T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

3. Hafta

BÖLÜM III

ÇOK DEĞİŞKENLİ NORMAL DAĞILIM VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde çok değişkenli istatistiksel analizde önemli bir yeri olan çok değişkeni normal dağılım detaylı bir şekilde incelenecektir. Çünkü çok değişkenli istatistiksel analizlerin hemen hemen hepsi örneklemi temsil eden veri matrisinin çok değişkenli normal dağıldığı varsayımına dayandırılmaktadır. Bu sebeple önce çok değişkenli normal dağılımın tanıtımı yapılacak ve daha sonra özellikleri hakkında bilgi sunulacaktır.

III.1 Çok Değişkenli Normal Dağılımın Tanıtımı ve Özellikleri

Çok değişkenli normal dağılım, tek değişkenli normal dağılımın değişken sayısı $p \geq 2$ için genelleştirilmiş halidir. Tek değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bu dağılımın momentleri, özellikleri hatırlandığında çok değişkenli normal dağılımı tanımak daha kolay olacaktır.

Tanım III.1 $\underline{X}' = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_p \end{bmatrix} : 1 \times p$ rastgele değişkenler vektörü (rastgele vektör) olsun. $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} k exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\} & , \ -\infty < x_j < +\infty, \\ & -\infty < \mu_j < +\infty, \Sigma > 0 \\ 0 \qquad , & d.d \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde ise $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörüne çok değişkenli normal dağılıma sahiptir denir ve $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ ile gösterilir. Burada $\underline{\mu}$ ve Σ dağılımın parametreleri ve k bilinmeyen bir pozitif sabittir.

$\underline{\mu} = E(\underline{X})$ dağılımın otralama vektörü iken $\Sigma = \mathrm{Cov}(\underline{X})$ ise dağılımın varyans kovaryans matrisidir. Bu parametrelerin açık yazılışı;

$$\underline{\mu} = E(\underline{X}) \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \Sigma = \mathrm{Cov}(\underline{X}) \ \Rightarrow \ \left[\sigma_{jk}\right]_{p\times p} = \left[cov(X_j, X_k)\right]_{p\times p}$$

şeklindedir. Buna göre $j = 1, 2, \dots, p$ için $\mu_j = E(X_j)$ iken, $j = k = 1, 2, \dots, p$ için $\sigma_{jj} = V(X_j)$ ve $j \neq k = 1, 2, \dots, p$ için $\sigma_{jk} = Cov(X_j, X_k)$ demektir. Ayrıca $\sigma_j = \sqrt{V(X_j)}$, $(j = 1,2, \dots, p)$, X_j rastgele değişkeninin standart sapmasıdır.

Örnek III.1 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ çok değişkenli normal dağılımın Eşitlik (3.1) ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait k sabitinin değerini bulunuz?

Çözüm: Eşitlik (3.1) ile verilen $f(\underline{x})$ fonksiyonu $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörüne ait olasılık yoğunluk fonksiyonu ise o zaman;

i) $\forall \underline{x} \in IR^p$ için $f(\underline{x}) \geq 0$ dır.

ii) $\int_R f(\underline{x}) d\underline{x} = 1$ olmalıdır. Burada R bölgesi $R = \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) : x_j \in IR,\ j = 1, 2, \ldots, p\right\}$ şeklinde tanımlıdır. (ii) özellikten yararlanarak k sabiti bulunabilir.

$$\int_R f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{x_p=-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} k exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_p \quad (3.2)$$

$\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörüne ait değişkenler birbirleri ile ilişki olabileceğinden bu integralin çözümü bu değişkenler vektörü üzerinde bir ortogonal dönüşüm uygulayarak gerçekleştirilebilir. Σ matrisinin simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olduğu, ayrıca bu matrisin özdeğerler ve özvektörler matrisleri sırası ile Λ ve P olmak üzere biliyoruz ki $\Lambda =$ Köş$\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_p\right]$ şeklinde bir köşegen matris iken $P = \left[\underline{e}_1 \ \ldots \ \underline{e}_p\right]$ şeklinde bir ortogonal matristir. Bu takdirde uygulanacak ortogonal dönüşüm P ortogonal matrisini kapsayan bir dönüşüm olmalıdır. Böylece değişken değiştirme tekniği ile Eşitlik (3.2) ile verilen integral çözülebilecektir. Ortogonal dönüşüm $\underline{x} = P\underline{y} + \underline{\mu}$ ya da $\underline{x} - \underline{\mu} = P\underline{y}$ olup, bu dönüşümün jakobiyeni; $\frac{d\underline{x}}{d\underline{y}} = \left||P|\right| \Rightarrow d\underline{x} = \left||P|\right| d\underline{y} \Rightarrow dx_1 dx_2 \cdots dx_p = \left||P|\right| dy_1 dy_2 \cdots dy_p$ olur. Ayrıca verilen integral bölgesi $R = \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) : x_j \in IR,\ j = 1, 2, \ldots, p\right\}$ uygulanan ortogonal dönüşüm altında $R_1 = \left\{\left(y_1, y_2, \ldots, y_p\right) : y_j \in IR,\ j = 1, 2, \ldots, p\right\}$ bölgesine dönüşür. Bu bilgiler ışığı altında çözülecek olan integral için;

$$\int_R f(\underline{x}) d\underline{x} = k \int_{y_p=-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{y_2=-\infty}^{+\infty} \int_{y_1=-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(P\underline{y}\right)' \Sigma^{-1}\left(P\underline{y}\right)\right\} \left||P|\right| dy_1 dy_2 \cdots dy_p$$

$= k \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}' P' \Sigma^{-1} P \underline{y}\right\} \left||P|\right| dy_1 dy_2 \cdots dy_p$, (P ortogonal olduğundan $|P| = \pm 1$)

$= k \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}' (P' \Sigma^{-1} P) \underline{y}\right\} |\pm 1| dy_1 dy_2 \cdots dy_p$, ($|\pm 1| = 1$ ve Σ matrisinin spektral ayrışımı $\Sigma = P\Lambda P'$ ve böylece $\Sigma^{-1} = (P\Lambda P')^{-1} = (P')^{-1}\Lambda^{-1}P^{-1} = P\Lambda^{-1}P'$ yazılabilir, çünkü P ortogonal olduğundan $P' = P^{-1}$ dir. Buradan $P'\Sigma^{-1}P = P'P\Lambda^{-1}P'P = \Lambda^{-1}$ dir.) Bu sonuçlar son eşitlikte kullanılırsa;

$= k\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}'\Lambda^{-1}\underline{y}\right\} dy_1 dy_2 \cdots dy_p$, ($\Lambda =$ Köş$[\lambda_1, \dots, \lambda_p]$ iken $\Lambda^{-1} = K$öş$\left[\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_p}\right]$ ve $\underline{y}' = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_p]$ olduğu dikkate alınırsa $\underline{y}'\Lambda^{-1}\underline{y} = \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{y_p^2}{\lambda_p}$ yazılabilir.) Bu sonuçlar son eşitlikte yerine yazılırsa;

$$= k\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{y_p^2}{\lambda_p}\right)\right\} dy_1 dy_2 \cdots dy_p$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_p}{\sqrt{\lambda_p}}\right)^2} dy_p \quad (3.3)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikteki her bir integral altındaki üstel fonksiyonlar, $N(0, \lambda_j), (j = 1, 2, \dots, p)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunda yer alan üstel ifade ile aynıdır. Biliyoruz ki $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ iken o.y.f. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \sqrt{2\pi}\sigma$ dır. Bu sonuç dikkate alınır ve Eşitlik (3.3) deki her bir integrale uygulanırsa;

$\int_R f(\underline{x})d\underline{x} = k\ \sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_1}\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_2}\cdots\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_p} = k(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p} = k(2\pi)^{\frac{p}{2}}\sqrt{|\Sigma|} = 1 \Rightarrow$ $k = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sqrt{|\Sigma|}} = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}$ bulunur.

Sonuç:III.1 $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\right\} & , -\infty < x_j < +\infty, \\ & -\infty < \mu_j < +\infty, \Sigma > 0 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

veya $Q(\underline{x}) = (\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})$ olmak üzere $f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}Q(\underline{x})\right\}$ şeklinde yazılabilir. Burada $|\Sigma|$ genelleştirilmiş varyans olarak ve $|\Sigma|^{1/2}$ ise genelleştirilmiş standart sapma olarak bilinir. $Q(\underline{x}) = (\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})$ ise bir karesel formdur.

Çok değişkenli dağılımlarda dağılımın karakteristik fonksiyonu ile moment üreten fonksiyonu şu şekilde tanımlanır.

Tanım III.2 $\underline{X} : p \times 1$ rastgele değişkenler vektörü çok değişkenli bir dağılıma sahip rastgele vektör ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\underline{x})$ olsun. Bu takdirde $\underline{t} \in IR^p$ olmak üzere;

$\Phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = E[e^{i\underline{t}'\underline{X}}] = \int_R e^{i\underline{t}'\underline{X}} f(\underline{x})d\underline{x}$ ifadesine $\underline{X}$ rastgele vektörünün karakteristik fonksiyonu, benzer şekilde;

$\mathrm{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) = E\left[e^{\underline{t}'\underline{X}}\right] = \int_R e^{\underline{t}'\underline{X}} f(\underline{x})d\underline{x}$ ifadesine $\underline{X}$ rastgele vektörünün moment üreten fonksiyonu denir.

Teorem III.1 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı verilsin. Bu takdirde dağılımın karakteristik fonksiyonu ile moment üreten fonksiyonu sırasıyla $\underline{t} \in IR^p$ olmak üzere;

i) $\Phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{i\underline{t}'\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}'\,\Sigma\underline{t}\right\}$ (3.4)

ii) $\mathrm{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\,\Sigma\underline{t}\right\}$ (3.5)

dir.

Teorem III.2 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımının karakteristik fonksiyonu $\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})$ ve moment üreten fonksiyonu $\mathrm{M}_{\underline{X}}(\underline{t})$ olsun. Bu takdirde $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörünün orijine göre k-ncı momenti;

i) $E\left(\underline{X}^k\right) = \frac{1}{i^k}\frac{d^k\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}^k}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (3.6)

ii) $E\left(\underline{X}^k\right) = \frac{d^k\mathrm{M}_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}^k}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (3.7)

dir. Eğer $k = 1$ alınırsa $\underline{\mu} = E(\underline{X}) = \begin{cases} \frac{1}{i}\frac{d\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}} \\ \frac{d\mathrm{M}_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}} \end{cases}$ ve $k = 2$ alınırsa

$E\left(\underline{X}\,\underline{X}'\right) = \begin{cases} \frac{1}{i^2}\frac{d^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}d\underline{t}'}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}} \\ \frac{d^2\mathrm{M}_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}d\underline{t}'}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}} \end{cases}$ olup, buradan varyans kovaryans matrisi için

$\Sigma = E\left(\underline{X}\,\underline{X}'\right) - E(\underline{X})E(\underline{X}')$ eşitliği yazılabilir.

Teorem III.3 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı ve $H : p \times p$ matrisi verilsin, öyle ki $rank(H) = p$ olsun. $\underline{Y} = H\underline{X}$ dönüşümü ile tanımlanan $\underline{Y}' = \left[Y_1 \;\; Y_2 \;\; \ldots \;\; Y_p\right] : 1 \times p$ rastgele değişkenler vektörünün dağılımı da çok değişkenli normal dağılım olup,

$\underline{Y} \sim N_p\left(E(\underline{Y}) = H\underline{\mu},\; Cov(\underline{Y}) = H\,\Sigma H'\right)$ şeklindedir.

Sonuç III.2 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı ve $H : k \times p, (k < p))$ matrisi verilsin, öyle ki $rank(H) = k$ olsun. Bu takdirde $\underline{Y}_{k\times 1} = H\underline{X} \sim N_k\left(E(\underline{Y}) = H\underline{\mu},\ Cov(\underline{Y}) = H\,\Sigma H'\right)$ dır.

Örnek III.2 $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. Buna göre:

a) $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

b) $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörü için $\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})$ =? ve $M_{\underline{X}}(\underline{t})$ =?

c) Σ matrisinin özdeğer ve özvektör matrisleri sırasıyla Λ ve P olmak üzere $\underline{X} - \underline{\mu} = P\underline{Y}$ dönüşümü ile tanımlanan $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

d) (b) de elde edilen $\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})$ ve $M_{\underline{X}}(\underline{t})$ fonksiyonlarını kullanarak dağılımın parametrelerini bulunuz?

Çözüm: $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ olsun.

a) $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ iken $f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\}$ dir. Verilen dağılım için; $p = 2$, $|\,\Sigma| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ \Sigma^{-1} = \frac{1}{|\,\Sigma|}(Adj\Sigma) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{x} - \underline{\mu} = \begin{bmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ve

böylece; $\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right) = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$ olur. Bu sonuçlar fonksiyonda yerlerine yazılırsa;

$f(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi} exp\left\{-\frac{1}{2}(2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2)\right\}$ olarak bulunur.

b) $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ iken Teo.III.1 gereğince $\Phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{i\underline{t}'\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}'\,\Sigma\underline{t}\right\}$ ve

$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\,\Sigma\underline{t}\right\}$, $\underline{t} \in IR^p$ olduğu biliniyor. Verilen dağılım için $p = 2$ olduğundan $\underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \epsilon IR^2$, $\underline{t}'\underline{\mu} = [t_1 \quad t_2]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ ve $\underline{t}'\,\Sigma\underline{t} = [t_1 \quad t_2]\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = 5t_1^2 + 2t_2^2 - 6t_1t_2$ bulunur. Bu sonuçlar fonksiyonlarda yerlerine yazılırsa; karakteristik fonksiyon

$\Phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{0 - \frac{1}{2}(5t_1^2 + 2t_2^2 - 6t_1t_2)\right\} = exp\left\{-\frac{5}{2}t_1^2 - t_2^2 + 3t_1t_2\right\}$ olarak,

ve moment üreten fonksiyon;

$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{\frac{5}{2}t_1^2 + t_2^2 - 3t_1t_2\right\}$ olarak bulunur.

c) $p = 2$, $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ olduğu dikkate alındığında verilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bu fonksiyonun tanım bölgesi sırasıyla;

$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{x}'\Sigma^{-1}\underline{x}\right\}$ ve $R = \{(x_1, x_2): -\infty < x_1, x_2 < \infty\}$ şeklindedir. Şimdi Σ matrisinin özdeğer ve özvektör matrisleri sırasıyla Λ ve P olmak üzere $\underline{X} - \underline{\mu} = P\underline{Y}$ dönüşümü ile tanımlanan $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu değişken değiştirme tekniğini kullanarak bulalım. Bu tekniğe göre; $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu;

$$g\left(\underline{y}\right) = f\left(\underline{x} = w\left(\underline{y}\right)\right)|J| \tag{3.8}$$

olmalıdır. $\underline{X} - \underline{\mu} = P\underline{Y}$ ise $\underline{x} = w\left(\underline{y}\right) = P\underline{y} + \underline{\mu} = P\underline{y} \Rightarrow |J| = \left|\frac{d\underline{x}}{d\underline{y}}\right| = |P|$ olup, bu sonuçlar Eşitlik (3.8)'de yerlerine yazılırsa;

$$g\left(\underline{y}\right) = f\left(\underline{x} = P\underline{y}\right)|P| = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(P\underline{y}\right)' \Sigma^{-1} P\underline{y}\right\}|P|$$

$= \frac{|P|}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}'P'\Sigma^{-1}P\underline{y}\right\} = \frac{1}{2\pi|P|^{-1}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}'P'\Sigma^{-1}P\underline{y}\right\}$, ($|P|^{-1} = |P^{-1}| = |P'| = |P'|^{1/2}|P'|^{1/2} = |P'|^{1/2}|P|^{1/2}, P$ matrisinin ortogonal olma ve determinant özelliklerinden bu eşitlikler yazılabilir.) Bu sonuç yerine yazılırsa;

$$g\left(\underline{y}\right) = \frac{1}{2\pi|P'|^{1/2}|\Sigma|^{1/2}|P|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}'P'\Sigma^{-1}P\underline{y}\right\} = \frac{1}{2\pi|P'\Sigma P|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}'P'\Sigma^{-1}P\underline{y}\right\}$$

elde edilir. Σ matrisinin spektral ayrışımı gereğince $\Sigma = P\Lambda P'$ olup buradan $P'\Sigma P = \Lambda$ ve $\Sigma^{-1} = (P')^{-1}\Lambda^{-1}P^{-1} = P\Lambda^{-1}P' \Rightarrow P'\Sigma^{-1}P = P'P\Lambda^{-1}P'P = \Lambda^{-1}$olduğu dikkate alındığında

$$g\left(\underline{y}\right) = \frac{1}{2\pi|\Lambda|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\underline{y}'\Lambda^{-1}\underline{y}\right\} \tag{3.9}$$

elde edilir. Şimdi Λ özdeğerler matrisini bulalım. $|\Sigma - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 6{,}85$ ve $\lambda_2 = 0{,}15 \;\Rightarrow\; \Lambda = \begin{bmatrix} 6{,}85 & 0 \\ 0 & 0{,}15 \end{bmatrix}$ olup, $|\Lambda| = (6{,}85)(0{,}15)$ ve $\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6{,}85} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0{,}15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0 \\ 0 & 6{,}85 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{y}'\Lambda^{-1}\underline{y} = [y_1 \;\; y_2]\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0 \\ 0 & 6{,}85 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0{,}15y_1^2 + 6{,}85y_2^2$ değerleri yerlerine yazılırsa;

$$g\left(\underline{y}\right) = \frac{1}{2\pi[(6{,}85)(0{,}15)]^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}[0{,}15y_1^2 + 6{,}85y_2^2]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{6{,}85}\sqrt{0{,}15}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y_1}{\sqrt{1/0{,}15}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{1/6{,}85}}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{6{,}85}\sqrt{0{,}15}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y_1}{\sqrt{6{,}85}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{0{,}15}}\right)^2\right]\right\}$$

olarak bulunur.

Dikkat edilirse verilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (a) şıkkında görüldüğü gibi ikili çarpım terimi kapsamaktadır. Burada (a)'dakinden farklı olarak elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ikili çarpım terimini kapsamamaktadır. Bunun nedeni ortogonal bir dönüşüm kullanılmasıdır.

Sonuç: Verilen sistemde yer alan değişkenler birbirleri ile ilişkili iken sistemin kovaryans matrisinin özvektörler matrisi kullanılarak ortogonal bir dönüşüm uygulanırsa, bu dönüşümle elde edilen yeni sistemdeki değişkenler birbirleri ile ilişkisizdir.

Verilen sistem	Uygulanan Dönüşüm	Yeni sistem
$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$	$\underline{X} - \underline{\mu} = P\underline{Y}$	$\underline{Y} \sim N_p(\underline{0}, \Lambda)$
$Cov\left(x_j, x_k\right) \neq 0, j \neq k$	P : Σ matrisinin özvektörler matrisi	$Cov\left(y_j, y_k\right) = 0,$ tüm $j \neq k$ için

d) $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için; karakteristik fonksiyon

$\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{-\frac{5}{2}t_1^2 - t_2^2 + 3t_1t_2\right\} = e^U$ ve moment üreten fonksiyonu ise

$\mathrm{M}_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{\frac{5}{2}t_1^2 + t_2^2 - 3t_1t_2\right\} = e^U$ olarak bulundu.

Önce karakteristik fonksiyondan yararlanarak dağılımın parametrelerini bulalım.

$$\underline{\mu} = E\left(\underline{X}\right) = \frac{1}{i}\frac{d\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{d\underline{t}}\Bigg]_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{1}{i}\begin{bmatrix}\frac{\partial\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_1}\\ \frac{\partial\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_2}\end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{1}{i}\begin{bmatrix}(-5t_1 + 3t_2)e^U\\ (3t_1 - 2t_2)e^U\end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{1}{i}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$E\left(\underline{X}\,\underline{X}'\right) = \frac{1}{i^2}\frac{d^2\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{d\underline{t}d\underline{t}'}\Bigg]_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{1}{i^2}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_1\partial t_2}\\ \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_2\partial t_1} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_2^2}\end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$$= \frac{1}{i^2}\begin{bmatrix}-5e^U + (-5t_1 + 3t_2)^2e^U & 3e^U + (-5t_1 + 3t_2)(3t_1 - 2t_2)e^U\\ 3e^U + (3t_1 - 2t_2)(-5t_1 + 3t_2)e^U & -2e^U + (3t_1 - 2t_2)^2e^U\end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$= \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ ve böylece

$$\Sigma = E\left(\underline{X}\,\underline{X}'\right) - E\left(\underline{X}\right)E\left(\underline{X}'\right) = \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi de moment üreten fonksiyondan yararlanarak dağılımın parametrelerini bulalım.

$$\underline{\mu} = E\left(\underline{X}\right) = \frac{d\mathrm{M}_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{d\underline{t}}\Bigg]_{\underline{t}=\underline{0}} = \begin{bmatrix}\frac{\partial\mathrm{M}_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_1}\\ \frac{\partial\mathrm{M}_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right)}{\partial t_2}\end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}} = \begin{bmatrix}(5t_1 - 3t_2)e^U\\ (-3t_1 + 2t_2)e^U\end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$E(\underline{X}\,\underline{X}') = \frac{d^2 M_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}d\underline{t}'}\Bigg]_{\underline{t}=\underline{0}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 M_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 M_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 M_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_2 \partial t_1} & \frac{\partial^2 M_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_2^2} \end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$$= \begin{bmatrix} 5e^U + (5t_1 - 3t_2)^2 e^U & -3e^U + (5t_1 - 3t_2)(-3t_1 + 2t_2)e^U \\ -3e^U + (-3t_1 + 2t_2)(5t_1 - 3t_2)e^U & 2e^U + (-3t_1 + 2t_2)^2 e^U \end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ve böylece

$$\Sigma = E(\underline{X}\,\underline{X}') - E(\underline{X})E(\underline{X}') = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Örnek III.3 $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonunu oluşturunuz?

Çözüm: $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ iken $f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\}$ dir. $p = 2$ iken; $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{X} - \underline{\mu} = \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$, $(\sigma_{12} = \sigma_{21}) \Rightarrow$

$$|\Sigma| = \sigma_{11}\sigma_{22} - {\sigma_{12}}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \rho^2\sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho^2), \left(\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\ olduğundan\right)$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix}, \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}\sigma_{22}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\right)$$

$$\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right) = \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 & X_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\frac{1}{\sigma_{11}}(X_1 - \mu_1)^2 + \frac{1}{\sigma_{22}}(X_2 - \mu_2)^2 - 2\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\right\}$$

Bulunan bu sonuçlar fonksiyonda yerlerine yazılırsa;

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right\}$$

bulunur.

Örnek III.4 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ veriliyor. Buna göre:

a) Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

b) Dağılımın moment üreten fonksiyonunu bulunuz?

c) Dağılımın karakteristik fonksiyonunu bulunuz?

d) Dağılımın korelasyon matrisini bulunuz?

Çözüm: a) $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ iken $f\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\}$ dir. $p = 3$ iken; $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$, $\underline{x} - \underline{\mu} = \begin{bmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \\ x_3 - 3 \end{bmatrix}$; $|\Sigma| = 1(4-1) = 3$;

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|} Adj(\Sigma) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, [$\Sigma$ simetrik olduğundan $Adj(\Sigma) = \text{Kof}(\Sigma)$ dır.]

$$\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right) = [x_1 - 5 \quad x_2 - 4 \quad x_3 - 3]\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \\ x_3 - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}[3(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 4)^2 + (x_3 - 3)^2 - 2(x_2 - 4)(x_3 - 3)]$$

Elde edilen bu sonuçlar formülde yerlerine yazılırsa;

$$f\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{3}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(x_1 - 5)^2 + \frac{4}{3}(x_2 - 4)^2 + \frac{1}{3}(x_3 - 3)^2 - \frac{2}{3}(x_2 - 4)(x_3 - 3)\right]\right\}$$

olarak bulunur.

b) Dağılımın moment üreten fonksiyonu $M_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}' \Sigma \underline{t}\right\}$, $\underline{t} \in IR^3$

$\underline{t}'\underline{\mu} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 5t_1 + 4t_2 + 3t_3$ ve

$\underline{t}' \Sigma \underline{t} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = t_1^2 + t_2^2 + 4t_3^2 + 2t_2t_3$ olup, bu sonuçlar yerlerine yazılırsa; $M_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{5t_1 + 4t_2 + 3t_3 + \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + 4t_3^2 + 2t_2t_3)\right\}$

$= exp\left\{\frac{1}{2}t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 + 2t_3^2 + t_2t_3 + 5t_1 + 4t_2 + 3t_3\right\}$ elde edilir.

c) Dağılımın karakteristik fonksiyonu

$$\Phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{i\underline{t}'\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}' \Sigma \underline{t}\right\} = exp\left\{5it_1 + 4it_2 + 3it_3 - \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + 4t_3^2 + 2t_2t_3)\right\}$$

$= exp\left\{-\frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - 2t_3^2 - t_2t_3 + 5it_1 + 4it_2 + 3it_3\right\}$ elde edilir.

d) Dağılımın korelasyon matrisi: $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ biliniyorken $R = \left(K^{1/2}\right)^{-1}\Sigma\left(K^{1/2}\right)^{-1}$ dir.

Burada $K^{1/2} = Köş[\sqrt{1}, \sqrt{1}, \sqrt{4}] = Köş[1, 1, 2]$ ve $\left(K^{1/2}\right)^{-1} = Köş\left[1, 1, \frac{1}{2}\right]$ olup;

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\left(K^{1/2}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Örnek III.5 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için karakteristik fonksiyonu

$\Phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{5it_1 + 4it_2 + 3it_3 - \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - 2t_3^2 - t_2t_3\right\}$ şeklindedir. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right\}$ dir. Bu fonksiyonu elde edebilmek için önce dağılımın parametrelerini bulmamız gerekir. Bunun için orijine göre birinci ve ikinci momentlerden yararlanırız.

$\Phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{5it_1 + 4it_2 + 3it_3 - \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - 2t_3^2 - t_2t_3\right\} = e^U$ diyelim. Bu durumda birinci moment;

$$\underline{\mu} = E(\underline{X}) = \frac{1}{i}\frac{d\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{1}{i}\begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_3} \end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{1}{i}\begin{bmatrix} (5i - t_1)e^U \\ (4i - t_2 - t_3)e^U \\ (3i - t_2 - 4t_3)e^U \end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

iken, ikinci moment;

$$E(\underline{X}\,\underline{X}') = \frac{1}{i^2}\frac{d^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{d\underline{t}d\underline{t}'}\Big]_{\underline{t}=\underline{0}} = \frac{1}{i^2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_1\partial t_2} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_1\partial t_3} \\ \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_2\partial t_1} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_2^2} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_2\partial t_3} \\ \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_3\partial t_1} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_3\partial t_2} & \frac{\partial^2\Phi_{\underline{X}}(\underline{t})}{\partial t_3^2} \end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$$= \frac{1}{i^2}\begin{bmatrix} -e^U + (5i - t_1)^2e^U & (5i - t_1)(4i - t_2 - t_3)e^U & (5i - t_1)(3i - t_2 - 4t_3)e^U \\ (5i - t_1)(4i - t_2 - t_3)e^U & -e^U + (4i - t_2 - t_3)^2e^U & -e^U + (4i - t_2 - t_3)(3i - t_2 - 4t_3)e^U \\ (5i - t_1)(3i - 4t_3)e^U & -e^U + (4i - t_2 - t_3)(3i - t_2 - 4t_3)e^U & -4e^U + (3i - t_2 - 4t_3)^2e^U \end{bmatrix}_{\underline{t}=\underline{0}}$$

$= \begin{bmatrix} 26 & 20 & 15 \\ 20 & 17 & 13 \\ 15 & 13 & 13 \end{bmatrix}$ olup, buradan;

$$\Sigma = E(\underline{X}\,\underline{X}') - E(\underline{X})E(\underline{X}') = \begin{bmatrix} 26 & 20 & 15 \\ 20 & 17 & 13 \\ 15 & 13 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 26 & 20 & 15 \\ 20 & 17 & 13 \\ 15 & 13 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 20 & 16 & 12 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ bulunur. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise Örnek III.4(a)'da verildiği gibidir. Yani;

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{3}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(x_1 - 5)^2 + \frac{4}{3}(x_2 - 4)^2 + \frac{1}{3}(x_3 - 3)^2 - \frac{2}{3}(x_2 - 4)(x_3 - 3)\right]\right\}$$

dir.

SORULAR

1. $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı için moment üreten fonksiyonu;

$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{3t_1 + 2t_2 - 5t_3 + 18t_1^2 + \frac{9}{2}t_2^2 + 8t_3^2 + 6t_1t_2 - 10t_1t_3 - 5t_2t_3\right\}$ ise dağılımın parametrelerini $\left(\underline{\mu}\ ve\ \Sigma\right)$ bulunuz?

2. $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı verilsin. $H : p \times p$ matrisi için $rank(H) = p$ olmak üzere $\underline{Y} = H\underline{X}$: $p \times 1$ rastgele değişkenler vektörü tanımlansın. Değişken değiştirme tekniğini kullanarak $\underline{Y}$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

3. $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı için $j = 1, 2, \ldots, p$ iken X_j değişkenleri bağımsız olsun. Buna göre verilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu, karakteristik fonksiyonunu ve moment üreten fonksiyonunu bulunuz?

4. $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ olsun.

a) $H = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $Y = H\underline{X}$ rastgele değişkeninin dağılımını bulunuz ve $P(Y \leq 35)$ olasılığını hesaplayınız?

b) $Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = X_1 + 2X_2$ olmak üzere $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = H\underline{X}$ dönüşümünün dağılımını bulunuz?

c) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = H\underline{X}$ dönüşümünün dağılımını ve bu dağılımın korelasyon matrisi, moment üreten fonksiyonu $\left(M_{\underline{Y}}(\underline{t})\right)$ ile karakteristik fonksiyonunu $\left(\Phi_{\underline{Y}}(\underline{t})\right)$ bulunuz?