 0,71526$ bulunur.

Kritik değer; $s = \min(g-1, p) = \min(2, 2) = 2 ; m = \frac{|g-p-1|-1}{2} = \frac{|3-2-1|-1}{2} = -\frac{1}{2} \cong 0$ alınır ve $\tilde{n} = \frac{N-g-p-1}{2} = \frac{45-3-2-1}{2} = 19,5 \cong 20$ ve $\alpha = 0,05$ iken

$\theta_t = \theta_{s;m;\tilde{n};\alpha} = \theta_{2;0;20;0,05} = 0,221$ olup, $\hat{\theta} = 0,71526 > 0,221 = \theta_t$ olduğundan H_0 ret edilir.

iv) Pillai İz Testi

Test istatistiği; $F = \frac{2\tilde{n}+s+1}{2m+s+1} \times \frac{T}{s-T} \sim F_{s(2m+s+1);s(2\tilde{n}+s+1)}$

$T = \sum_j \frac{\lambda_j}{1+\lambda_j}$ ve λ_j : BW^{-1} matrisinin özdeğerleri

$$T = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{2,512}{1+2,512} + \frac{1,455}{1+1,455} = 1,308 \Rightarrow F = \frac{2 \times 19,5 + 2 + 1}{2(-1/2) + 2 + 1} \times \frac{1,308}{2 - 1,308} = 39,69 \text{ bulunur.}$$

$\alpha = 0,05$ iken $F_t = F_{4;84;0,05} \cong 2,48$ olur. Buna göre $F = 39,69 > 2,48 = F_t$ olduğundan H_0 ret edilir.

Yorum: Hastaların β fonksiyonları ve albümin değerleri üzerine hastalık türlerinin etkisi farklılık göstermektedir.

d) Hastalık türlerine göre kitle ortalama vektörleri farklılık gösterdiğinden, hangi değişken için hangi gruplar arasında farklılık ortaya çıktığını belirlemek için $\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k$ parametresi ile ilgili güven aralığından yararlanılır. Bu güven aralığı

$$P \left[\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\underline{\tau}}_k - \sqrt{\theta_t} \sqrt{\underline{a} W \underline{a}' \left(\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} \right)} \leq \underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k \leq \underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\underline{\tau}}_k + \sqrt{\theta_t} \sqrt{\underline{a} W \underline{a}' \left(\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} \right)} \right] = 1 - \alpha$$

şeklindedir. Mümkün olan ikili karşılaştırmaların sayısı $p \binom{g}{2} = 2 \binom{3}{2} = 6$ dır.

X_1 değişkeni (β - fonksiyon değeri) için: $\underline{a} = [1 \ 0]$: 1×2 ($p = 2$ olduğundan) seçilir.

i) I. Grup (Kronik Hepatit) ile II. Grup (Siroz) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k = \underline{a} (\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_2) = \underline{a} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{21} - \mu_{22} \end{bmatrix} = \mu_{11} - \mu_{12}$$

Hipotezler:

$$H_0 : \mu_{11} = \mu_{12}$$

$$H_1 : \mu_{11} \neq \mu_{12}$$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\underline{\tau}}_k = \underline{a} (\hat{\underline{\tau}}_1 - \hat{\underline{\tau}}_2) = \underline{a} (\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.}) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} - \bar{X}_{12} \\ \bar{X}_{21} - \bar{X}_{22} \end{bmatrix} = \bar{X}_{11} - \bar{X}_{12} = 16,6 - 11,133 = 5,467$$

$$\underline{a} W \underline{a}' = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = w_{11} = 151,733$$

$$\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0,221$$

$$P\left(5,467 - \sqrt{0,221} \sqrt{151,733 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{11} - \mu_{12} \leq 5,467 + \sqrt{0,221} \sqrt{151,733 \times \frac{2}{15}}\right) = 0,95$$

$P(3,353 \leq \mu_{11} - \mu_{12} \leq 7,581) = 0,95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{11} = \mu_{12}$ hipotezi ret edilir. Böylece β - fonksiyon değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Siroz grubu farklılık göstermektedir. Kronik Hepatit grubunun β - fonksiyon değerleri daha yüksektir.

ii) I. Grup (Kronik Hepatit) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_3) = \underline{a}(\underline{\mu}_{1.} - \underline{\mu}_{.} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{.}) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{13} \\ \mu_{21} - \mu_{23} \end{bmatrix} = \mu_{11} - \mu_{13}$$

Hipotezler:

$$H_0 : \mu_{11} = \mu_{13}$$

$$H_1 : \mu_{11} \neq \mu_{13}$$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\tau}_k = \underline{a}(\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3) = \underline{a}(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{3.}) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} - \bar{X}_{13} \\ \bar{X}_{21} - \bar{X}_{23} \end{bmatrix} = \bar{X}_{11} - \bar{X}_{13} = 16,6 - 16,2 = 0,4$$

$$\underline{a} W \underline{a}' = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = w_{11} = 151,733$$

$$\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0,221$$

$$P\left(0,4 - \sqrt{0,221} \sqrt{151,733 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{11} - \mu_{13} \leq 0,4 + \sqrt{0,221} \sqrt{151,733 \times \frac{2}{15}}\right) = 0,95$$

$P(-1,714 \leq \mu_{11} - \mu_{13} \leq 2,514) = 0,95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsadığından $H_0 : \mu_{11} = \mu_{13}$ hipotezi ret edilemez. Böylece β - fonksiyon değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Malignite grubu farklılık göstermemektedir.

iii) II. Grup (Siroz) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k = \underline{a}(\underline{\tau}_2 - \underline{\tau}_3) = \underline{a}(\underline{\mu}_{2.} - \underline{\mu}_{.} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{.}) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \end{bmatrix} = \mu_{12} - \mu_{13}$$

Hipotezler:

$$H_0 : \mu_{12} = \mu_{13}$$

$$H_1 : \mu_{12} \neq \mu_{13}$$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\tau}_k = \underline{a}(\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_3) = \underline{a}(\bar{X}_{2.} - \bar{X}_{3.}) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{X}_{12} - \bar{X}_{13} \\ \bar{X}_{22} - \bar{X}_{23} \end{bmatrix} = \bar{X}_{12} - \bar{X}_{13} = 11,133 - 16,2 = -5,067$$

$$\underline{a} W \underline{a}' = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = w_{11} = 151,733$$

$$\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(0)^2}{15} + \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0,221$$

$$P\left(-5,067 - \sqrt{0,221} \sqrt{151,733 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{12} - \mu_{13} \leq -5,067 + \sqrt{0,221} \sqrt{151,733 \times \frac{2}{15}}\right) = 0,95$$

$P(-7,181 \leq \mu_{12} - \mu_{13} \leq -2,953) = 0,95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{12} = \mu_{13}$ hipotezi ret edilir. Buna göre β – fonksiyon değeri bakımından Siroz grubu ile Malignite grubu farklılık göstermektedir. Üstelik Malignite grubunun β – fonksiyon değerleri daha yüksektir.

X_2 değişkeni (Albümin değeri) için : $\underline{a} = [0 \ 1] : 1 \times 2$ ($p = 2$ olduğundan) seçilir.

i) I. Grup (Kronik Hepatit) ile II. Grup (Siroz) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 0$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k = \underline{a} (\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_2) = \underline{a} (\underline{\mu}_{1.} - \underline{\mu}_{. .} - \underline{\mu}_{2.} + \underline{\mu}_{. .}) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{21} - \mu_{22} \end{bmatrix} = \mu_{21} - \mu_{22}$$

Hipotezler:

$$H_0 : \mu_{21} = \mu_{22}$$

$$H_1 : \mu_{21} \neq \mu_{22}$$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\tau}_k = \underline{a} (\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2) = \underline{a} (\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.}) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} - \bar{X}_{12} \\ \bar{X}_{21} - \bar{X}_{22} \end{bmatrix} = \bar{X}_{21} - \bar{X}_{22} = 4,14 - 2,407 = 1,733$$

$$\underline{a} W \underline{a}' = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w_{22} = 26,095$$

$$\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0,221$$

$$P\left(1,733 - \sqrt{0,221} \sqrt{26,095 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq 1,733 + \sqrt{0,221} \sqrt{26,095 \times \frac{2}{15}}\right) = 0,95$$

$P(0,856 \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq 2,610) = 0,95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{21} = \mu_{22}$ hipotezi ret edilir. Böylece Albümin değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Siroz grubu farklılık göstermektedir. Kronik Hepatit grubunun Albümin değerleri daha yüksektir.

ii) I. Grup (Kronik Hepatit) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k = \underline{a} (\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_3) = \underline{a} (\underline{\mu}_{1.} - \underline{\mu}_{. .} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{. .}) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{13} \\ \mu_{21} - \mu_{23} \end{bmatrix} = \mu_{21} - \mu_{23}$$

Hipotezler:

$$H_0 : \mu_{21} = \mu_{23}$$

$$H_1 : \mu_{21} \neq \mu_{23}$$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{t}_k = \underline{a}(\hat{t}_1 - \hat{t}_3) = \underline{a}(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{3.}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} - \bar{X}_{13} \\ \bar{X}_{21} - \bar{X}_{23} \end{bmatrix} = \bar{X}_{21} - \bar{X}_{23} = 4,14 - 1,473 = 2,667$$

$$\underline{a} W \underline{a}' = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w_{22} = 26,095$$

$$\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{15} + \frac{(0)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0,221$$

$$P\left(2,667 - \sqrt{0,221} \sqrt{26,095 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{21} - \mu_{23} \leq 2,667 + \sqrt{0,221} \sqrt{26,095 \times \frac{2}{15}}\right) = 0,95$$

$P(1,79 \leq \mu_{21} - \mu_{23} \leq 3,54) = 0,95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsadığından $H_0 : \mu_{21} = \mu_{23}$ hipotezi ret edilir. Buna göre *Albümin* değeri bakımından Kronik Hepatit grubu ile Malignite grubu farklılık göstermektedir. Üstelik Kronik Hepatit grubunun *Albümin* değerleri daha yüksektir.

iii) II. Grup (Siroz) ile III. Grup (Malignite) karşılaştırması: $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \bar{t}_k = \underline{a}(\bar{t}_2 - \bar{t}_3) = \underline{a}(\underline{\mu}_{2.} - \underline{\mu}_{.} - \underline{\mu}_{3.} + \underline{\mu}_{.}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \mu_{12} - \mu_{13} \\ \mu_{22} - \mu_{23} \end{bmatrix} = \mu_{22} - \mu_{23}$$

Hipotezler:

$$H_0 : \mu_{22} = \mu_{23}$$

$$H_1 : \mu_{22} \neq \mu_{23}$$

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{t}_k = \underline{a}(\hat{t}_2 - \hat{t}_3) = \underline{a}(\bar{X}_{2.} - \bar{X}_{3.}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{X}_{12} - \bar{X}_{13} \\ \bar{X}_{22} - \bar{X}_{23} \end{bmatrix} = \bar{X}_{22} - \bar{X}_{23} = 2,407 - 1,473 = 0,934$$

$$\underline{a} W \underline{a}' = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 151,733 & -1,693 \\ -1,693 & 26,095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w_{22} = 26,095$$

$$\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(0)^2}{15} + \frac{(1)^2}{15} + \frac{(-1)^2}{15} = \frac{2}{15} \text{ ve } \theta_t = 0,221$$

$$P\left(0,934 - \sqrt{0,221} \sqrt{26,095 \times \frac{2}{15}} \leq \mu_{22} - \mu_{23} \leq 0,934 + \sqrt{0,221} \sqrt{26,095 \times \frac{2}{15}}\right) = 0,95$$

$P(0,057 \leq \mu_{22} - \mu_{23} \leq 1,811) = 0,95$ bulunur. Güven aralığı sıfırı kapsamadığından $H_0 : \mu_{22} = \mu_{23}$ hipotezi ret edilir. Böylece *Albümin* değeri bakımından Siroz grubu ile Malignite grubu farklılık göstermektedir. Üstelik Siroz grubunun *Albümin* değerleri daha yüksektir.

Örnek:4.7 Üç farklı bölgede yaşayan bireyler üzerinde yapılan bir çalışmada bireylerin kolesterol (X_1) ve HDL (X_2) değerleri mg/dL cinsinden ölçülmüştür. İlgili değişkenler bakımından bu bölgelere ait dağılımların çok değişkenli normal ve ortak varyans-kovaryans matrisli olduğu kabul edilmiştir. Bu bölgelerden rastgele seçilen 25'er bireye ait ölçümlerden aşağıdaki istatistikler hesaplanmıştır.

Buna göre;

a) İlgili özellikler bakımından bölgeler arasında fark olup-olmadığına herhangi bir yöntemi kullanarak karar veriniz.

b) I. ve II. bölgelerin HDL değerleri bakımından farklılık gösterip göstermediğine karar veriniz.

BÖLGELER	ORTALAMA VEKTÖRLERİ	VARYANS- KOVARYANS MATRİSLERİ
I	$\bar{\underline{X}}_{1.} = \begin{bmatrix} 262 \\ 39,16 \end{bmatrix}$	$S_1 = \begin{bmatrix} 2347,92 & -83,25 \\ -83,25 & 73,97 \end{bmatrix}$
II	$\bar{\underline{X}}_{2.} = \begin{bmatrix} 184,2 \\ 60,4 \end{bmatrix}$	$S_2 = \begin{bmatrix} 632,333 & 14,875 \\ 14,875 & 59,583 \end{bmatrix}$
III	$\bar{\underline{X}}_{3.} = \begin{bmatrix} 223 \\ 50,08 \end{bmatrix}$	$S_3 = \begin{bmatrix} 581,25 & -15,25 \\ -15,25 & 43,41 \end{bmatrix}$
GENEL	$\bar{\underline{X}}_{..} = \begin{bmatrix} 223,067 \\ 49,88 \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} 161137 & -22663 \\ -22663 & 9888 \end{bmatrix}$

Çözüm: a) Bağımlı değişkenler: X_1 :kolesterol ve X_2 : HDL değerleri... Nicel, süreli ve ölçme düzeyi oranlama

Faktör: Bölge.... Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

Bölge I (I. Grup): $\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}_{1.}, \Sigma)$

Bölge II (II. Grup): $\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}_{2.}, \Sigma)$

Bölge III (III. Grup): $\underline{X}_3 = \begin{bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \end{bmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}_{3.}, \Sigma)$

Gruplar bağımsız ve homojen kovaryans matrislidir. Bu açıklamalar göre problemin çözümü için uygun olan istatistiksel analiz, çok değişkenli tek faktör varyans analizidir. Bu analiz için model denklemi; Eşitlik (4.48)'den

$$\underline{X}_{ki} = \underline{\mu}_{.i} + \underline{\tau}_k + \underline{\varepsilon}_{ki}, \quad k = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n_k; (g = 3; p = 2)$$

şeklindedir. Burada, $k = 1, 2, 3$ için $\underline{\tau}_k = \underline{\mu}_{k.} - \underline{\mu}_{..}$ dür.

Test edilecek hipotezler

$$H_0 : \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_2 = \underline{\tau}_3 = \underline{0} \quad (\text{veya } \underline{\mu}_{1.} = \underline{\mu}_{2.} = \underline{\mu}_{3.} = \underline{\mu}_{..})$$

$$H_1 : \exists \underline{\tau}_k \neq \underline{0} \quad (\text{veya } \exists \underline{\mu}_{k.} \text{ diğerlerinden farklı})$$

i) Wilks'in olabilirlik oran testi ile

$$\text{Test istatistiği; } L = - \left[N - 1 - \frac{p+g}{2} \right] \ln \Lambda \sim \chi_{p(g-1)}^2$$

$$N = \sum_{k=1}^g n_k = n_1 + n_2 + n_3 = 25 + 25 + 25 = 75$$

$$\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|}, 0 \leq \Lambda \leq 1$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \sum_{k=1}^g (n_k - 1)S_k = 24(S_1 + S_2 + S_3) = \begin{bmatrix} 85476,072 & -83,625 \\ -83,625 & 176,963 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|W| = 15119108,99$$

$$T = B + W \Rightarrow |B + W| = |T| = \begin{vmatrix} 161137 & -22663 \\ -22663 & 9888 \end{vmatrix} = 1079711087$$

$$\Lambda = \frac{15119108,99}{1079711087} = 0,014 \text{ bulunur. Buna göre } H_0 \text{ doğru iken test istatistiğinin alabileceği değer;}$$

$$L = -\left[75 - 1 - \frac{2+3}{2}\right] \ln(0,014) = 305,212 \text{ elde edilir.}$$

Karar: $\alpha = 0,05$ için kritik değer $\chi_{p(g-1)}^2; \alpha = \chi_{4;0,05}^2 = 9,488$ olup; $305,212 > 9,488$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Bu takdirde bölgelere göre kolesterol ve HDL değerlerinde farklılık görülmektedir.

ii) Hotelling-Lawley İz Testi

Test istatistiği; $HL = NT_0^2 \sim \chi_{p(g-1)}^2$

$N = 75; p = 2; g = 3; T_0^2 = \sum_{j=1}^p \lambda_j$ ve λ_j 'ler BW^{-1} matrisinin özdeğerleri;

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \sum_{k=1}^g (n_k - 1)S_k = 24(S_1 + S_2 + S_3) = \begin{bmatrix} 85476,072 & -83,625 \\ -83,625 & 176,963 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0000117 & 0,0000055 \\ 0,0000055 & 0,0056535 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$B = T - W = \begin{bmatrix} 161137 & -22663 \\ -22663 & 9888 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 85476,072 & -83,625 \\ -83,625 & 176,963 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 75660,928 & -22579,375 \\ -22579,375 & 9711,037 \end{bmatrix} \Rightarrow BW^{-1} = \begin{bmatrix} 0,76105 & -127,23636 \\ -0,21077 & 54,77716 \end{bmatrix} \Rightarrow |BW^{-1} - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0,76105 - \lambda & -127,23636 \\ -0,21077 & 54,77716 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 55,53821\lambda + 14,87055 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{55,53821 \pm \sqrt{3025,01057}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 55,269 \text{ ve } \lambda_2 = 0,269$$

$$T_0^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 55,538 = \text{İz}(BW^{-1}) \Rightarrow HL = 75 \times 55,538 = 4165,35$$

Karar: $\alpha = 0,05$ için kritik değer $\chi_{p(g-1)}^2; \alpha = \chi_{4;0,05}^2 = 9,488$ olup; $4165,35 > 9,488$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Bu takdirde bölgelere göre kolesterol ve HDL değerlerinde farklılık görülmektedir.

iii) Roy'un Enbüyük Özdeğer Testi

Test istatistiği;

$$\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda} : 0 \leq \theta \leq 1; \lambda = \text{Enb}\{\lambda_1, \lambda_2\} = \text{Enb}\{55,269; 0,269\} = 55,269 \text{ olmak üzere, test}$$

$$\text{istatistiğinin alabileceği değer } \hat{\theta} = \frac{55,269}{1+55,269} = 0,98 \text{ bulunur.}$$

Karar: Kritik değer; $s = \min(g - 1, p) = \min(2, 2) = 2$; $m = \frac{|g-p-1|-1}{2} = \frac{|3-2-1|-1}{2} = -\frac{1}{2} \cong 0$ alınır ve $\tilde{n} = \frac{N-g-p-1}{2} = \frac{75-3-2-1}{2} = 34,5 \cong 35$ ve $\alpha = 0,05$ iken

$$\theta_t = \theta_{s; m; \tilde{n}; \alpha} = \theta_{2; 0; 35; 0,05} = ?$$

$\left. \begin{array}{l} \theta_{2; 0; 30; 0,05} = 0,157 \\ \theta_{2; 0; 40; 0,05} = 0,122 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_t = \theta_{2; 0; 35; 0,05} = \frac{0,157+0,122}{2} = 0,1395$ bulunur. Buna göre; $\hat{\theta} = 0,98 > 0,1395 = \theta_t$ olduğundan H_0 ret edilir. Bu takdirde bölgelere göre kolesterol ve HDL değerlerinde farklılık görülmektedir.

iv) Pillai İz Testi

Test istatistiği; $F = \frac{2\tilde{n}+s+1}{2m+s+1} \times \frac{T}{s-T} \sim F_{s(2m+s+1); s(2\tilde{n}+s+1)}$

$T = \sum_j \frac{\lambda_j}{1+\lambda_j}$ ve λ_j : BW^{-1} matrisinin özdeğerleri

$$T = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{55,269}{1+55,269} + \frac{0,269}{1+0,269} = 1,194 \Rightarrow F = \frac{2 \times 34,5 + 2 + 1}{2(-1/2) + 2 + 1} \times \frac{1,194}{2-1,194} = 53,33$$
 bulunur.

$\alpha = 0,05$ iken $F_t = F_{4; 144; 0,05} \cong 2,46$ olur. Buna göre $F = 53,33 > 2,46 = F_t$ olduğundan H_0 ret edilir. Bu takdirde bölgelere göre kolesterol ve HDL değerlerinde farklılık görülmektedir.

b) I. ve II. bölgelerin HDL değerleri bakımından farklılık gösterip göstermediğinin belirlenmesi için; $\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k$ parametresi ile ilgili güven aralığından yararlanılır. Bu güven aralığı

$$P \left[\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\underline{\tau}}_k - \sqrt{\theta_t} \sqrt{\underline{a} W \underline{a}' \left(\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} \right)} \leq \underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k \leq \underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\underline{\tau}}_k + \sqrt{\theta_t} \sqrt{\underline{a} W \underline{a}' \left(\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} \right)} \right] = 1 - \alpha$$

şeklinindedir. Burada X_2 : HDL olduğundan $\underline{a} = [0 \ 1]$ ve I. ile II. Gruplar karşılaştırılacağından $c_1 = 1, c_2 = -1$ ve $c_3 = 0$ seçilirse;

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \underline{\tau}_k = \underline{a} (\underline{\tau}_1 - \underline{\tau}_2) = \underline{a} (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{21} - \mu_{22} \end{bmatrix} = \mu_{21} - \mu_{22}$$
 olur, buna göre test edilecek hipotezler;

$$H_0: \mu_{21} = \mu_{22}$$

$$H_1: \mu_{21} \neq \mu_{22}$$
 şeklinde kurulur.

$$\underline{a} \sum_{k=1}^g c_k \hat{\underline{\tau}}_k = \bar{X}_{21} - \bar{X}_{22} = 39,16 - 60,4 = -21,24; \theta_t = 0,1395$$

$\underline{a} W \underline{a}' = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 85476,072 & -83,625 \\ -83,625 & 176,963 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 176,963$ ve $\sum_{k=1}^g \frac{c_k^2}{n_k} = \frac{(1)^2}{25} + \frac{(-1)^2}{25} + \frac{(0)^2}{25} = \frac{2}{25}$ olup, bu sonuçlar güven aralığı formülünde yerlerine yazılırsa;

$$P \left(-21,24 - \sqrt{0,1395} \times \sqrt{(176,963) \times \frac{2}{25}} \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq -21,24 + \sqrt{0,1395} \times \sqrt{(176,963) \times \frac{2}{25}} \right) = 0,95$$

$P(-22,645 \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq -19,835) = 0,95$ bulunur.

Güven aralığı “0” ı kapsamadığından H_0 hipotezi ret edilir. Bu sonuca göre HDL değerleri bakımından I. ve II. Bölge farklılık göstermektedir, üstelik I. bölgede HDL değerleri ikinci bölgeye göre daha düşüktür.

Table A.10. Upper Critical Values for Roy's Test, $\alpha = .05$

Roy's test statistic is given by

$$\pi = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}$$

where λ_1 is the largest eigenvalue of $E^{-1}H$. The parameters are

$$s = \min(v_H, p), \quad m = \frac{|v_H - p| - 1}{2}, \quad N = \frac{v_E - p - 1}{2}$$

Reject H_0 if $\pi >$ table value.

N	m									
	0	1	2	3	4	5	7	10	15	
$s = 2$										
5	.565	.651	.706	.746	.776	.799	.834	.868	.901	
10	.374	.455	.514	.561	.598	.629	.679	.732	.789	
15	.278	.348	.402	.446	.483	.515	.567	.627	.696	
20	.221	.281	.329	.369	.404	.434	.486	.546	.620	
25	.184	.236	.278	.314	.346	.375	.424	.484	.558	
30	.157	.203	.241	.274	.303	.330	.376	.433	.507	
40	.122	.159	.190	.218	.243	.266	.306	.359	.428	
50	.099	.130	.157	.180	.202	.222	.259	.306	.370	
60	.084	.110	.133	.154	.173	.191	.223	.266	.326	
80	.064	.085	.103	.119	.135	.149	.176	.211	.263	
120	.043	.058	.070	.082	.093	.104	.123	.150	.190	
240	.022	.030	.036	.042	.048	.054	.065	.080	.103	
$s = 3$										
5	.669	.729	.770	.800	.822	.840	.867	.894	.920	
10	.472	.537	.586	.625	.656	.683	.725	.770	.819	
15	.362	.422	.469	.508	.541	.569	.616	.669	.730	
20	.293	.346	.390	.427	.458	.486	.533	.589	.656	
25	.246	.294	.333	.367	.397	.424	.470	.525	.594	
30	.212	.255	.291	.322	.350	.375	.419	.473	.543	
40	.166	.201	.232	.259	.283	.305	.345	.395	.462	
50	.136	.167	.192	.216	.237	.257	.292	.339	.402	
60	.116	.142	.164	.185	.204	.221	.254	.296	.355	
80	.089	.109	.127	.144	.160	.174	.201	.237	.288	
120	.061	.075	.088	.100	.111	.122	.142	.169	.209	
240	.031	.039	.046	.052	.058	.064	.075	.090	.114	

TABLES

Table A.10. (Continued)

N	m								
	0	1	2	3	4	5	7	10	15
	<i>s</i> = 4								
5	.739	.782	.813	.836	.854	.868	.889	.911	.933
10	.547	.601	.641	.674	.700	.723	.759	.798	.840
15	.431	.482	.523	.558	.587	.612	.654	.701	.756
20	.354	.402	.441	.474	.503	.529	.572	.623	.684
25	.301	.344	.380	.412	.440	.464	.507	.559	.624
30	.261	.301	.334	.364	.390	.414	.455	.507	.572
40	.207	.240	.269	.294	.318	.339	.377	.426	.490
50	.171	.199	.224	.247	.268	.287	.322	.367	.428
60	.145	.170	.193	.213	.232	.249	.280	.322	.380
80	.112	.132	.150	.167	.182	.196	.223	.259	.309
120	.077	.091	.104	.116	.127	.138	.158	.185	.226
240	.040	.047	.054	.061	.067	.073	.084	.100	.124
	<i>s</i> = 5								
5	.788	.821	.845	.863	.877	.888	.906	.924	.942
10	.607	.651	.685	.713	.735	.755	.786	.820	.857
15	.488	.533	.569	.599	.625	.648	.685	.728	.777
20	.407	.449	.485	.515	.542	.565	.604	.651	.708
25	.349	.388	.422	.451	.477	.500	.540	.588	.648
30	.305	.341	.373	.400	.425	.448	.487	.535	.597
40	.243	.275	.302	.327	.349	.370	.406	.453	.514
50	.202	.230	.254	.276	.296	.315	.348	.392	.451
60	.173	.197	.219	.238	.257	.274	.304	.345	.401
80	.134	.154	.171	.188	.203	.217	.243	.278	.329
120	.093	.107	.120	.132	.143	.154	.174	.201	.241
240	.048	.056	.063	.069	.076	.082	.093	.109	.134

(continued)

Table A.10. (Continued)

<i>N</i>	<i>m</i>								
	0	1	2	3	4	5	7	10	15
	<i>s</i> = 6								
5	.825	.850	.869	.883	.895	.904	.918	.934	.949
10	.655	.692	.721	.744	.764	.781	.808	.838	.871
15	.537	.576	.608	.635	.658	.678	.711	.750	.795
20	.454	.491	.523	.551	.575	.596	.632	.676	.728
25	.392	.428	.458	.485	.509	.531	.568	.613	.669
30	.345	.378	.407	.433	.457	.478	.514	.560	.618
40	.278	.307	.333	.356	.378	.397	.432	.477	.536
50	.232	.258	.281	.302	.322	.340	.372	.414	.472
60	.200	.223	.243	.262	.280	.297	.327	.366	.421
80	.156	.174	.192	.208	.222	.236	.262	.297	.346
120	.108	.122	.134	.146	.157	.168	.188	.215	.255
240	.056	.064	.071	.078	.084	.090	.101	.118	.142
	<i>s</i> = 7								
5	.852	.872	.887	.899	.908	.917	.929	.941	.955
10	.695	.726	.750	.771	.788	.802	.826	.853	.882
15	.579	.613	.641	.665	.686	.704	.734	.769	.810
20	.494	.528	.557	.582	.604	.624	.657	.697	.745
25	.431	.463	.491	.516	.538	.558	.593	.635	.688
30	.381	.412	.439	.463	.485	.505	.540	.583	.638
40	.309	.337	.362	.384	.404	.423	.456	.499	.555
60	.224	.246	.266	.285	.302	.318	.347	.386	.439
80	.176	.194	.211	.226	.241	.255	.280	.314	.363
100	.145	.160	.175	.188	.200	.212	.235	.265	.310
200	.077	.085	.093	.101	.109	.116	.129	.148	.175
300	.052	.058	.064	.069	.074	.079	.089	.103	.125
500	.032	.036	.039	.042	.046	.049	.055	.064	.078
1000	.016	.018	.020	.022	.023	.025	.028	.033	.041

TABLES

Table A.10. (Continued)

N	m								
	0	1	2	3	4	5	7	10	15
	$s = 8$								
5	.874	.890	.902	.912	.920	.927	.937	.948	.959
10	.728	.754	.775	.793	.808	.821	.842	.865	.892
15	.615	.645	.670	.692	.710	.727	.754	.786	.824
20	.531	.561	.587	.610	.630	.648	.679	.716	.761
25	.466	.495	.521	.544	.565	.583	.616	.655	.705
30	.414	.443	.468	.491	.511	.530	.563	.603	.655
40	.339	.365	.388	.409	.428	.446	.478	.519	.573
60	.248	.269	.288	.306	.323	.338	.367	.404	.456
80	.195	.213	.229	.244	.259	.272	.297	.330	.378
100	.161	.176	.190	.203	.216	.228	.250	.279	.323
200	.086	.094	.103	.110	.118	.125	.138	.157	.185
300	.058	.065	.070	.076	.081	.086	.096	.109	.130
500	.036	.040	.043	.047	.050	.053	.059	.068	.081
1000	.018	.020	.022	.024	.025	.027	.030	.035	.042
	$s = 9$								
5	.891	.904	.914	.922	.929	.935	.944	.953	.963
10	.756	.778	.797	.812	.825	.837	.855	.876	.901
15	.647	.674	.696	.715	.732	.747	.771	.801	.835
20	.563	.591	.614	.635	.654	.670	.698	.733	.775
25	.497	.525	.549	.570	.589	.606	.636	.673	.720
30	.445	.471	.495	.516	.535	.552	.583	.622	.671
40	.366	.391	.413	.433	.451	.468	.499	.538	.590
60	.270	.291	.309	.326	.343	.358	.385	.421	.472
80	.214	.231	.247	.262	.276	.289	.313	.346	.392
100	.177	.192	.206	.219	.231	.242	.264	.293	.336
200	.095	.104	.112	.119	.127	.134	.147	.166	.194
300	.065	.071	.077	.082	.087	.092	.102	.115	.136
500	.040	.043	.047	.051	.054	.057	.063	.072	.086
1000	.020	.022	.024	.026	.028	.029	.032	.037	.044
	$s = 10$								
5	.905	.916	.924	.931	.937	.941	.949	.958	.967
10	.780	.799	.815	.829	.840	.851	.867	.886	.908
15	.675	.699	.719	.736	.751	.764	.787	.814	.846
20	.592	.617	.639	.658	.675	.690	.716	.748	.787
25	.526	.551	.573	.593	.611	.627	.655	.690	.734
30	.473	.497	.519	.539	.557	.573	.603	.639	.686
40	.392	.415	.436	.455	.473	.489	.518	.555	.605
60	.292	.311	.329	.346	.361	.376	.402	.438	.487
80	.232	.249	.264	.278	.292	.305	.329	.361	.406
100	.193	.207	.220	.233	.245	.256	.278	.306	.348
200	.104	.112	.120	.128	.135	.142	.156	.174	.202
300	.071	.077	.083	.088	.093	.098	.108	.122	.143
500	.044	.047	.051	.054	.058	.061	.067	.076	.090
1000	.022	.024	.026	.028	.030	.031	.034	.039	.047