T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

5. Hafta

özenilen üniversite

Örnek III.8 $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 27 & -5 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ olsun.

i) $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$ ve $\underline{X}_2 = [X_2]$ parçalanması için

a) $\underline{X}_1$ alt vektörünün marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

b) $\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ iken $\underline{X}_2$ alt vektörünün şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

c) $\underline{X}_2 = [1]$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün kısmî korelasyon matrisini bulunuz?

ii) $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$, $Y_2 = X_1 - X_3$ ve $Y_3 = X_1 + 2X_2$ olmak üzere

a) Y_1 doğrusal bağıntısının olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz?

b) $P(3 \leq Y_1 \leq 4) =$?

c) $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$ iken $\underline{Y} = H\underline{X}$ dönüşüm rastgele vektörünün dağılımını bulunuz?

d) Y_1 ileY_3 ün bağımsız olup olmadığını gösteriniz?

Çözüm:

i-a) Verilen parçalanmaya göre dağılımın parametrelerini de parçalayalım.

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \ni \underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ ve } \underline{\mu}_2 = [0]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni \Sigma_{11} = \begin{bmatrix} 27/14 & -3/14 \\ -3/14 & 5/14 \end{bmatrix}; \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} -5/14 \\ -1/14 \end{bmatrix}; \Sigma_{21} = \Sigma_{12}' \text{ ve } \Sigma_{22} = [3/14]$$

$\underline{X}_1$ alt vektörünün marjinal dağılımı $\underline{X}_1 \sim N_2(\underline{\mu}_1\,, \Sigma_{11})$ olup, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; $f_{\underline{X}_1}\left(\underline{x}_1\right) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right)' \Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right)\right\}$ eşitliğinden bulunabilir. Burada k=2, $|\Sigma_{11}|=9/14$; $\Sigma_{11}^{-1}=\frac{1}{(9/14)}\begin{bmatrix} 5/14 & 3/14 \\ 3/14 & 27/14 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 27 \end{bmatrix}$

$$\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_3 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_3 + 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right)' \Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right) = [x_1 - 1 \quad x_3 + 2]\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_3 + 2 \end{bmatrix}=\frac{5}{9}(x_1 - 1)^2 + \frac{27}{9}(x_3 + 2)^2 + \frac{6}{9}(x_1 - 1)(x_3 + 2)$ dir. Bu sonuçlar fonksiyonda yerlerine yazılırsa:

$f_{\underline{X}_1}\left(\underline{x}_1\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{9/14}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}(x_1 - 1)^2 + \frac{27}{9}(x_3 + 2)^2 + \frac{6}{9}(x_1 - 1)(x_3 + 2)\right]\right\}$ bulunur.

b) $\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ iken $\underline{X}_2$ alt vektörünün şartlı $\underline{X}_2 \sim N(\underline{\mu}_{2.1}, \Sigma_{22.1})$ olup, şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2/\underline{X}_1 = \underline{x}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{(p-k)/2}|\Sigma_{22.1}|^{1/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_{2.1}\right)' \Sigma_{22.1}^{-1}\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_{2.1}\right)\right\}$ eşitliğinden bulunur. Burada $p-k=1$; $\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\underline{\mu}_{2.1} = \underline{\mu}_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\left(\underline{x}_1 - \underline{\mu}_1\right) = [0] + \begin{bmatrix} -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-1 \\ -1-(-2) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} = \frac{3}{14} - \begin{bmatrix} -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{14} \\ -\frac{1}{14} \end{bmatrix} = \frac{3}{14} - \frac{1}{9} \times \frac{13}{14} = \frac{1}{9}$$

$|\Sigma_{22.1}| = \frac{1}{9}$ ve $\Sigma_{22.1}^{-1} = 9$; $\left(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_{2.1}\right) = \left[x_2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \left[x_2 + \frac{1}{3}\right]$ olup, bu sonuçlar fonksiyonda yerlerine yazılırsa;

$$f_{\underline{X}_2}\left(\underline{x}_2/\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{3}\right)} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[9\left(\left[x_2 + \frac{1}{3}\right]\right)^2\right]\right\}$$

elde edilir.

c) $\underline{X}_2 = [1]$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün kısmî korelasyon matrisi; $\mathrm{R}_{11.2} = \left(K^{1/2}\right)^{-1}\Sigma_{11.2}\left(K^{1/2}\right)^{-1}$

$$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \begin{bmatrix} \frac{27}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5/14 \\ -1/14 \end{bmatrix} \left(\frac{14}{3}\right) \begin{bmatrix} -5/14 & -1/14 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{14\times 3}\begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14\times 3}\begin{bmatrix} 56 & -14 \\ -14 & 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$K^{1/2} = K\text{öş}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$olup,

$$\mathrm{R}_{11.2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

ii-a) $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$ doğrusal bağıntısı için olasılık yoğunluk fonksiyonu $g(y_1)$=?

Önce $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$ doğrusal bağıntısının dağılımını oluşturalım.

$Y_1 = X_1 + X_2 - X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = H\underline{X}$ şeklinde yazılabilir. $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ olduğundan

Sonuç III.2 gereğince normal değişkenlerin doğrusal fonksiyonları da normal dağılıma sahip olacağından $Y_1 \sim N\left(\underline{\mu}_{Y_1} = H\underline{\mu},\ \Sigma_{Y_1} = H\,\Sigma H'\right)$ olur.

Burada $\underline{\mu}_{Y_1} = H\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 3$ ve

$\Sigma_{Y_1} = H\,\Sigma H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 27 & -5 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 25 & -1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{33}{14}$ olup,

böylece $Y_1 \sim N\left(\underline{\mu}_{Y_1} = 3\,,\ \Sigma_{Y_1} = 33/14\right)$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$g(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{33/14}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_1 - 3}{\sqrt{33/14}}\right]^2\right\}$ bulunur.

b) $Y_1 \sim N\left(\underline{\mu}_{Y_1} = 3\,,\ \Sigma_{Y_1} = 33/14\right)$ iken $Z = \frac{Y_1 - \underline{\mu}_{Y_1}}{\sqrt{\Sigma_{Y_1}}} \sim N(0\ ,\ 1)$ olduğu dikkate alındığında,

$P(3 \le Y_1 \le 4) = P\left(\frac{3-3}{\sqrt{33/14}} \le Z \le \frac{4-3}{\sqrt{33/14}}\right) = P(0 \le Z \le 0{,}65) = 0{,}2422$ bulunur.

c) $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 - X_3 \\ X_1 - X_3 \\ X_1 + 2X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ iken $\underline{Y} = H\underline{X}$ olup, $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dir.

Teorem III.3 gereğince normal dağılıma sahip rastgele vektörlerin her türlü doğrusal bağıntıları da yine normal dağılıma sahip olacağından; $\underline{Y} = H\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}_{\underline{Y}} = H\underline{\mu}\,,\ \Sigma_{\underline{Y}} = H\,\Sigma H'\right)$ yazılabilir.

Bu dağılım için ortalama vektörü;

$$\underline{\mu}_{\underline{Y}} = H\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve varyans kovaryans matrisi;

$$\Sigma_{\underline{Y}} = H\,\Sigma H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 27 & -5 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 25 & -1 & -9 \\ 30 & -4 & -8 \\ 17 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 33 & 34 & 23 \\ 34 & 38 & 22 \\ 23 & 22 & 19 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. O halde $\underline{Y} = H\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}_{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\ ,\ \Sigma_{\underline{Y}} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 33 & 34 & 23 \\ 34 & 38 & 22 \\ 23 & 22 & 19 \end{bmatrix}\right)$ yazılır.

d) $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$ ile$Y_3 = X_1 + 2X_2$ ün bağımsız olup olmadığı iki yolla gösterilebilir.

I.Yol: "$U \sim N(\mu_U, \sigma_U^2)$ ve $V \sim N(\mu_V\ , \sigma_V^2)$ iken U ve V rastgele değişkenlerinin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\sigma_{UV} = Cov(U\ , V) = 0$ olmasıdır."

Bu bilgiden yararlanabilmek için önce Y_1 ile Y_3 doğrusal bağıntılarının dağılımlarını bulmalıyız. (b) şıkkında $Y_1 \sim N(3, \frac{33}{14})$ olduğu bulundu. Benzer şekilde $Y_3 = X_1 + 2X_2$ doğrusal bağıntısı içinde $Y_3 \sim N(1,\ 19/14)$ bulunur. Şimdi de $Cov(Y_1, Y_3)$ bulalım.

$Cov(Y_1, Y_3) = E(Y_1 Y_3) - E(Y_1)E(Y_3)$

$= E[(X_1 + X_2 - X_3)(X_1 + 2X_2)] - E(X_1 + X_2 - X_3)E(X_1 + 2X_2)$

$= E(X_1^2 + 3X_1X_2 + 2X_2^2 - X_1X_3 - 2X_2X_3) - [E(X_1) + E(X_2) - E(X_3)][E(X_1) + 2E(X_2)]$

$= [E(X_1^2) + 3E(X_1X_2) + 2E(X_2^2) - E(X_1X_3) - 2E(X_2X_3)] - [E(X_1)]^2 - 3E(X_1)E(X_2) - 2[E(X_2)]^2 + E(X_1)E(X_3) + 2E(X_2)E(X_3)$

$= \{E(X_1^2) - [E(X_1)]^2\} + 3[E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)] + 2\{E(X_2^2) - [E(X_2)]^2\} - [E(X_1X_3) - E(X_1)E(X_3)] - 2[E(X_2X_3) - E(X_2)E(X_3)]$

$= \sigma_{11} + 3\sigma_{12} + 2\sigma_{22} - \sigma_{13} - 2\sigma_{23} = \frac{27}{14} + 3\left(-\frac{5}{14}\right) + 2\left(\frac{3}{14}\right) - \left(-\frac{3}{14}\right) - 2\left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{23}{14} \neq 0$ olduğundan Y_1 ile Y_3 bağımsız değildir.

II.Yol: $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \sim N_3 \left(\underline{\mu}_{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ \Sigma_{\underline{Y}} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 33 & 34 & 23 \\ 34 & 38 & 22 \\ 23 & 22 & 19 \end{bmatrix} \right)$ olduğu (c) şıkkından biliniyor.

Eğer bir rastgele vektör çok değişkenli normal dağılıma sahipse, o zaman bu vektörün her bir bileşeni tek değişkenli normal dağılıma sahiptir. Öyle ki tek değişkenli normal dağılımlara ilişkin parametreler çok değişkenli normal dağılımın parametrelerinden bulunabilir. Ancak; bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani tek değişkenli normal dağılıma sahip rastgele değişkenlerin oluşturacağı çok değişkenli bir sistem çok değişkenli normal dağılıma sahip olmak zorunda değildir.

Bu açıklamaya göre verilen bilgi dikkate alındığında $Y_1 \sim N(3, 33/14)$ ve$Y_3 \sim N(1, 19/14)$ olduğu söylenir. Ayrıca $Cov\ (Y_1, Y_3) = \frac{23}{14} \neq 0$ olduğundan Y_1 ile Y_3 bağımsız değildir.

III.4 Çoklu Korelasyon

$\underline{X} : p \times 1$ bir rastgele değişkenler vektörü için $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ ve $Cov(\underline{X}) = \Sigma$ olsun. $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni$

$\underline{X}_1 = [X_j]\ , (j = 1, 2, \dots, p)$ ve $\underline{X}_2' = [X_1 \ \ X_2 \ \ \dots \ \ X_{j-1} \ \ X_{j+1} \ \ \dots \ \ X_p] : 1 \times (p-1)$ parçalanması verilsin. Bu parçalanmaya göre parametrelerin parçalanması

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \ni \ \underline{\mu}_1 = [\mu_j] \text{ ve } \underline{\mu}_2' = [\mu_1 \ \ \mu_2 \ \ \dots \ \ \mu_{j-1} \ \ \mu_{j+1} \ \ \dots \ \ \mu_p] : 1 \times (p-1)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni \ \Sigma_{11} = [\sigma_{jj}]\ , \Sigma_{12} = Cov(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = [\sigma_{jk}] : 1 \times (p-1), j \neq k = 1, \dots, p$$

$\Sigma_{21} = Cov\left(\underline{X}_2, \underline{X}_1\right) = \Sigma'_{12} :\ (p-1) \times 1$ ve $\Sigma_{22} = Cov\left(\underline{X}_2\right) = [\sigma_{ik}] :\ (p-1) \times (p-1)$, burada $i, k \neq j$ ve $i, k = 1, 2, \ldots, p$ şeklinde olacaktır. Ayrıca X_j değişkeni ile $\underline{X}_2$ alt vektöründeki değişkenlerin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu lineer bağıntıyı $\underline{\beta} :\ (p-1) \times 1$ katsayılar vektörü olmak üzere;

$$X_j = \underline{X}'_2\, \underline{\beta} + \varepsilon$$

şeklinde bir çoklu lineer regresyon modeli ile ifade edelim. Buna göreX_j değişkeni ile $\underline{X}'_2\, \underline{\beta}$ lineer bağıntısı arasındaki en büyük korelasyona çoklu korelasyon denir ve $\rho_{X_j, \underline{X}'_2 \underline{\beta}}$ ile gösterilir. Söz konusu bu çoklu korelasyon:

$$\rho_{X_j, \underline{X}'_2 \underline{\beta}} = \frac{\left(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)^{1/2}}{\sigma_j} \quad , \ j = 1, 2, \ldots, p \tag{3.13}$$

eşitliği ile hesaplanır. Ayrıca $\rho^2_{X_j, \underline{X}'_2 \underline{\beta}}$ ifadesine de Çoklu Belirtme katsayısı denir. Burada

$0 \leq \rho_{X_j, \underline{X}'_2 \underline{\beta}} \leq 1$ iken $0 \leq \rho^2_{X_j, \underline{X}'_2 \underline{\beta}} \leq 1$ dir.

Örnek III.9 $\underline{X} : p \times 1$ bir rastgele değişkenler vektörü için $Cov\left(\underline{X}\right) = \Sigma$ olsun. $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni$ $\underline{X}_1 = [X_1]$ ve $\underline{X}'_2 = \left[X_2 \ \ \ldots \ \ X_p\right] : 1 \times (p-1)$ parçalanması verilsin. $\underline{X}_1$ alt ratgele vektörünün marjinal varyansı ile $\underline{X}_2 = \underline{a}$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün şartlı varyansını karşılaştırınız?

Çözüm: Verilen parçalanmaya göre $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni \Sigma_{11} = [\sigma_{11}],\ \Sigma_{12} = [\sigma_{1k}] : 1 \times (p-1), k = 2, 3, \ldots, p$; $\Sigma_{21} = \Sigma'_{12}$ ve $\Sigma_{22} = [\sigma_{ik}] :\ (p-1) \times (p-1)$, burada $i, k \neq 1$ ve $i, k = 2, 3, \ldots, p$ şeklinde yazılabilir. Bu parçalanmaya göre;

$\underline{X}_1$ alt ratgele vektörünün marjinal varyansı $\Sigma_{11} = \sigma_{11} > 0$ dır.

$\underline{X}_2 = \underline{a}$ iken $\underline{X}_1$ alt vektörünün şartlı varyansı;

$$\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\, \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \sigma_{11} - \Sigma_{12}\, \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \tag{3.14}$$

dir. Şimdi X_1değişkeni ile $\underline{X}'_2\, \underline{\beta}$ lineer bağıntısı arasındaki çoklu korelasyon dikkate alınırsa;

$\rho_{X_1,\underline{X'}_2\underline{\beta}} = \frac{(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{1/2}}{\sigma_1}$ eşitliğinden $(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{1/2} = \sigma_1\rho_{X_1,\underline{X'}_2\underline{\beta}}$ ve her iki tarafın karesi alınarak $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \sigma_{11}\rho^2_{X_j,\underline{X'}_2\underline{\beta}}$ eşitliği elde edilir. Bu sonuç Eşitlik (3.14) de yerine yazılırsa:

$\Sigma_{11.2} = \sigma_{11} - \sigma_{11}\rho^2_{X_j,\underline{X}'_2\underline{\beta}} = \sigma_{11}\left(1 - \rho^2_{X_j,\underline{X}'_2\underline{\beta}}\right)$ elde edilir. Burada $0 \le \rho^2_{X_j,\underline{X}'_2\underline{\beta}} \le 1$ olduğundan $\Sigma_{11} > \Sigma_{11.2}$ sonucu elde edilir.

Örnek III.10 $\underline{X}$: 3×1 bir rastgele değişkenler vektörü için $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni$

$\underline{X}_1 = [X_1]$ ve $\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ parçalanması verilsin.

a) X_1 değişkeni ile $Y = \underline{X'}_2\underline{\beta} = \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3$ doğrusal bağıntısı arasındaki çoklu korelasyonu bulunuz?

b) $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1$ vektörünün şartlı varyansının marjinal varyansından daha küçük olduğunu gösteriniz?

c) $X_1 = \underline{X'}_2\underline{\beta} + \varepsilon$ regresyon modeli için doğrusal bağıntıda yer alan açıklayıcı değişkenlerin (X_2 ve X_3) bağımı değişkeni (X_1) hangi oranda açıkladığını bulunuz?

Çözüm: a) Önce verilen parçalanmaya bağı olarak Σ matrisini alt matrislere ayıralım. Verilen parçalanma $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni \underline{X}_1 = [X_1]$ ve $\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ olduğundan, $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni$

$\Sigma_{11} = [1]$, $\Sigma_{12} = [2 \quad 1]$, $\Sigma_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ şeklinde parçalanır. Bu durumda X_1 değişkeni ile $Y = \underline{X'}_2\underline{\beta} = \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3$ doğrusal bağıntısı arasındaki çoklu korelasyon Eşitlik (3.13)'de $j = 1$ için;

$\rho_{X_1,\underline{X'}_2\underline{\beta}} = \frac{(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{1/2}}{\sigma_1}$ eşitliğinden hesaplanır. $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = [2 \quad 1]\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}[5 \quad 0]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}$ ve $\sigma_1 = \sqrt{1} = 1$ sonuçları formülde yerlerine yazılırsa: $\rho_{X_1,\underline{X'}_2\underline{\beta}} = \frac{\sqrt{2/3}}{1} = 0{,}82$ bulunur.

b) $\underline{X}_2 = \underline{x}_2$ iken $\underline{X}_1$ vektörünün şartlı varyansı; $\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ve $\underline{X}_1$ vektörünün marjinal varyansı : $\Sigma_{11} = \sigma_{11} = 1$ olduğundan $\Sigma_{11.2} < \Sigma_{11}$ olduğu görülmektedir.

c) $X_1 = \underline{X}'_2 \underline{\beta} + \varepsilon$ regresyon modeli için doğrusal bağıntıda yer alan açıklayıcı değişkenlerin $(X_2\ ve\ X_3)$ bağımı değişkeni (X_1) açıklama oranı çoklu belirtme katsayısı ile ölçülür. Çoklu belirtme katsayısı $\rho^2_{X_j, \underline{X}'_2 \underline{\beta}} = (0{,}82)^2 = 0{,}6724$ olarak bulunur.

SORULAR

1. $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$f(\underline{x}) = kexp\left\{-x_1^2 + 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2 + 4x_1 + 2x_2 + 10\right\}$ olsun.

a) Dağılımın parametrelerini bulunuz?

b) $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$ $\ni$ $\underline{X}_1 = [X_1]$ ve $\underline{X}_2 = [X_2]$ parçalanması verilsin.

i) $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz?

ii) $\underline{X}_1 = 2$ iken $\underline{X}_2$ alt vektörünün şartlı dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz?

c) Verilen dağılımın moment üreten ve karakteristik fonksiyonlarını bulunuz?

d) $Y_1 = X_1 - 2X_2$ ve $Y_2 = 2X_1 + 3X_2$ olmak üzere $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ rastgele vektörü tanımlansın.

i) Y_1 ve Y_2 rastgele değişkenlerinin olasılık dağılımlarını oluşturunuz?

ii) $\underline{Y}$ rastgele vektörünün olasılık dağılımını oluşturunuz?

iii) $\underline{Y}$ rastgele vektörünün olasılık dağılımına ait moment üreten ve karakteristik fonksiyonları bulunuz?

iv) $P(-10 \leq Y_1 \leq -7)$ olma olasılığını hesaplayınız?

SORU: $\underline{X} \sim N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$ ve $f(\underline{x}) = kexp\left\{-\frac{1}{2}Q(\underline{x})\right\}$, $Q(\underline{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 - 20$

$Y_1 = X_1 + X_2$ ve $Y_2 = 2X_1 - X_2$olmak üzere $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ için $M_{\underline{Y}}(\underline{t})$ =?

ÇÖZÜM: i. Verilen dağılımın parametreleri yoğ. fonk.dan faydalanarak bulunur. ($\underline{\mu}$ =?$,\Sigma =$?)

ii. $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \sim ?$ $\underline{Y} = H\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim ?\, N_2(?\,,?)$

iii) $M_{\underline{Y}}(\underline{t}) = exp\left\{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\Sigma\underline{t}\right\}$=?