T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

6. Hafta

özenilen üniversite

III.5 Alt Vektörlerin Bağımsızlığı

Tanım III.5 $\underline{X} : p \times 1$ rastgele değişkenler vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\underline{x})$ olsun. $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \underline{X}_g \end{bmatrix} \ni k = 1, 2, \ldots, g$ için $\underline{X}_k : p_k \times 1$ parçalaması verilsin. Burada $\sum_{k=1}^{g} p_k = p$ dir. $k = 1, 2, \ldots, g$ için $\underline{X}_k$ alt vektörünün marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu $f_{\underline{X}_k}(\underline{x}_k)$ ile gösterelim. Eğer $f(\underline{x}) = f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1).f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2) \ldots f_{\underline{X}_g}(\underline{x}_g)$ oluyorsa, o zaman $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_g$ alt vektörlerine karşılıklı bağımsızdır denir.

Bu tanımın tersi de her zaman doğrudur. Yani alt vektörler bağımsız ise $f(\underline{x}) = f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1).f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2) \ldots f_{\underline{X}_g}(\underline{x}_g)$ eşitliği de sağlanır. Ancak; bir alt vektörün kendi içerisinde yer alan değişkenler birbirleri ile bağımsız olmak zorunda değildir.

Teorem III.4 $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımı için $\underline{X}$ vektörünün bir parçalanması Tanım III.5'deki gibi verilsin. Bu parçalanmaya göre $k = 1, 2, \ldots, g$ için $\underline{X}_k \sim N_{p_k}(\underline{\mu}_k, \Sigma_{kk})$ dır ve ayrıca $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_g$ alt vektörlerinin karşılıklı bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\Sigma_{kl} = [0]$, $(k \neq l = 1.2 \ldots, g)$ olmasıdır.

Örnek III.11 $\underline{X} \sim N_3(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ olsun.

a) $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni \underline{X}_1 = [X_1]$ ve $\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ parçalanması verilsin. $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörlerinin bağımsız olup olmadığını gösteriniz?

b) $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \ni \underline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ve $\underline{X}_2 = [X_3]$ parçalanması verilsin. $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörlerinin bağımsız olup olmadığını gösteriniz?

Çözüm: a) Önce $\underline{X}_1 = [X_1]$ ve $\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ alt vektörlerinin marjinal dağılımlarını oluşturalım. Verilen parçalanmaya göre dağılımın parametreleri de parçalanacak olursa;

$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \ni \ \underline{\mu}_1 = [5]$ ve $\underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni \Sigma_{11} = [1], \Sigma_{12} = [0 \quad 0], \Sigma_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ve $\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ şeklinde parçalanır.

Çok değişkenli normal dağılıma sahip bir sistemden türetilecek olan tüm alt sistemlerde yine normal dağılıma (tek değişkenli veya çok değişkenli) sahip olacağından, $\underline{X}_1 \sim N(5, 1)$ ve $\underline{X}_2 \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$ olacaktır. Teo. III.4 gereğince $\Sigma_{12} = [0 \quad 0]$ olduğundan $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri bağımsızdır.

b) Önce $\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ve $\underline{X}_2 = [X_3]$ alt vektörlerinin marjinal dağılımlarını oluşturalım. Verilen parçalanmaya göre dağılımın parametreleri de parçalanacak olursa;

$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \ni \ \underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\underline{\mu}_2 = [3]$; $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \ni \Sigma_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Sigma_{21} =$ $[0 \quad 1]$ ve $\Sigma_{22} = [4]$ şeklinde parçalanır.

Çok değişkenli normal dağılıma sahip bir sistemden türetilecek olan tüm alt sistemlerde yine normal dağılıma (tek değişkenli veya çok değişkenli) sahip olacağından, $\underline{X}_1 \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ ve $\underline{X}_2 \sim N(3, 4)$ olacaktır. Teo. III.4 gereğince $\Sigma_{12} = [0 \quad 1] \neq [0]$ olduğundan $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri bağımsız değildir.

SORULAR

1. $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} : p \times 1 \ \ni \ \underline{X}_1 : p_1 \times 1$ ve $\underline{X}_2 : p_2 \times 1$ parçalanması verilsin ve $p_1 + p_2 = p$ olsun.

Buna göre;

i) $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri karşılıklı bağımsız olması için gerek ve yeter şart ya $f_{\underline{X}_1}\left(\underline{x}_1 / (\underline{X}_2 = \underline{x}_2)\right) = f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1)$ veya $f_{\underline{X}_2}\left(\underline{x}_2 / (\underline{X}_1 = \underline{x}_1)\right) = f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2)$ olmasıdır.

ii) $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri karşılıklı bağımsız ise $\Sigma_{11.2} = \Sigma_{11}$ ve $\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22}$ dir.

iii) $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri karşılıklı bağımsız ise $R_{11.2} = R_{11}$ ve $R_{22.1} = R_{22}$ dir

2. $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \cdots \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} : p \times 1 \ \ni \ \underline{X}_1 = [X_j]$ ve $\underline{X}_2 : (p-1) \times 1$ parçalanması verilsin. $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri karşılıklı bağımsız ise $\rho_{X_j, \underline{X}'_2 \underline{\beta}} = 0$ olduğunu gösteriniz?

i) $f_{\underline{X}_1}\left(\underline{x}_1/(\underline{X}_2=\underline{x}_2)\right)=\frac{f(\underline{x})}{f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2)}=\frac{f(\underline{x}_1,\underline{x}_2)}{f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2)}=\frac{f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1)f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2)}{f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2)}=f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1)$

$f_{\underline{X}_1}\left(\underline{x}_1/(\underline{X}_2=\underline{x}_2)\right)=f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1)$, $\frac{f(\underline{x}_1,\underline{x}_2)}{f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2)}=f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1)\ldots.$ $f(\underline{x}_1,\underline{x}_2)=f_{\underline{X}_1}(\underline{x}_1)f_{\underline{X}_2}(\underline{x}_2)$

olduğundan $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri karşılıklı bağımsızdır.

ii) $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri karşılıklı bağımsız olsun. Bu takdirde , $\Sigma_{12}=[0]$ dır.

$\Sigma_{11.2}=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}=\Sigma_{11}-[0]\Sigma_{22}^{-1}[0]'=\Sigma_{11}$olur.

iii) $R_{11.2}=\left(K^{1/2}\right)^{-1}\Sigma_{11.2}\left(K^{1/2}\right)^{-1}=\left(K^{1/2}\right)^{-1}\Sigma_{11}\left(K^{1/2}\right)^{-1}=R_{11}$

2. $\rho_{X_j,\underline{X}_2'\underline{\beta}}=\frac{(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{1/2}}{\sigma_j}$. $\underline{X}_1$ ve $\underline{X}_2$ alt vektörleri karşılıklı bağımsız olsun. Bu takdirde

$\Sigma_{12}=[0]$ dır. $\rho_{X_j,\underline{X}_2'\underline{\beta}}=\frac{(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{1/2}}{\sigma_j}=\frac{\left([0]\Sigma_{22}^{-1}[0]'\right)^{1/2}}{\sigma_j}=\frac{\sqrt{0}}{\sigma_j}=0$ dır.

III.6 Parametre Tahmini

$\underline{X}\sim N_p\left(\underline{\mu},\Sigma\right)$ dağılımı verilsin. Bu dağılımın parametreleri olan $\underline{\mu}$ ve Σ'yı tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanılır. Bu yöntemde amaç; bu dağılımdan rastgele çekilen n birimlik bir örnekleme ait olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapacak olan parametre değerlerini bulmaktır. Bu amaçla verilen dağılımdan rastgele çekilen n birimlik bir örneklem; $X=\left[\underline{X}_1\quad \underline{X}_2\quad \ldots\quad \underline{X}_n\right]$ olsun. Bu durumda $i=1,2,\ldots,n$ için $\underline{X}_i\sim N_p\left(\underline{\mu},\Sigma\right)$ olup, ayrıca örnek birimleri yani $\underline{X}_i$'ler birbirinden bağımsızdır. Buna göre örneklemin olabilirlik fonksiyonu;

$$L\left(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n;\ \underline{\mu},\Sigma\right)=f\left(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{\underline{X}_i}\left(\underline{x}_i\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)\right\}$$

$$=(2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)\right\}\tag{3.15}$$

olur. Bu fonksiyon sürekli ve logaritma fonksiyonu da artan bir fonksiyon olduğundan bu fonksiyonu maksimum yapan değerler aynı zamanda logaritmasını da maksimum yapacağından logaritmik olabilirlik fonksiyonu oluşturulur. Eşitlik (3.15)'de her iki tarafın ln'i alındığında logaritmik olabilirlik fonksiyonu;

$$lnL=-\frac{np}{2}ln(2\pi)-\frac{n}{2}ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)\tag{3.16}$$

bulunur.

$\underline{\mu}$ **parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi:** Eşitlik (3.16)'nın her iki tarafının $\underline{\mu}$ parametresine göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek çözümleme yapalım.

$$\left.\frac{\partial lnL}{\partial \underline{\mu}}\right]_{\substack{\underline{\mu}=\underline{\hat{\mu}} \\ \Sigma=\hat{\Sigma}}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2\hat{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x}_i - \underline{\hat{\mu}}\right)(-1) = \underline{0} \Rightarrow \hat{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i - n\,\underline{\hat{\mu}}\right) = \underline{0} \Rightarrow$$ Her iki tarafı soldan $\hat{\Sigma}$ matrisi ile çarpalım.

$$\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i - n\,\underline{\hat{\mu}}\right) = \hat{\Sigma}\,\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i - n\,\underline{\hat{\mu}} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\hat{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i = \underline{\overline{X}}$$ elde edilir.

- Kitle ortalama vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisi örnek ortalama vektörüdür.

Σ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi: Eşitlik (3.16)'nın her iki tarafının Σ parametresine göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek çözümleme yapalım.

$$\left.\frac{\partial lnL}{\partial \Sigma}\right]_{\substack{\underline{\mu}=\underline{\hat{\mu}} \\ \Sigma=\hat{\Sigma}}} = -\frac{n}{2}\hat{\Sigma}^{-1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}(-\mathbf{1})\frac{\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)'\left(\underline{x}_i-\underline{\mu}\right)}{\Sigma\,\Sigma}$$ (sonuç matris olması için pay kısmında transpoz yer değiştirir)

$$\left.\frac{\partial lnL}{\partial \Sigma}\right]_{\substack{\underline{\mu}=\underline{\hat{\mu}} \\ \Sigma=\hat{\Sigma}}} = -\frac{n}{2}\hat{\Sigma}^{-1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \hat{\Sigma}^{-1}\left(\underline{x}_i - \underline{\hat{\mu}}\right)\left(\underline{x}_i - \underline{\hat{\mu}}\right)'\hat{\Sigma}^{-1} = [0]$$

Her iki tarafı 2 ile çarpalım ve $\underline{\hat{\mu}} = \underline{\overline{X}}$ yazalım.

$$-n\hat{\Sigma}^{-1} + \hat{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)'\right]\hat{\Sigma}^{-1} = [0],$$ Her iki tarafı hem soldan hem de sağdan $\hat{\Sigma}$ matrisi ile çarpalım.

$$-n\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Sigma} + \hat{\Sigma}\,\hat{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)'\right]\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}[0]\,\hat{\Sigma} \Rightarrow$$

$$-n\hat{\Sigma} + \sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)' = [0] \Rightarrow \hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)\left(\underline{x}_i - \underline{\overline{X}}\right)' = S_n$$ elde edilir.

- Kitle varyans kovaryans matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisi S_n örnek varyans kovaryans matrisidir.

✓ $\underline{\mu}$ parametresinin bir nokta tahmin edicisi $\underline{\hat{\mu}} = \underline{\overline{X}}$ (örnek ortalama vektörü) olup, $E\left(\underline{\overline{X}}\right) = \underline{\mu}$ dır. Yani yansızlık özelliğini sağlar (gösteriniz?).

- ✓ Σ parametresinin bir nokta tahmin edicisi $\hat{\Sigma} = S_n$ (örnek varyans kovaryans matrisi) olup, $E(S_n) \neq \Sigma$ dır. Yani S_n tahmin edicisi Σ parametresi için bir yanlı tahmin edicidir (Gösteriniz? Ayrıca Σ parametresi için bir yansız tahmin edici bulanabilir mi araştırınız? Eğer bulunabilirse bu yansız tahmin ediciyi belirtiniz?)
- ✓ $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \ldots$ ln $(|\Sigma|)$=ln$(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21})\ldots.$
- ✓ $\frac{\partial \ln (|\Sigma|)}{\partial \Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{22}}{|\Sigma|} & -\frac{\sigma_{21}}{|\Sigma|} \\ -\frac{\sigma_{12}}{|\Sigma|} & \frac{\sigma_{11}}{|\Sigma|} \end{bmatrix}$=$\Sigma^{-1}$olur.

III.6.1 Örnek Ortalama Vektörünün Dağılımı

$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımından rastgele çekilen n birimlik bir örneklem $\underline{X}_1, \quad \underline{X}_2, \quad \ldots \quad ,\underline{X}_n$ ve bu örneklemin örnek ortalama istatistiği $\overline{\underline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{X}_i$ olsun.

$H' = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} : 1 \times n$ ve $X = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \ldots & \underline{X}_n \end{bmatrix} : p \times n$ olmak üzere $\underline{Y} = XH : p \times 1$ dönüşümünü tanımlayalım.

$$\underline{Y} = XH = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \ldots & \underline{X}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\left(\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \cdots + \underline{X}_n\right) = \overline{\underline{X}}$$ dır. $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$\underline{X}_i \sim N_p\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımlı ve bağımsız olup, $\underline{Y} = XH = \overline{\underline{X}}$ örnek ortalaması $\underline{X}_i$'lerin bir doğrusal fonksiyonu olduğundan $\underline{Y} = XH = \overline{\underline{X}} \sim N_p\left(E\left(\underline{Y}\right), \mathrm{Cov}\left(\underline{Y}\right)\right)$ olacaktır. Burada

$$E\left(\underline{Y}\right) = E(XH) = E(X)H = E\begin{bmatrix} \underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \ldots & \underline{X}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left(\underline{X}_1\right) & E\left(\underline{X}_2\right) & \ldots & E\left(\underline{X}_n\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\mu} & \underline{\mu} & \dots & \underline{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\left(n\,\underline{\mu}\right) = \underline{\mu} \;\Rightarrow\; E(\underline{Y}) = E(\underline{\overline{X}}) = \underline{\mu}$$ elde edilir.

$$\mathrm{Cov}(\underline{Y}) = \mathrm{Cov}(XH) = H'Cov(X)H = H'Cov\begin{bmatrix} \underline{X}_1 & \underline{X}_2 & \dots & \underline{X}_n \end{bmatrix}H$$

$$= H'\begin{bmatrix} Cov(\underline{X}_1) & Cov(\underline{X}_1, \underline{X}_2) & \cdots & Cov(\underline{X}_1, \underline{X}_n) \\ Cov(\underline{X}_2, \underline{X}_1) & Cov(\underline{X}_2) & \cdots & Cov(\underline{X}_2, \underline{X}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(\underline{X}_n, \underline{X}_1) & Cov(\underline{X}_n, \underline{X}_2) & \cdots & Cov(\underline{X}_n) \end{bmatrix} H$$

$$= H'\begin{bmatrix} \Sigma & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & \Sigma & \cdots & [0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & \cdots & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Sigma}{n} \\ \frac{\Sigma}{n} \\ \vdots \\ \frac{\Sigma}{n} \end{bmatrix} = \frac{n\Sigma}{n^2} = \frac{1}{n}\Sigma \;\Rightarrow$$

$\mathrm{Cov}(\underline{Y}) = \mathrm{Cov}(\,\underline{\overline{X}}\,) = \frac{1}{n}\Sigma$ elde edilir. Sonuç olarak örnek ortalama vektörünün dağılımı

$\underline{\overline{X}} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \frac{1}{n}\Sigma\right)$ şeklinde bulunur.

Örnek III.12 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımından rastgele çekilen n birimlik bir örneklemin örnek ortalama vektörü $\underline{\overline{X}}$ olsun. $\underline{Z_n} = \sqrt{n}\,\underline{\overline{X}}$ şeklinde tanımlanan rastgele vektörün dağılımını bulunuz?

Çözüm: $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımı verilsin. $\underline{\overline{X}}$ istatistiği bu dağılımdan rastgele çekilen n birimlik bir örnekleme ait örnek ortalama vektörü olsun. O zaman $\underline{\overline{X}} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \frac{1}{n}\Sigma\right)$ olduğu biliniyor. Şimdi $\underline{Z_n} = \sqrt{n}\,\underline{\overline{X}}$ rastgele vektörünü ele alalım. Bu vektör, $\underline{\overline{X}}$ istatistiğinin bir doğrusal fonksiyonudur. Normal dağılıma sahip rastgele vektörlerin doğrusal fonksiyonları da normal dağılıma sahip olacağından; $\underline{Z_n} \sim N_p\left(E(\underline{Z_n})\,, Cov(\underline{Z_n})\right)$ yazılabilir, öyle ki burada;

$$E(\underline{Z_n}) = E(\sqrt{n}\,\underline{\overline{X}}) = \sqrt{n}E(\underline{\overline{X}}) = \sqrt{n}\,\underline{\mu}$$

$Cov(\underline{Z_n}) = Cov(\sqrt{n}\,\underline{\overline{X}}) = nCov(\underline{\overline{X}}) = n \times \frac{1}{n}\Sigma = \Sigma$ olur. Böylece $\underline{Z_n} = \sqrt{n}\,\underline{\overline{X}} \sim N_p\left(\sqrt{n}\,\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ olur.

Örnek III.13 $p = 2$ için $\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$ olmak üzere ρ_{X_1,X_2} (X_1 *ile* X_2 değişkenleri arasındaki korelasyon) biliniyorsa, o zaman $\overline{X}_1$ve $\overline{X}_2$ örnek ortalamaları arasındaki korelasyon $\rho_{\overline{X}_1.\overline{X}_2}$ olmak üzere, $\rho_{\overline{X}_1.\overline{X}_2} = \rho_{X_1,X_2}$ olduğunu gösteriniz?

Çözüm: : $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı verilsin, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ ve $\rho_{X_1,X_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ olsun. Bu dağılımdan rastgele çekilen n birimlik örneklemin örnek ortalama vektörü için;

$\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\underline{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma\right)$ olduğunu biliyoruz. Burada $Cov\left(\underline{\overline{X}}\right) = \frac{1}{n}\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{n} & \frac{\sigma_{12}}{n} \\ \dots & \frac{\sigma_{22}}{n} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\rho_{\overline{X}_1.\overline{X}_2} = \dfrac{\frac{\sigma_{12}}{n}}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \times \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\frac{\sigma_{12}}{n}}{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{n}} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \rho_{X_1,X_2}$ elde edilir.

SORU: $\underline{X} \sim N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 16 \end{bmatrix}$ olsun. Bu dağılımdan 25 birimlik bir örnek çekildiğini kabul edelim.

a) $\underline{a} = [2 \quad -2 \quad 3]$ olmak üzere $Y = \underline{a}\ \overline{\underline{X}}$ rastgele değişkeni için $P(Y \leq 35), P(20 \leq Y \leq 30)$ ve $P(Y \geq 30)$ olasılıklarını hesaplayınız?

b) $\underline{a} = [5 \quad 3 \quad 8]$ ve $\underline{Z}_n = 5\,\overline{\underline{X}}$ olmak üzere $Y = \underline{a}\,\underline{Z}_n$ rastgele değişkeni için $P(Y \leq 300)$,

$P(200 < Y < 300)$ ve $P(Y > 200)$ olasılıklarını hesaplayınız?