T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

2. Hafta

Örnek I.5 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

a) Kofaktörler matrisini bulunuz?

b) Adjoint matrisini bulunuz?

c) Determinantını bulunuz?

d) Rankını bulunuz?

e) Tersini bulunuz?

Çözüm: a) Verilen matrisin kofaktörler matrisi $A_K = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ ile gösterelim. Burada $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|, i,j = 1,2,3$ eşitliği ile bulunur. Buna göre; A matrisinin her bir elemanının kofaktörü;

$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14;\ A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 11:\ A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7;\ A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6;\ A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8$

$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$ olarak bulunur. Böylece verilen matrisin kofaktörler matrisi:

$A_K = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -5 & 11 \\ 5 & 7 & 1 \\ -6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

b) Verilen matrisin adjoint matrisi; $Adj(A) = A'_K = \begin{bmatrix} 14 & 5 & -6 \\ -5 & 7 & 8 \\ 11 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

c) Verilen matrisin determinantını bulmak için birinci satıra göre açalım:

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (1)(14) + (-1)(-5) + (2)(11) = 41$ bulunur.

d) Verilen matrisin rankını bulabilmek için bütün kare alt matrislerini oluşturup bu matrislerin determinantlarını bulalım. Bütün kare alt matrisler , $i,j = 1,2,3$ olmak üzere M_{ij} minörleri ile A matrisinin kendisidir. $i,j = 1,2,3$ olmak üzere $|M_{ij}| \neq 0$ ve hatta $|A| = 41 \neq 0$ dır. Determinantı sıfırdan farklı olan en büyük mertebeli matris A matrisinin kendisi ve mertebesinin de 3 olduğu dikkate alındığında $rank(A) = 3$ buulnur.

e) Verilen matrisin tersi $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A) = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 14 & 5 & -6 \\ -5 & 7 & 8 \\ 11 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Örnek I.6 Bir A matrisi aşağıdaki gibi parçalanmış olsun. Determinantını ve tersini bulunuz?

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Çözüm: Verilen parçalanmaya göre $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ olarak yazılır. Verilen matrisin determinantı iki yolla bulunabilir.

i) $|A_{11}| = 1 \neq 0$ olduğundan $|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| =$

$$1 \times \left| \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3(8) + 1(-4) - 1(4) = 16$ bulunur.

ii) $|A_{22}| = 64 \neq 0$ olduğundan $|A| = |A_{22}||A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}| =$

$$64 \times \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right| = 64 \times \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$64 \times \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \right| = 64 \times \begin{vmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 64 \times (0{,}25) = 16 \text{ bulunur.}$$

Verilen matrisin tersi $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} \vdots B_{12} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{21} \vdots B_{22} \end{bmatrix}$ ile gösterilsin. Buradaki alt matrisleri bulalım.

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{0{,}25}\begin{bmatrix} 5/2 & -3/4 \\ 9/2 & -5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 18 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 18 & -5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 18 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece; $A^{-1} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 10 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 18 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ \hdashline -3 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -3 & 1 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right]$ elde edilir.

Örnek I.7 $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin

a) Özdeğerlerini, özvektörlerini (standartlaştırılmış asıl özvektörlerini) ve standartlaştırılmış özvektörlerini bulunuz?

b) $|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j$, $\dot{I}z(A) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ eşitliklerinin doğru olduğunu gösteriniz?

Çözüm: a) Özdeğerler için: $|A - \lambda I_3| = 0$ polinomunun kökleri bulunmalıdır.

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)[\lambda^2 - 10\lambda + 17] + 0 - (7-\lambda) =$$

$(7-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = 0 \;\Rightarrow\; 7-\lambda = 0$ veya $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 7$ ve $\lambda_3 = 2$ bulunur.

Özvektörler (standartlaştırılmış asıl özvektörler) için Algoritma I.1 uygulanır.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 8}$ **için** $\underline{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}}$ =?

i) $A - \lambda_1 I_3 = A - 8I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

ii) $Adj(A - \lambda_1 I_3) = Adj(A - 8I_3) = Kof[A - 8I_3]$, (A ve böylece $A - 8I_3$ simetrik olduğundan)

$Adj(A - \lambda_1 I_3) = Adj(A - 8I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur. Bu matrisin kolonları orantılıdır.

iii) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{24} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & 4/\sqrt{24} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{24} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ bulunur.

$\boldsymbol{\lambda_2 = 7}$ **için** $\underline{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}}$ =?

i) $A - \lambda_2 I_3 = A - 7I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

ii) $Adj(A-\lambda_2 I_3) = Adj(A-7I_3) = Kof[A-8I_3]$, (A ve böylece $A-7I_3$ simetrik olduğundan)

$Adj(A-\lambda_2 I_3) = Adj(A-7I_3) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. Bu matrisin kolonları orantılıdır.

iii) $\begin{bmatrix} -4/\sqrt{20} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{20} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0/\sqrt{20} & 0/\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

$\boldsymbol{\lambda_3 = 2}$ **için** $\underline{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}}$ =?

i) $A-\lambda_3 I_3 = A-2I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $Adj(A-\lambda_2 I_3) = Adj(A-2I_3) = Kof[A-2I_3]$, (A ve böylece $A-2I_3$ simetrik olduğundan)

$Adj(A-\lambda_3 I_3) = Adj(A-2I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \\ -5 & -10 & 25 \end{bmatrix}$ bulunur. Bu matrisin kolonları orantılıdır.

iii) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{120} & -5/\sqrt{750} \\ 2/\sqrt{30} & 4/\sqrt{120} & -10/\sqrt{750} \\ -5/\sqrt{30} & -10/\sqrt{120} & 25/\sqrt{750} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ bulunur. Böylece özvektörler matrisi $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ olur.

Standartlaştırılmış özvektörler matrisi ise:

$P = [\underline{e}_1^* \quad \underline{e}_2^* \quad \underline{e}_3^*] = [\sqrt{\lambda_1}\underline{e}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\underline{e}_2 \quad \sqrt{\lambda_3}\underline{e}_3] = \begin{bmatrix} 1{,}155 & -2{,}366 & 0{,}258 \\ 2{,}309 & 1{,}182 & 0{,}516 \\ 1{,}155 & 0{,}000 & -1{,}291 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

b) $|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7(17) - 0(-2) + 1(-7) = 112$ ve $\prod_{j=1}^{p} \lambda_j = 8 \times 7 \times 2 = 112$ olup, eşitlik doğrudur, yani $|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j$ dir.

$İz(A) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$İz(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{jj} = 7+7+3 = 17$ ve $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 8+7+2 = 17$ olup, $İz(A) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ eşitliği doğrudur.

Örnek I.8 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ matrisi ve $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ vektörü verilsin. $f(\underline{X}) = \underline{X}' A\, \underline{X}$ karesel formunun $\underline{X}$ vektörüne göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerini bulunuz?

Çözüm: A simetrik bir matris olduğundan verilen karesel formun açık ifadesi;

$f(\underline{X}) = \underline{X}' A\, \underline{X} = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ şeklindedir. Buna göre birinci mertebeden türev;

$$\frac{df(\underline{X})}{d\underline{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ -2x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & 12 & 6 \\ 4 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2A\underline{X}$$

bulunur. İkinci mertebeden türev ise;

$$\frac{d^2 f(\underline{X})}{d\underline{X}\, d\underline{X}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & 12 & 6 \\ 4 & 6 & 18 \end{bmatrix} = 2A \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek I.9 $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ vektörü verilsin. $f(\underline{X}) = \text{İz}(\underline{X}\,\underline{X}')$ fonksiyonunun $\underline{X}$ vektörüne göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerini bulunuz?

Çözüm: $\underline{X}\,\underline{X}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{bmatrix}$ olup,

$f(\underline{X}) = \text{İz}(\underline{X}\,\underline{X}') = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ dir. Buna göre birinci mertebeden türev;

$$\frac{df(\underline{X})}{d\underline{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2\underline{X} \text{ bulunur. İkinci mertebeden türev ise;}$$

$$\frac{d^2 f(\underline{X})}{d\underline{X}\, d\underline{X}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\underline{X})}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ şeklinde bir köşegen matristir.}$$

Soru.1 $A: p \times p$ bir matris, $(\lambda_j, \underline{e}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, p$ ikilisi A matrisinin özdeğer-özvektör çifti olmak üzere $|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j$, $\text{İ}z(A) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ ve $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P' = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j} \underline{e}_j \underline{e}'_j$ eşitliklerinin doğru olduğunu gösteriniz?

Soru.2 $A = \begin{bmatrix} 136 & 104 & 94 \\ 104 & 106 & 71 \\ 94 & 71 & 65 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulunuz ve $|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j$, $\text{İ}z(A) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ eşitliklerinin doğru olduğunu gösteriniz?

Soru.3 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz?

Soru.4 $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ değişkenleri için 11 birim üzerinde yapılan ölçümler aşağıdadır. Bu veriye ait korelasyon matrisini (R) ve bu matrisin özdeğerleri ile özvektörlerini bulunuz?

X_1 :	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
X_2 :	61	61	59	71	80	76	90	106	98	100	114

Soru:5 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ matrisi ve $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ vektörü verilsin. $U = \underline{X}' A \underline{X}$ olmak üzere $f(\underline{X}) = e^U$ fonksiyonu için;

a) $\underline{X}$ vektörüne göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerini bulunuz?

b) $\underline{X}$ vektörüne göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerin $\underline{X} = \underline{0}$ noktasındaki değerlerini bulunuz?

BÖLÜM II

ÇOK DEĞİŞKENLİ VERİLERİN DÜZENLENMESİ VE ÖZETLENMESİ

II.1 Çok Değişkenli Verilerin Düzenlenmesi

Çok değişkenli analizde değişken/rastgele değişken yerine değişkenler vektörü/rastgele değişkenler vektörü kullanılır. p-değişken sayısını ve $X_j, (j = 1, 2, \dots, p)$ j-nci değişkeni göstermek üzere değişkenler vektörü;

$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} : p \times 1$ ile gösterilir. Kabul edelim ki n tane birim üzerinde bu değişkenler ayrı ayrı ölçülmüş olsun. Bu durumda elde edilen çok değişkenli verinin düzenlenmesi;

i) Gözlem vektörleri ile gösterilebilir. Bir gözlem vektörü p-tane değişkene ait ölçüm sonuçlarının i-nci birim için ifadesi olan $\underline{X}_i : p \times 1$ kolon vektörüdür.

$$\underline{X}_i = \begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ \vdots \\ X_{pi} \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.1}$$

ii) Değişken vektörleri ile gösterilebilir. Bir değişken vektörü n-tane birime ait ölçüm sonuçlarının j-nci değişken için ifadesi olan $\underline{X}_j : 1 \times n$ satır vektörüdür.

$$\underline{X}_j = \begin{bmatrix} X_{j1} & X_{j2} & \cdots & X_{jn} \end{bmatrix} \ , j = 1, 2, \dots, p \tag{2.2}$$

iii) Veri matrisi ile gösterilebilir. Çok değişkenli veri için en genel düzenleme biçimi veri matrisi ile yapılan düzenlemedir. Bir veri matrisi n-tane gözlem vektörlerinin kolonlar şeklinde ya da p-tane değişken vektörlerinin satırlar şeklinde düzenlenmesi ile elde edilen matristir.

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix}_{p \times n} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \cdots & \underline{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \\ \vdots \\ \underline{X}_p \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

II.2 Çok Değişkenli Verilerin Özetlenmesi

Eşitlik (2.3) ile verilen ve bir tek gruba ait olan çok değişkenli veriyi n birimlik bir örnek olarak düşünebiliriz. Böyle bir çok değişkenli verinin özetlenmesi tanımlayıcı istatistikler yardımıyla yapılmaktadır. Şimdi bu istatistikleri verelim:

i) Örnek Ortalama Vektörü: Veri matrisinin kolonları n birimlik bir örneği göstereceğinden, burada örnek birimleri $\underline{X}_1,\ \underline{X}_2, \cdots, \underline{X}_n$ olmak üzere bu örnek için örnek ortalama vektörü;

$$\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \vdots \\ \overline{X}_p \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{X}_i : p \times 1 \ , \ \left(\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ji} \ \ , j = 1, 2, \dots, p \right) \tag{2.4}$$

şeklindedir. $\underline{\overline{X}}$ istatistiği, kitle ortalama vektörü olan $\underline{\mu} = E(\underline{X})$ parametresinin bir nokta tahmin edicisidir. Burada $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$ ve $E(\underline{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix}$ olup, $j = 1, 2, \dots, p$ için $\mu_j = E(X_j)$ dir.

ii) Örnek Varyans-Kovaryans Matrisi: Çok değişkenli veriyi özetlemek için kullanılacak olan bir diğer istatistik örnek varyans kovaryans matrisidir. Bu matris S ile gösterilir ve $p \times p$ boyutludur. Hesaplamalarda Eşitlik (2.5)'de verilen ifadelerden herhangi birisi kullanılabilir:

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{X}_i - \underline{\overline{X}}\right)\left(\underline{X}_i - \underline{\overline{X}}\right)' = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \underline{X}_i \underline{X}_i' - n\underline{\overline{X}}\,\underline{\overline{X}}'\right] = \frac{1}{n-1}\left[XX' - n\underline{\overline{X}}\,\underline{\overline{X}}'\right] \tag{2.5}$$

Eğer örnek varyans kovaryans matrisi $S = [s_{jk}]$, $(j, k = 1, 2, \dots, p)$ile gösterilirse, $k = j$ iken esas köşegen üzerindeki elemanlar değişkenlere ait varyansları, $k \neq j$ iken köşegen dışındaki elemanlar ise ikili değişkenler arasındaki kovaryansları gösterir.

$$s_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ji} - \overline{X}_j\right)^2 , \ j = k = 1, 2, \cdots, p \\ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ji} - \overline{X}_j\right)\left(X_{ki} - \overline{X}_k\right), \ j \neq k = 1, 2, \cdots, p \end{cases} \tag{2.6}$$

olup, $j = k$ için s_{jj}: X_j değişkenine ait örnek varyansını; $j \neq k$ için s_{jk}: X_j ile X_k değişkenlerinin örnek kovaryansıdır. Ayrıca $s_{jk} = s_{kj}$ olduğundan S bir simetrik matristir ve $s_{jj} > 0$ dır. Diğer taraftan $j = 1, 2, \cdots, p$ için $s_j = \sqrt{s_{jj}}$ ise X_j değişkenine ait örnek standart sapmasıdır.

- S örnek varyans kovaryans matrisi, örneğin çekildiği çok değişkenli kitleye ait kitle varyans kovaryans matrisi olan Σ parametresinin bir nokta tahmin edicisidir.
- $\Sigma_{p\times p} = [\sigma_{jk}] = E\left[\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)'\right]$
- Varyans-kovaryans matrisleri simetrik matrislerdir. Bu sebeple özdeğerleri reel sayı ve özvektörleri de birbirine diktir.

- Varyans –kovaryans matrisleri pozitif tanımlı matrislerdir. Bu sebeple özdeğerleri için $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \geq 0$ sıralaması her zaman vardır.

iii) Örnek Korelasyon Matrisi: Çok değişkenli bir veriyi özetleme de kullanabileceğimiz bir diğer istatistik örnek korelasyon matrisidir. Bu matris R ile gösterilir.

$R = [r_{jk}] : p \times p, (j, k = 1,2, \ ,p)$. Burada $r_{jk} = \begin{cases} 1 \ , & j = k = 1, 2, \dots , p \\ \in [-1 , +1] \ , & j \neq k = 1, 2, \dots , p \end{cases}$ dir.

$r_{jk} = r_{kj} = \frac{s_{jk}}{s_j s_k}$ eşitliği ile hesaplanabilir.

- R örnek korelasyon matrisi, örneğin çekildiği çok değişkenli kitleye ait kitle korelasyon matrisi olan $\rho = [\rho_{jk}] : p \times p$ parametresinin bir nokta tahmin edicisidir.
- Korelasyon matrisleri simetrik ve pozitif tanımlıdır. Bu sebeple özdeğerleri pozitif reel sayı ve özvektörleri de birbirine diktir. Ayrıca özdeğerler $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \geq 0$ şeklinde her zaman sıralanabilir.
- $K^{1/2} = K\text{öş}[\sqrt{s_{11}} \ , \ \sqrt{s_{22}} \ , \ \dots \ , \sqrt{s_{pp}}]$ olmak üzere

$$R = (K^{1/2})^{-1} S (K^{1/2})^{-1} \text{ ve } \qquad S = K^{1/2} R K^{1/2} \tag{2.7}$$

bağıntıları geçerlidir.

iv) Kareler ve Çarpımlar Toplamı Matrisi: Çok değişkenli veriyi değerlendirirken kullanılabilecek olan bir diğer özetleme istatistiği kareler ve çarpımlar toplamı matrisidir. Bu istatistik $W: p \times p$ ile gösterilir ve

$$W = \sum_{i=1}^{n} (\underline{X}_i - \overline{\underline{X}})(\underline{X}_i - \overline{\underline{X}})' = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{X}_i \underline{X}_i' - n \overline{\underline{X}}\, \overline{\underline{X}}'\right] \tag{2.8}$$

eşitliği ile hesaplanır. Eşitlik (2.8) ile Eşitlik (2.5) karşılaştırıldığında $W = (n-1)S$ ilişkisi verilebilir. Bu istatistik örnek varyans-kovaryans matrisinin bir fonksiyonu olduğundan kovaryans matrislerinin sahip olduğu özelliklerin hepsini üzerinde taşır.

Soru: 1 $\underline{X} : 3 \times 1$ değişkenler vektörü için yapılan 4 gözleme ait ölçümler aşağıdadır. Bu 4 birimlik örneklem için $\overline{\underline{X}}$, S , R ve W istatistiklerini bulunuz?

X_1:	3	3	4	2
X_2:	1	2	3	2
X_3:	4	5	3	4

Soru:2 12 Bireye ait yaş, ağırlık, boy uzunluğu, göğüs çevresi ve bel çevresi değerleri aşağıdaki gibi ölçülmüştür. Bu verileri kullanarak $\underline{\overline{X}}$, S , R ve W istatistiklerini hesaplayınız?

Yaş	**Ağırlık**	**Boy**	**Göğüs**	**Bel**
20	50	169	87	72
22	70	170	91	82
22	64	176	87	73
21	56	176	84	68
20	72	171	92	82
24	65	178	86	73
23	73	173	93	78
27	76	176	93	77
28	82	179	104	92
25	65	168	82	75
19	75	175	94	76
19	65	178	86	73