T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK I DERSİ

DOÇ. DR. YÜKSEL ÖNER

7. Hafta

özenilen üniversite

III.7 Karesel Formların Dağılımı

$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f\left(\underline{x}\right) = kexp\left\{-\frac{1}{2}Q\left(\underline{x}\right)\right\} \ni$ $Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)$ şeklindedir. Burada $\underline{X}$ çok değişkenli normal dağılıma sahip bir rastgele vektör olduğundan bunun bir fonksiyonu olan $Q\left(\underline{x}\right) > 0$ değerlerini alan bir rastgele karesel formdur. Bu türden karesel formların dağılımı ile ilgilenebiliriz.

Teorem III.5 $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımına sahip iken $Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right) \sim \chi_p^2$ dir.

İspat: (Hatırlatma: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$ dir. Burada normal dağılım gereğince X rastgele değişkeninin ve böylece Z rastgele değişkeninin alabileceği değerler kümesi $(-\infty, +\infty)$ aralığı iken Z^2 değişkenin dolayısıyla Ki-Kare dağılımının alabileceği değerler kümesi $[0, +\infty)$ aralığıdır. Buna göre her standart normal değişkenin karesi 1 serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımı verecektir.

Şimdi $i = 1, 2, \ldots, n$ için $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı, bağımsız rastgele değişkenler olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots, n$ için $Z_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ dağılımlı ve bağımsız olup, $i = 1, 2, \ldots, n$ için $Z_i^2 = \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$ ve bağımsız olur. Bağımsız Ki-Kare rastgele değişkenlerinin toplamı da yeni bir Ki-Kare değişkeni vereceğinden $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$ olacaktır.**)**

$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ olduğundan $j = 1, 2, \ldots, p$ için $X_j \sim N\left(\mu_j, \sigma_{jj}\right)$ dir. Ancak; $j \neq k = 1, 2, \ldots, p$ için $Cov\left(X_j, X_k\right) = \sigma_{jk}$ bilinmediğinden değişkenlerin bağımsızlığı hakkında bilgiye sahip değiliz. Bu yüzden $Q\left(\underline{x}\right)$ karesel formunun dağılımını oluşturmada bu karesel formu tanımlayan Σ^{-1} matrisinin spektral ayrışımından yararlanırız. Kabul edelim ki Σ matrisinin özdeğer-özvektör çiftleri $\left(\lambda_j, \underline{e}_j\right), (j = 1, 2, \ldots, p)$ olsun. Bu durumda Σ^{-1} matrisinin özdeğer-özvektör çiftleri $\left(\frac{1}{\lambda_j}, \underline{e}_j\right), (j = 1, 2, \ldots, p)$ olacaktır. Böylece Σ^{-1} matrisinin spektral ayrışımı $\Sigma^{-1} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j} \underline{e}_j \underline{e}'_j$ olup, bu değer $Q\left(\underline{x}\right)$ karesel formunda yerine yazılsın. Bu durumda

$$Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)'\left[\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j} \underline{e}_j \underline{e}'_j\right]\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j}\left[\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \underline{e}_j\right]\left[\underline{e}'_j\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right] = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j}\left[\underline{e}'_j\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right]^2 = \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \underline{e}'_j\left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)\right]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{p} Z_j^2 \tag{3.17}$$

yazılabilir. Burada $Z_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \underline{e}'_j \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)$ $, j = 1, 2, \dots, p$ dir. Şimdi

$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{bmatrix} : p \times 1$ ve $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underline{e}'_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underline{e}'_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underline{e}'_p \end{bmatrix} : p \times p$ dersek $\underline{Z} = A\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)$ yazılır. Burada $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$

olduğundan $\underline{X} - \underline{\mu} \sim N_p\left(\underline{0}, \Sigma\right)$ ve böylece $\underline{Z} = A\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) \sim N_p\left(\underline{0}, A\Sigma A'\right)$ elde edilir. Elde edilen bu son dağılımın varyans-kovaryans matrisini değerlendirmek için A matrisinin değeri ile Σ matrisinin spectral ayrışımı kullanılacak olursa;

$Cov(\underline{Z}) = A\Sigma A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underline{e}'_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underline{e}'_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underline{e}'_p \end{bmatrix} \left[\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \underline{e}_j \underline{e}'_j\right] A'$, ($\underline{e}'_j \underline{e}_k = \begin{cases} 1 & , \quad j = k \\ 0 & , \quad j \neq k \end{cases}$ özelliği kullanılırsa)

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underline{e}'_1\left(\lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}'_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}'_2 + \cdots + \lambda_p \underline{e}_p \underline{e}'_p\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underline{e}'_2\left(\lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}'_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}'_2 + \cdots + \lambda_p \underline{e}_p \underline{e}'_p\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underline{e}'_p\left(\lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}'_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}'_2 + \cdots + \lambda_p \underline{e}_p \underline{e}'_p\right) \end{bmatrix} A' =$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, \underline{e}'_1 \\ \sqrt{\lambda_2}\, \underline{e}'_2 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_p}\, \underline{e}'_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underline{e}_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \underline{e}_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \underline{e}_p \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_p$ elde edilir. Böylece $\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{bmatrix} = A\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) \sim N_p\left(\underline{0}, I_p\right)$ olur. Bu sonuca göre $, j = 1, 2, \dots, p$ için $Z_j \sim N(0, 1)$ ve $j \neq k = 1, 2, \dots, p$ için $Cov\left(Z_j, Z_k\right) = 0$ olduğu söylenebilir. O halde $, j = 1, 2, \dots, p$ için $Z_j \sim N(0, 1)$ ve bağımsız rastgele değişkenlerdir. Bu sebeple $j = 1, 2, \dots, p$ için ${Z_j}^2 \sim \chi_1^2$ ve bağımsızdır. O zaman $\sum_{j=1}^{p} Z_j^2 \sim \chi_p^2$ elde edilir.

Sonuç olarak Eşitlik (3.17)'den $Q(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{\mu})' \ \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) = \sum_{j=1}^{p} Z_j^2 \sim \chi_p^2$ bulunur.

Sonuç III.3 $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımından rastgele çekilen n birimlik bir örneklemin örnek ortalama vektörü $\overline{\underline{X}} \sim N_p\left(\underline{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma\right)$ dağılımına sahip ve olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$f(\overline{\underline{x}}) = k exp\left\{-\frac{1}{2}Q(\overline{\underline{x}})\right\}$ öyle ki burada $k = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\left|\frac{1}{n}\Sigma\right|^{1/2}}$ bir sabit ve

$Q(\overline{\underline{x}}) = (\overline{\underline{x}} - \underline{\mu})' \left(\frac{1}{n}\Sigma\right)^{-1} (\overline{\underline{x}} - \underline{\mu}) = n(\overline{\underline{x}} - \underline{\mu})' \ \Sigma^{-1} (\overline{\underline{x}} - \underline{\mu}) \sim \chi_p^2$ dir.

Örnek:III.14 $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımı için $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ olduğunda $Q(\underline{x})$ karesel formunu ifade ediniz?

Çözüm: $Q(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{\mu})' \ \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) = [x_1 - \mu_1 \quad x_2 - \mu_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$

$= \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = c$ ($c > 0$ olup, bu denklem merkezi (μ_1, μ_2) noktasında olan bir elips denklemi verir. Elipsin eksen uzunlukları ise σ_1 ve σ_2 ile orantılıdır. Eğer $\mu_1 = 0$ ve $\mu_2 = 0$ alınırsa, denklem

$Q(\underline{x}) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{x_1^2}{\sigma_{11}} + \frac{x_2^2}{\sigma_{22}} = c$ şekline dönüşür, bu yeni denklem ise merkezi $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ noktasında olan bir elips denklemidir.

Şimdi genel durumu ($p > 2$) dikkate alırsak $c > 0$ olmak üzere;

$Q(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{\mu})' \ \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) = c$ eşitliği p-boyutlu uzayda merkezi $\underline{\mu} : p \times 1$ noktası olan bir elipsoid tanımlar. Eğer $c > 0$ sayısı yerine α önem seviyesinde $\chi_{p;\alpha}^2$ kritik değeri alınırsa;

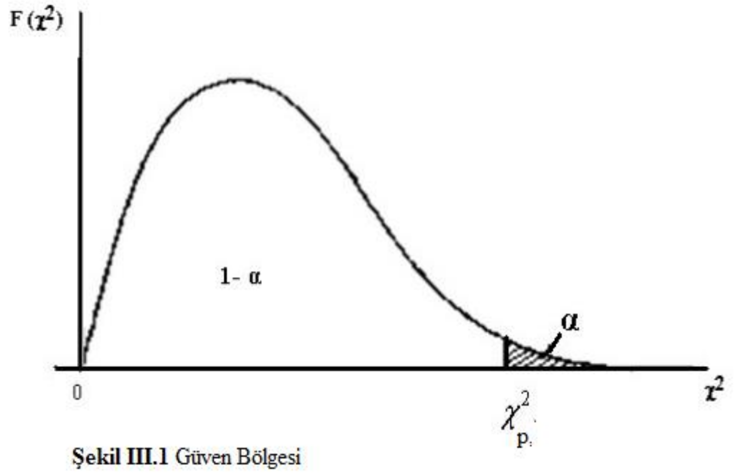
$Q(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{\mu})' \ \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) = \chi_{p;\alpha}^2$ yazılır. Buna göre:

$P\left[(\underline{x} - \underline{\mu})' \ \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) > \chi_{p;\alpha}^2\right] = \alpha$ veya

$P\left[\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right) \leq \chi^2_{p;\alpha}\right] = 1-\alpha$ eşitlikleri yazılabilir. İkinci eşitlikte olasılığı hesaplanan olayı tanımlayan eşitsizlik ifadesi güven bölgesi olarak adlandırılır ve G ile gösterilir. Buna göre güven bölgesi;

$$G:\ Q(\underline{x}) = \left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right) \leq \chi^2_{p;\alpha} \tag{3.18}$$

olup, Şekil III.1'de gösterildiği gibidir.



Şekil III.1 Güven Bölgesi

III.7.1 Karesel Formun (Güven Bölgesinin) Değerlendirilmesi

$Q(\underline{x}) = \left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)$ ve $Q(\underline{\overline{x}}) = n\left(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}\right)$ karesel formlarının ya da bu karesel formlardan türetilecek olan güven bölgelerinin değerlendirilmesi şu şekilde yapılır.

i) Her hangi bir gözlem vektörünün verilen bir $N_p\left(\underline{\mu},\Sigma\right)$ dağılımına ait olup olmaması durumunun incelenmesinde Eşitlik (3.18) ile tanımlanan güven bölgesi kullanılır.

$\underline{X}_i : p \times 1$ bir gözlem vektörü olsun. Bu gözlem vektörünün $N_p\left(\underline{\mu},\Sigma\right)$ dağılımına ait olup olmadığına;

$$H_0: \underline{X}_i \in G$$
$$H_1: \underline{X}_i \notin G \tag{3.19}$$

hipotezleri test ederek karar verilebilir. Bu durumda dağılımın ortalama vektörü $\left(\underline{\mu}\right)$ ve varyans-kovaryans matrisi (Σ) biliniyordur. Eğer karesel formun $\underline{X}_i$ noktasındaki değeri için $Q(\underline{x}_i) \leq \chi^2_{p;\alpha}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir ve $\underline{X}_i$ gözlem vektörünün $N_p\left(\underline{\mu},\Sigma\right)$ dağılımına ait olma olasılığının $(1-\alpha)$ olduğu şeklinde değerlendirilir. Eğer $Q(\underline{x}_i) > \chi^2_{p;\alpha}$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve $\underline{X}_i$ gözlem vektörünün $N_p\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımına ait olma olasılığı α'dır şeklinde değerlendirilir.

ii) Her hangi bir örneklemin verilen bir $N_p\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımına ait olup olmaması durumunun incelenmesinde kullanılacak olan karesel form ve güven bölgesi Eşitlik (3.20)'de verildiği gibidir.

$$G:\; Q(\underline{\overline{x}}) = n\left(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}\right)'\,\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}\right) \le \chi^2_{p;\alpha} \tag{3.20}$$

n birimlik bir örneklem için örnek ortalama vektörü $\underline{\overline{X}}$ olmak üzere, bu örneklemin $N_p\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımına ait olup olmadığına;

$H_0{:}\,\underline{\overline{X}} \in G$

$H_1{:}\,\underline{\overline{X}} \notin G$ (3.21)

hipotezleri test ederek karar verilebilir. Bu durumda dağılımın ortalama vektörü $\left(\underline{\mu}\right)$ ve varyans-kovaryans matrisi (Σ) biliniyordur. Eğer $Q(\underline{\overline{x}}) \le \chi^2_{p;\alpha}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir ve örneklemin $N_p\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımına ait olma olasılığı $(1-\alpha)$'dır şeklinde değerlendirilir. Eğer $Q(\underline{\overline{x}}) > \chi^2_{p;\alpha}$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve örneklemin $N_p\left(\underline{\mu}\,,\Sigma\right)$ dağılımına ait olma olasılığı α'dır şeklinde değerlendirilir.

iii) n birimlik bir örneklemin örnek ortalama vektörü $\underline{\overline{X}}$ ve $\underline{\mu}_0 \in IR^p$ olmak üzere;

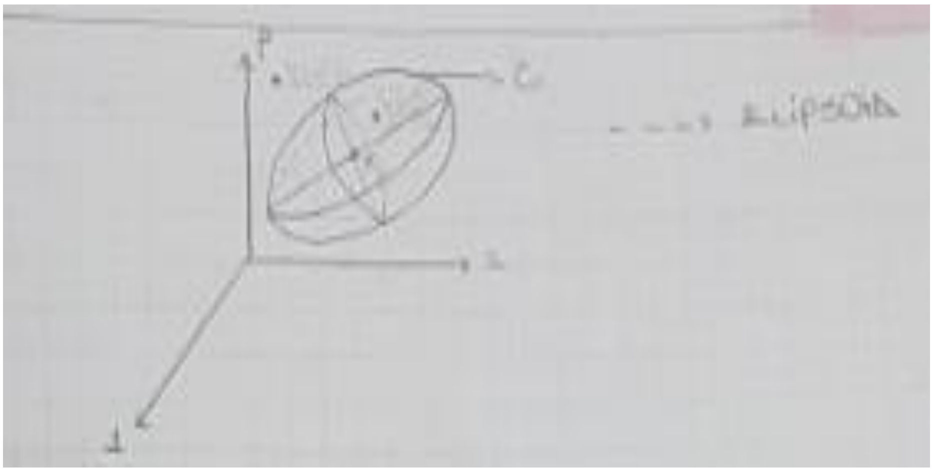
$H_0{:}\,\underline{\mu} = \underline{\mu}_0$

$H_1{:}\,\underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$ (3.21)

hipotezleri test edilerek örneklemin $N_p\left(\underline{\mu}_0\,,\Sigma\right)$ dağılımına ait olup olmadığının incelenmesinde Eşitlik (3.20) ile verilen güven bölgesi kullanılabilir. Bu durumda $\underline{\mu}$ bilinmiyor, fakat $\underline{\mu}_0$ ve Σ biliniyordur. H_0 doğru iken karesel formun alabileceği değer;

$Q(\underline{\overline{x}}) = n\left(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}_0\right)'\,\Sigma^{-1}\left(\underline{\overline{x}}-\underline{\mu}_0\right)$ olup, eğer $Q(\underline{\overline{x}}) \le \chi^2_{p;\alpha}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir ve bu örneklem $N_p\left(\underline{\mu}_0\,,\Sigma\right)$ dağılımına aittir denir. Eğer $Q(\underline{\overline{x}}) > \chi^2_{p;\alpha}$ ise H_0 hipotezi ret edilir ve örneklemin $N_p\left(\underline{\mu}_0\,,\Sigma\right)$ dağılımına ait olmadığı söylenir.

Burada güven bölgelerini ifade eden (3.18) ve (3.20) ifadelerinin eşitlik durumlarında elde edilen denklemler $p > 2$ olduğundan birer elipsoid denklemi adını alırlar. Genel olarak bir elipsoid grafiği Şekil III.2'de verilmektedir.



Şekil III.2 Elipsoid Grafiği

Örnek III.15 $p = 1$ iken $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımından türetilen $Q\left(\underline{x}\right)$ karesel formunun dağılımını bulunuz?

Çözüm: $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right)$ dağılımından türetilen karesel form $Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \, \Sigma^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)$ şeklindedir. $p = 1$ için $\underline{X} = X \sim N\left(\underline{\mu} = \mu\,, \Sigma = \sigma^2\right)$ olup, karesel form;

$Q(X) = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = Z^2 \sim \chi_1^2$ olur.

Örnek III.16 $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu}\,, \Sigma\right) \ni \underline{\mu} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. $\underline{X}_i = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$gözleminin verilen dağılıma ait olup olmadığını %5 önem seviyesinde kontrol ediniz?

Çözüm:

$H_0 : \underline{X}_i \in G$

$H_1 : \underline{X}_i \notin G$

Güven bölgesi Eşitlik (3.18) gereğince; $G \, : \, Q\left(\underline{x}\right) = \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right)' \, \Sigma^{-1} \left(\underline{x} - \underline{\mu}\right) \leq \chi_{p;\alpha}^2$ dir. $\underline{X}_i = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ gözlemi için karesel formun alabileceği değer;

$$Q\left(\underline{X}_i\right) = \left(\underline{X}_i - \underline{\mu}\right)' \, \Sigma^{-1} \left(\underline{X}_i - \underline{\mu}\right) = \begin{bmatrix} 5-(-2) & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5-(-2) \\ 1-5 \end{bmatrix}$$

$= [7 \quad -4]\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix} = [2 \quad 1]\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix} = 10$

$\alpha = 0{,}05$ ve $p = 2$ için $\chi^2_{p;\alpha} = \chi^2_{2;0{,}05} = 5{,}99$ olup, 10>5,99 yani $Q(\underline{X}_i) > \chi^2_{p;\alpha}$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Bu durumda $\underline{X}_i = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$ gözlemi $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu} = \begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix}5 & -3\\-3 & 2\end{bmatrix}\right)$ dağılımına ait değildir, ya da bu dağılıma ait olma olasılığı %5 dir.

Örnek III.17 $\underline{X} \sim N_2\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\underline{x}) = k exp\left\{-\frac{1}{2}Q(\underline{x})\right\}$ öyle ki $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_1 + 12$ olsun. Buna göre;

a) Bu dağılımdan çekilen 10 birimlik örneklem için örnek ortalama vektörü $\overline{\underline{X}} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$ ise kitle ortalama vektörünün $\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$ olup olamayacağına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

b) 10 birimlik bir örneklem için örnek ortalama vektörü $\overline{\underline{X}} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$ ise bu örneklemin verilen dağılımdan çekilip çekilmediğine %5 önem seviyesinde karar veriniz?

c) $\underline{X}_i = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ gözleminin verilen dağılıma ait olup olmadığına %5 hata ile karar veriniz?

Çözüm:

a) $H_0: \underline{\mu} = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$, $\left(\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}\right)$

$H_1: \underline{\mu} \neq \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$

Güven bölgesi Eşitlik (3.20) gereğince $G: Q(\overline{\underline{x}}) = n\left(\overline{\underline{x}} - \underline{\mu}\right)' \Sigma^{-1}\left(\overline{\underline{x}} - \underline{\mu}\right) \leq \chi^2_{p;\alpha}$ olup, H_0 doğru iken karesel formun alabileceği değer;

$Q(\overline{\underline{x}}) = n\left(\overline{\underline{x}} - \underline{\mu}_0\right)' \Sigma^{-1}\left(\overline{\underline{x}} - \underline{\mu}_0\right)$ eşitliği ile bulunur. Burada $n = 10$, $\overline{\underline{X}} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$, $\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$ ve $\overline{\underline{x}} - \underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ dir. Σ matrisi ve böylece Σ^{-1} bilinmiyor, ama dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu bilindiğinden bu fonksiyona ait karesel formdan Σ^{-1} matrisi bulunabilir. Dağılıma ait karesel form; $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_1 + 12$ olup, bu karesel formdaki ikinci dereceden terimlerin katsayıları kullanılarak; $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix}3 & -4\\-4 & 6\end{bmatrix}$ olarak bulunur. Bu sonuçları son eşitlikte yerlerine yazalım.

$Q(\overline{\underline{x}}) = 10[2 \quad -2]\begin{bmatrix}3 & -4\\-4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} = 10[14 \quad -20]\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} = 680$

$\alpha = 0{,}05$ ve $p = 2$ için $\chi^2_{p;\alpha} = \chi^2_{2;0{,}05} = 5{,}99$ olup, böylece 680 > 5,99 olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre söz konusu örneklemin çekildiği kitlenin ortalama vektörü $\underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$ olamaz.

b) Örneklemin verilen dağılıma ait olup olmadığına karar verebilmek için örnek ortalamasının güven bölgesinde olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Bunun için test edilecek hipotezler;

$H_0: \underline{\overline{X}} \in G$

$H_1: \underline{\overline{X}} \notin G$

olup, güven bölgesi Eşitlik (3.20)' de verildiği gibidir.

$G: Q(\underline{\overline{x}}) = n\left(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}\right)' \, \Sigma^{-1} \left(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}\right) \leq \chi^2_{p;\alpha}$

Dağılımın parametrelerine ihtiyaç olduğundan verilen dağılıma ait karesel form yardımıyla önce parametreleri bulalım.

$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ olduğundan $\Sigma = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix}$ bulunur.

$\underline{\mu} = \left[\frac{\partial Q(x)}{\partial \underline{x}} = \underline{0}\right]$ denkleminin çözümü ile bulunur. $Q(\underline{x}) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_1 + 12$ iken

$\frac{\partial Q(x)}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 6x_1 - 8x_2 - 4 \\ -8x_1 + 12x_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ buradan $2\,\Sigma^{-1}\underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve böylece

$\underline{\mu} = \underline{x} = \frac{1}{2}\,\Sigma\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ bulunur. Bulunan bu sonuçları güven bölgesinde yerlerine koyalım; $\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$Q(\underline{\overline{x}}) = n\left(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}\right)' \, \Sigma^{-1} \left(\underline{\overline{x}} - \underline{\mu}\right) = 10[-1 \quad 1]\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10[-7 \quad 10]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 170$$

$\alpha = 0{,}05$ ve $p = 2$ için $\chi^2_{p;\alpha} = \chi^2_{2;0{,}05} = 5{,}99$ olup, böylece 170 > 5,99 olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre bu örneklemin verilen dağılımdan çekildiği söylenemez.

c) Örnek III.16 ile benzer çözüme sahip (siz çözünüz)