T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

4. Hafta

III.2 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Biliniyorken Parametrelerin Bulunması

$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}Q\left(\underline{x}\right)\right\}$ biliniyor olsun, öyle ki burada;

$$Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right) = \underline{x}'\Sigma^{-1}\underline{x} - 2\underline{x}'\Sigma^{-1}\underline{\mu} + \underline{\mu}'\Sigma^{-1}\underline{\mu} \qquad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonundan yararlanarak dağılımın parametreleri bulunabilir.

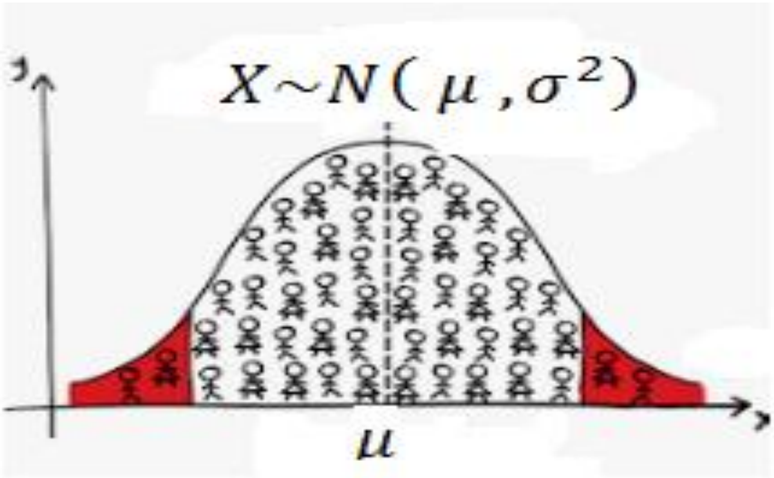
i) Σ Matrisinin Bulunması:

Eşitlik (3.10)'nun sağ tarafındaki birinci terim $\left(\underline{x}'\Sigma^{-1}\underline{x}\right)$, $\underline{x}$ vektörünün bileşenlerine göre ikinci dereceden bir ifade olup aynı zamanda bir karesel formdur. Bu ifade de ikinci derece terimlerin (bileşenlerin kareleri ve ikili çarpımları) katsayıları Σ^{-1}simetrik matrisinin elemanlarından gelmektedir. Bu sebeple bu karesel formdan yararlanarak Σ^{-1} matrisi bulunabilir. Şöyle ki; önce söz konusu karesel formda yer alan $\underline{x}$ vektörünün bileşenlerinden kareli terimlerin katsayıları esas köşegen üzerine yerleştirilir (x_1^2'nin katsayısı birinci eleman, x_2^2'nin katsayısı ikinci eleman, … , x_p^2'nin katsayısı p-nci eleman olacak şekilde). Daha sonra karesel formda yer alan $\underline{x}$ vektörünün bileşenlerinden ikili çarpım terimlerinin katsayılarının yarısı alınır ve esas köşegene göre simetrik olacak şekilde ilgili yerlere yerleştirilir. (Örneğin; x_1x_2 teriminin katsayısının yarısı matrisin birinci satır-ikinci sütun yerine diğer yarısı da ikinci satır-birinci sütun yerine, x_1x_3 teriminin katsayısının yarısı matrisin birinci satır-üçüncü sütun yerine diğer yarısı da üçüncü satır-birinci sütun yerine, x_2x_3 teriminin katsayısının yarısı matrisin ikinci satır-üçüncü sütun yerine diğer yarısı da üçüncü satır-ikinci sütun yerine v.s.yerleştirilir). Böylece Σ^{-1} matrisi bulunur. Bu matrisin tekrar tersi alındığında Σ matrisi elde edilir, yani $\Sigma = (\Sigma^{-1})^{-1}$ olacaktır.

ii) $\underline{\mu}$ Vektörünün Bulunması: $X \sim N(\,\mu\,, \sigma^2)$ dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & , -\infty < x < \infty \\ 0 & , diger \quad yerlerde \end{cases}$$

π = 3,14159...
e = 2,71828
σ = populasyon standart sapması
μ = populasyon ortalaması



μ ile ilgili neler söyleyebilirsiniz?

Normal dağılımda ortalama dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu maksimum yapan nokta olduğu için dağılımın ortalama vektörü:

$$\underline{\mu} = \left[\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}\right] \tag{3.11}$$

eşitliği ile bulunabilir. Eşitlik (3.11)'e göre dağılımın ortalama vektörü $\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$ homojen olmayan lineer denklem sisteminin çözüm vektörü demektir.

$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = k\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} exp\left(-\frac{1}{2}Q(\underline{x})\right) = \underline{0} \Leftrightarrow \frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$ olmasıdır. Buna göre $f(\underline{x})$ fonksiyonunu maksimum yapan değer $Q(\underline{x})$karesel formunu da maksimum yapacağı için dağılımın ortalama vektörü Eşitlik (3.11) yerine;

$$\underline{\mu} = \left[\frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}\right] \tag{3.12}$$

eşitliğini kullanarak, yani $\frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}$ homojen olmayan lineer denklem sisteminin çözümü olarak bulunur.

Örnek III.6 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$f(\underline{x}) = kexp\left\{-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{9}{2}x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 - 3x_2x_3 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 - \frac{13}{2}\right\}$ olsun.

Bu dağılımın moment üreten ve karakteristik fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: 6 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için moment üreten fonksiyon ve karakteristik fonksiyon $\underline{t} \in IR^3$ olmak üzere sırasıyla; $M_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\ \Sigma\underline{t}\right\}$ ve $\phi_{\underline{X}}\left(\underline{t}\right) = exp\left\{i\underline{t}'\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}'\ \Sigma\underline{t}\right\}$ formundadır. Bu fonksiyonları bulabilmek için önce dağılımın parametrelerinin bulunması gereklidir. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyon verildiğinden parametreler bulunabilir.

$\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ iken olasılık yoğunluk fonksiyonu $f\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\Sigma|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}Q\left(\underline{x}\right)\right\}$ öyleki $Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)$ şeklinde olacağından önce verilen fonksiyonu bu forma dönüştürelim.

$$f\left(\underline{x}\right) = kexp\left\{-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{9}{2}x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 - 3x_2x_3 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 - \frac{13}{2}\right\}$$

$= kexp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 + 2x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 13)\right\}$ öyle ki $Q\left(\underline{x}\right) = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 + 2x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 13$ olur.

Σ Matrisinin Bulunması: $Q\left(\underline{x}\right)$ karesel formunda ikinci derece terimlerin katsayılarından yukarıdaki açıklama dikkate alınarak önce Σ^{-1} matrisi bulunur.

$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma = (\Sigma^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|}Adj(\Sigma^{-1}) = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|}Kof(\Sigma^{-1})$, ($\Sigma^{-1}$simetrik olduğundan) $|\Sigma^{-1}| = 1(27) - 2(5) + 1(-3)$=14 ve böylece;

$\Sigma = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 27 & -5 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ bulunur.

μ Vektörünün Bulunması: $\underline{\mu} = \left[\frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \underline{0}\right] \Rightarrow \frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Q(\underline{x})}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2 \\ 4x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 14 \end{bmatrix} = \underline{0}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 18 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -14 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\,\Sigma^{-1}\underline{x}=\underline{b} \Rightarrow \underline{\mu} = \underline{x} = \frac{1}{2}\Sigma\underline{b} \Rightarrow$

$\underline{\mu} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 27 & -5 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ elde edilir. Buna göre; $\underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\underline{t}'\underline{\mu} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = t_1 - 2t_3;$$

$$\underline{t}'\ \Sigma\underline{t} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 27 & -5 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}(27t_1^2 + 3t_2^2 + 5t_3^2 - 10t_1t_2 - 6t_1t_3 - 2t_2t_3)$$

olur. Bu sonuçlar moment üreten fonksiyon ile karakteristik fonksiyonda yerlerine yazılırsa;

$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{t_1 - 2t_3 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{14}(27t_1^2 + 3t_2^2 + 5t_3^2 - 10t_1t_2 - 6t_1t_3 - 2t_2t_3)\right]\right\}$ ve

$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = exp\left\{it_1 - 2it_3 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{14}(27t_1^2 + 3t_2^2 + 5t_3^2 - 10t_1t_2 - 6t_1t_3 - 2t_2t_3)\right]\right\}$ olarak bulunur.

III.3 Marjinal ve Şartlı Dağılımlar

Tanım III.3 $\underline{X} : p \times 1$ bir rastgele değişkenler vektörü olsun. $\underline{X}_1 : k \times 1, (k < p)$ ve $\underline{X}_2 : (p-k) \times 1$ olmak üzere $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$ ifadesine $\underline{X}$ rastgele vektörünün bir parçalanması denir. Burada $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ de birer alt rastgele vektörlerdir. $\underline{X}$ rastgele vektörünün bir olasılık dağılımı varsa $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt rastgele vektörlerinin de hem ayrı ayrı hem de birisinin üzerinde tanımlanan belli koşullar altında diğerinin olasılık dağılımları bulunabilir.

Eğer $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörü, ortalama vektörü $\underline{\mu} : p \times 1$ ve varyans kovaryans matrisi $\Sigma : \mathrm{p} \times \mathrm{p}$ olan bir kitleyi temsil ediyorsa, bu durumda $\underline{X}$ rastgele vektörünün parçalanmasına bağlı olarak kitle parametreleri de parçalanabilir. Şöyle ki;

$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \ni \underline{\mu}_1 = E(\underline{X}_1) : k \times 1$ ve $\underline{\mu}_2 = E(\underline{X}_2) : (p-k) \times 1$ iken

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni$$

$\begin{cases} \Sigma_{11} = Cov(\underline{X}_1) : k \times k ; \Sigma_{22} = Cov(\underline{X}_2) : (p-k) \times (p-k) \\ \Sigma_{12} = Cov(\underline{X}_1, \underline{X}_2) : k \times (p-k);\ \Sigma_{21} = Cov(\underline{X}_2, \underline{X}_1) = \Sigma_{12}' : (p-k) \times k \end{cases}$ olacaktır.

Tanım III.4 $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımı verilsin. $\underline{X}$ rastgele değişkenler vektörünün bir parçalanması $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni \underline{X}_1 : k \times 1$ ve $\underline{X}_2 : (p-k) \times 1$ olsun. Bu takdirde:

i) $\underline{X}_1$ alt vektörünün marjinal dağılımı; $\underline{X}_1 \sim N_k(\underline{\mu}_1, \Sigma_{11})$ olup, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1)' \ \Sigma_{11}^{-1} (\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1)\right\}$ şeklindedir.

ii) $\underline{X}_2$ alt vektörünün marjinal dağılımı; $\underline{X}_2 \sim N_{p-k}(\underline{\mu}_2, \Sigma_{22})$ olup, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{(p-k)/2}|\Sigma_{22}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2)' \ \Sigma_{22}^{-1} (\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2)\right\}$ şeklindedir.

iii) $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün şartlı dağılımı $\underline{X}_1 \sim N_k\left(\underline{\mu}_{1.2}, \Sigma_{11.2}\right)$ olup, şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$f_{\underline{X}_1}\left(\underline{x}_1/\underline{X}_2 = \underline{x}_2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma_{11.2}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_{1.2}\right)' \Sigma_{11.2}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_{1.2}\right)\right\}$ şeklindedir. Burada;

$\underline{\mu}_{1.2} = E\left(\underline{X}_1/\underline{X}_2 = \underline{x}_2\right) = \underline{\mu}_1 + \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2\right)$; $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün şartlı (Kısmî) ortalama vektörü

$\Sigma_{11.2} = Cov\left(\underline{X}_1/\underline{X}_2 = \underline{x}_2\right) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$; $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün şartlı (Kısmî) varyans- kovaryans matrisi

$\mathrm{R}_{11.2} = \left(K^{1/2}\right)^{-1}\Sigma_{11.2}\left(K^{1/2}\right)^{-1}$: $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1$alt vektörünün şartlı (Kısmî) korelasyon matrisidir. Kısmi korelasyon matrisinde yer alan$\left(K^{1/2}\right)$ matrisi, köşegen elemanları $\Sigma_{11.2}$ şartlı varyans kovaryans matrisinin esas köşegen elemanlarının kareköklerinden yani şartlı standart sapmalardan oluşan bir köşegen matristir. $K^{1/2} = K\text{öş}\left[\sqrt{\sigma_{jj.2}}\,\right], j = 1, 2, \dots, k$ olarak yazılabilir.

iv) $\underline{X}_1 = \underline{x}_1$ iken $\underline{X}_2$ alt vektörünün şartlı dağılımı $\underline{X}_2 \sim N_{p-k}\left(\underline{\mu}_{2.1}, \Sigma_{22.1}\right)$ olup, şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$f_{\underline{X}_2}\left(\underline{x}_2/\underline{X}_1 = \underline{x}_1\right) = \frac{1}{(2\pi)^{(p-k)/2}|\Sigma_{22.1}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_{2.1}\right)' \Sigma_{22.1}^{-1}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_{2.1}\right)\right\}$

şeklindedir. Burada;

$\underline{\mu}_{2.1} = E\left(\underline{X}_2/\underline{X}_1 = \underline{x}_1\right) = \underline{\mu}_2 + \Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right)$; $\underline{X}_1 = \underline{x}_1$ iken $\underline{X}_2$ alt vektörünün şartlı (Kısmî) ortalama vektörü

$\Sigma_{22.1} = Cov\left(\underline{X}_2/\underline{X}_1 = \underline{x}_1\right) = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$; $\underline{X}_1 = \underline{x}_1$ iken $\underline{X}_2$ alt vektörünün şartlı (Kısmî) varyans- kovaryans matrisi

$\mathrm{R}_{22.1} = \left(K^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\Sigma_{22.1}\left(K^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$: $\underline{X}_1 = \underline{x}_1$ iken $\underline{X}_2$ alt vektörünün şartlı (Kısmî) korelasyon matrisidir. Kısmi korelasyon matrisinde yer alan$\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$ matrisi, köşegen elemanları $\Sigma_{22.1}$ şartlı varyans kovaryans matrisinin esas köşegen elemanlarının kareköklerinden yani şartlı standart sapmalardan oluşan bir köşegen matristir. $K^{\frac{1}{2}} = K\text{öş}\left[\sqrt{\sigma_{jj.2}}\,\right], j = (k+1), (k+2), \dots, p$ olarak yazılabilir.

Örnek III.7 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 27 & -5 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ olsun.

i) $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni \ \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ve $\underline{X}_2 = [X_3]$ parçalanması için ;

a) $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz?

b) $\underline{X}_2 = [-1]$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve kısmî korelasyon matrisini bulunuz?

Çözüm:

a) Önce verilen parçalanmaya göre dağılımın parametrelerini de parçalara ayıralım.

$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \ni \ \underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\underline{\mu}_2 = [-2]$

$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni \Sigma_{11} = \begin{bmatrix} 27/14 & -5/14 \\ -5/14 & 3/14 \end{bmatrix}; \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} -3/14 \\ -1/14 \end{bmatrix}; \Sigma_{21} = \Sigma_{12}'$ ve $\Sigma_{22} = [5/14]$

$\underline{X}_1$ alt vektörünün marjinal dağılımı $\underline{X}_1 \sim N_2(\underline{\mu}_1, \Sigma_{11})$ olup, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; $f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right)' \Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right)\right\}$ eşitliğinden bulunabilir. Burada k=2, $|\Sigma_{11}|=4/14$; $\Sigma_{11}^{-1} = \frac{1}{(4/14)}\begin{bmatrix} 3/14 & 5/14 \\ 5/14 & 27/14 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 27 \end{bmatrix}$

$\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right)' \Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right) = [x_1 - 1 \quad x_2]\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}(x_1 - 1)^2 + \frac{27}{4}x_2^2 + \frac{10}{4}(x_1 - 1)x_2$ dir. Bu sonuçlar fonksiyonda yerlerine yazılırsa:

$f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{4/14}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(x_1 - 1)^2 + \frac{27}{4}x_2^2 + \frac{10}{4}(x_1 - 1)x_2\right]\right\}$ bulunur.

$\underline{X}_2$ alt vektörünün marjinal dağılımı $\underline{X}_2 \sim N(\underline{\mu}_2, \Sigma_{22})$ olup, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; $f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{(p-k)/2}|\Sigma_{22}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2\right)' \Sigma_{22}^{-1}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2\right)\right\}$ eşitliğinden bulunabilir. Burada $p-k$=1, $|\Sigma_{22}|=5/14$; ${\Sigma_{22}}^{-1} = (5/14)^{-1} = 14/5$ ve

$\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2\right) = x_3 + 2$ olduğundan $\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2\right)' \Sigma_{22}^{-1}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2\right) = \frac{14}{5}(x_3 + 2)^2$ elde edilir. Bu sonuçlar formülde yerlerine yazılırsa;

$f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5/14}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{14}{5}(x_3 + 2)^2\right]\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5/14}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_3+2}{\sqrt{5/14}}\right)^2\right\}$ olarak bulunur.

b) $\underline{X}_2 = [-1]$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün şartlı $\underline{X}_1 \sim N_2(\underline{\mu}_{1.2}, \Sigma_{11.2})$ olup, şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1/\underline{X}_2 = \underline{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma_{11.2}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_{1.2}\right)' \Sigma_{11.2}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_{1.2}\right)\right\}$ eşitliğinden bulunur. Burada k=2; $\underline{x}_2 = -1$

$$\underline{\mu}_{1.2} = \underline{\mu}_1 + \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/14 \\ -1/14 \end{bmatrix}(14/5)\left(-1-(-2)\right) = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \begin{bmatrix} \frac{27}{14} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{14} \end{bmatrix}\left(\frac{14}{5}\right)\begin{bmatrix} -\frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma_{11.2}| = \frac{1}{5} \text{ ve } \Sigma_{11.2}^{-1} = 5\left(\frac{1}{5}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix};\ \left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_{1.2}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2/5 \\ x_2 + 1/5 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_{1.2}\right)' \Sigma_{11.2}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_{1.2}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{2}{5} & x_2 + \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - \frac{2}{5} \\ x_2 + \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 - 2/5)^2 + 9(x_2 + 1/5)^2 + 4(x_1 - 2/5)(x_2 + 1/5)$$

olup, bu sonuçlar fonksiyonda yerlerine yazılırsa;

$$f_{\underline{X}_1}\left(\underline{x}_1/(\underline{X}_2 = -1)\right) = \frac{1}{2\pi\, 1/\sqrt{5}} exp\left\{-\frac{1}{2}[(x_1 - 2/5)^2 + 9(x_2 + 1/5)^2 + 4(x_1 - 2/5)(x_2 + 1/5)]\right\}$$

elde edilir.

Son olarak $\underline{X}_2$=[−1] iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün kısmî korelasyon matrisini bulalım.

$$R_{11.2} = \left(K^{1/2}\right)^{-1}\Sigma_{11.2}\left(K^{1/2}\right)^{-1};\ \Sigma_{11.2} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ K^{1/2} = K\text{öş}\left[\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \text{olup,}$$

$$R_{11.2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.