T.C.

**ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ**

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

# MATEMATİK II DERSİ

**PROF. DR. YÜKSEL ÖNER**

## 2. Hafta

özenilen üniversite

### 4.8 Parametrik İfadeli Fonksiyonun Türevi

**Tanım:4.6** $A \subset IR,\ f{:}A \rightarrow\ IR$ fonksiyonu $y = f(x)$ şeklinde verilsin. Bu fonksiyonun $t \in IR$ bir parametre olmak üzere;

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilmesine parametrik ifadeli fonksiyon denir.

Eşitlik (1)'e fonksiyonun parametrik denklemleri adı verilir. Burada $g$ ve $h$, $t$ parametresinin fonksiyonlarıdır. Eğer $g$ ve $h$ fonksiyonları $t$ parametresine göre türevlenebilirse, bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonu da $x$'e göre türevlenebilirdir. Öyle ki;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{g'(t)}\ , \quad g'(t) \neq 0 \tag{4.18}$$

olur. Eşitlik (4.18) ile verilen ifadeye, Eşitlik (4.17) ile verilen parametrik ifadeli fonksiyonun birinci mertebeden türevi denir. İkinci mertebeden türev ise;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{h'(t)}{g'(t)}\right) = \frac{d\left(\frac{h'(t)}{g'(t)}\right)}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{h''(t)g'(t) - h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^2} \times \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{h''(t)g'(t) - h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^2} \times \frac{1}{g'(t)} = \frac{h''(t)g'(t) - h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}, g'(t) \neq 0 \tag{4.19}$$

olur.

**Örnek:4.28** Verilen fonksiyonlar için istenilenleri hesaplayınız?

**a)** $\begin{cases} x = g(t) = \sqrt{t} \\ y = h(t) = \sqrt{t-1} \end{cases}$ için $\frac{dy}{dx} =?$ ve $\frac{d^2y}{dx^2} =?$

**b)** $\begin{cases} x = g(\theta) = a(\theta - sin\theta) \\ y = h(\theta) = a(1 - cos\theta) \end{cases}$ için $\frac{dy}{dx} =?$ ve $\frac{d^2y}{dx^2} =?$ Ayrıca bu türevlerin $\theta = \pi$ noktasındaki değerlerini bulunuz?

**c)** $\begin{cases} x = g(t) = e^t cost \\ y = h(t) = e^t cost \end{cases}$ şeklinde verilen y=f(x) fonksiyonunun $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$ eşitliğini sağladığını gösteriniz?

**Çözüm a)** $x = g(t) = \sqrt{t} \Rightarrow g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \ g''(t) = -\frac{2\frac{1}{2\sqrt{t}}}{4t} = -\frac{1}{4t\sqrt{t}} = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}}$

$y = h(t) = \sqrt{t-1} \Rightarrow h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} \quad \Rightarrow \ h''(t) = -\frac{2\frac{1}{2\sqrt{t-1}}}{4(t-1)} = -\frac{1}{4(t-1)\sqrt{t-1}} = -\frac{1}{4\sqrt{(t-1)^3}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{h'(t)}{g'(t)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t-1}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} \times \frac{2\sqrt{t}}{1} = \sqrt{\frac{t}{t-1}}$ iken

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h''(t)g'(t) - h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3} = \frac{-\frac{1}{4\sqrt{(t-1)^3}} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t-1}} \times \left(-\frac{1}{4\sqrt{t^3}}\right)}{\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]^3} = \frac{\frac{1}{8\sqrt{t^3}\sqrt{t-1}} - \frac{1}{8\sqrt{t}\sqrt{(t-1)^3}}}{\frac{1}{8\left(\sqrt{t}\right)^3}} = \frac{t-1-t}{8\sqrt{t^3}\sqrt{(t-1)^3}} \times$$

$$\frac{8\left(\sqrt{t}\right)^3}{1} = -\frac{1}{\sqrt{(t-1)^3}}$$ bulunur.

**b)** $x = g(\theta) = a(\theta - sin\theta) \Rightarrow g'(\theta) = a(1 - cos\theta) \Rightarrow g''(\theta) = asin\theta$

$y = h(\theta) = a(1 - cos\theta) \Rightarrow h'(\theta) = asin\theta \Rightarrow h''(\theta) = acos\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h'(\theta)}{g'(\theta)} = \frac{asin\theta}{a(1-cos\theta)} = \frac{sin\theta}{(1-cos\theta)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\mathrm{I}_{\vartheta=\pi} = \frac{sin\pi}{1-cos\pi} = \frac{0}{1+1} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h''(\theta)g'(\theta) - h'(\theta)g''(\theta)}{[g'(\theta)]^3} = \frac{acos\theta a(1-cos\theta) - asin\theta asin\theta}{[a(1-cos\theta)]^3} = \frac{a^2cos\theta - a^2cos^2\theta - a^2sin^2\theta}{a^3(1-cos\theta)^3} =$$

$$\frac{a^2cos\theta - a^2}{a^3(1-cos\theta)^3} = \frac{-a^2(1-cos\theta)}{a^3(1-cos\theta)^3} = -\frac{1}{a(1-cos\theta)^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\mathrm{I}_{\vartheta=\pi} = -\frac{1}{a(1-cos\pi)^2} = -\frac{1}{a(1+1)^2} = -\frac{1}{4a}$$ olarak bulunur.

**c)** $x = g(t) = e^tcost \Rightarrow g'(t) = e^tcost - e^tsint = e^t(cost - sint) \Rightarrow g''(t) = e^t(cost - sint) + e^t(-sint - cost) = -2e^tsint$

$y = h(t) = e^tcost \Rightarrow h'(t) = e^tcost - e^tsint = e^t(cost - sint) \Rightarrow h''(t) = e^t(cost - sint) + e^t(-sint - cost) = -2e^tsint$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{h'(t)}{g'(t)} = \frac{e^t(cost-sint)}{e^t(cost-sint)} = 1$$ ve

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h''(t)g'(t) - h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3} = \frac{-2e^tsinte^t(cost-sint) - e^t(cost-sint)\left(-2e^tsint\right)}{[e^t(cost-sint)]^3} =$$

$$\frac{-2e^{2t}sint(cost-sint) + 2e^{2t}sint(cost-sint)}{e^{3t}(cost-sint)^3} = \frac{0}{e^{3t}(cost-sint)^3} = 0$$ bulunur.

Şimdi $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$y''(x+y)^2 = 0(e^tcost + e^tcost)^2 = 0$ ……….(i)

$2(xy' - y) = 2(e^tcost.1 - e^tcost) = 0$ ………(ii)

(i) ve (ii) eşitliklerinin sağ tarafları birbirine eşit olduğundan sol tarafları da eşit olmak zorundadır. Bu sebeple $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$ eşitliği doğrudur.

### 4.9 Kapalı Fonksiyonun Türevi

**Tanım:4.7** $x$ ile $y$ değişkenleri arasındaki bağıntı $F(x, y) = 0$ şeklinde verilmişse, bu $F(x, y)$ fonksiyonuna kapalı olarak verilmiş bir fonksiyon veya kısaca Kapalı Fonksiyon denir.

Kapalı formda verilen bir fonksiyonun $x$'e göre (birinci mertebeden) türevini bulmak için önce $F(x, y) = 0$ eşitliğinde her iki tarafın $x$'e göre türevi alınır ve sonra da

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dF(x,y)}{dx} \qquad (4.20)$$

hesaplanır. Sol tarafın $x$'e göre türevini alırken $y = y(x)$ formunda olduğuna dikkat edilmelidir.

Genel olarak, $F(x\,,y)=0$ için birinci mertebeden türev;

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF(x,y)}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dy}} \tag{4.21}$$

eşitliği ile bulunur. Bu eşitlikte bir değişkene göre türev alınırken diğer değişken sabit gibi düşünülür.

<u>**Örnek:4.29**</u> Kapalı formda verilen aşağıdaki fonksiyonların istenilen türevlerini bulunuz?

**a)** $F(x\,,y)=y^5+x^5-2x^3y^3-3=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=?$

**b)** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=? \quad , \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=?$

**c)** $x^3-2x^2y+2y^2-2x+3y-2=0$ ve $y(1)=1$ olduğunda $y''(1)=?$

<u>**Çözüm**</u> **a) I. Yol:** $F(x\,,y)=0$ eşitliğinde her iki tarafın $x'e$ göre türevini alarak bulma

$F(x\,,y)=y^5+x^5-2x^3y^3-3=0 \;\Rightarrow\; \frac{dF(x\,,y)}{dx}=\frac{d}{dx}(0) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}(y^5+x^5-2x^3y^3-3)=0$
$\Rightarrow 5y^4\frac{dy}{dx}+5x^4-2\left(3x^2y^3+x^33y^2\frac{dy}{dx}\right)=0 \Rightarrow (5y^4-6x^3y^2)\frac{dy}{dx}=-5x^4+6x^2y^3 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{5x^4-6x^2y^3}{5y^4-6x^3y^2}$ olarak bulunur.

**II. Yol:** Eşitlik (4.21)'i kullanma

$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF(x,y)}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dy}}=-\frac{5x^4-6x^2y^3}{5y^4-6x^3y^2}$ olarak bulunur.

**b) )** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; F(x\,,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \;\Rightarrow\; \frac{dF(x\,,y)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)=\frac{d}{dx}(0) \quad\Rightarrow$
$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{2yy'}{b^2}=\frac{2x}{a^2} \;\Rightarrow y'=\frac{b^2x}{a^2y}$ bulunur.

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)=\frac{b^2}{a^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y-xy\prime}{y^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y-x\frac{b^2x}{a^2y}}{y^2}\right)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\frac{a^2y^2-b^2x^2}{a^2y}}{y^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2y^2-b^2x^2}{a^2y^3}\right)=\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{a^2b^2\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)}{a^2y^3}\right]=-\frac{b^4}{a^2y^3}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=$$
$$-\frac{b^4}{a^2y^3}(1)=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$ olarak bulunur.

**c)** $F(x,y)=x^3-2x^2y+2y^2-2x+3y-2=0 \Rightarrow$

$\frac{dF(x\,,y)}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3-2x^2y+2y^2-2x+3y-2)=\frac{d}{dx}(0) \;\Rightarrow$

$3x^2-4xy-2x^2y'+4yy'-2+3y'=0$ ….(*)

$y(1) = 1$ (yani $x = 1$ iken $y = 1$) olduğundan, bu değerler (*) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$3 - 4 - 2y'(1) + 4y'(1) - 2 + 3y'(1) = 0 \Rightarrow 5y'(1) = 3 \;\; \Rightarrow \; y'(1) = 3/5$ dir.

Şimdi (*) eşitliğinin her iki tarafının tekrar $x'$e göre türevini alalım:

$\frac{d}{dx}(3x^2 - 4xy - 2x^2y' + 4yy' - 2 + 3y') = \frac{d}{dx}(0) \;\; \Rightarrow$

$6x - 4y - 4xy' - 4xy' - 2x^2y'' + 4y'y' + 4yy'' + 3y'' = 0 \;\Rightarrow$ Bu eşitlikte $x = 1$ iken $y(1) = 1$ ve $y'(1) = 3/5$ değerleri yerlerine yazılırsa:

$6 - 4 - \frac{12}{5} - \frac{12}{5} - 2y''(1) + \frac{36}{25} + 4y''(1) + 3y''(1) = 0 \Rightarrow 5y''(1) = \frac{24}{5} - \frac{36}{25} - 2 \;\Rightarrow$

$5y''(1) = \frac{34}{25} \;\Rightarrow\; y''(1) = \frac{34}{125}$ olarak elde edilir.

## UYGULAMA II

**I.** Aşağıda verilen parametrik ifadeli fonksiyonların istenen türevlerini bulunuz?

**1.** $\begin{cases} x = g(t) = \alpha sint - sin(\alpha t) \\ y = h(t) = \alpha cost + cos(\alpha t) \end{cases}$ için $\frac{dy}{dx}$ =?

**2.** $\begin{cases} x = g(t) = 2ln(cott) \\ y = h(t) = tant + cott \end{cases}$ için $y'$ =?

**3.** $\begin{cases} x = g(t) = acos^3t \\ y = h(t) = asin^3t \end{cases}$ için $y''$ =?

**II.** Aşağıda kapalı formda verilen fonksiyonların istenilen türevlerini bulunuz?

**1.** $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ için $y'$ =?

**2.** $lnx + e^{-(y/x)} = 0$ için $\frac{dy}{dx}$ =?

**3.** $xsiny + ysinx = 0$ için $y'$ =?

**4.** $arctany - y + x = 0$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ =?

**5.** $(a + bx)e^{(y/x)} = x$ iken $x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$ olduğunu gösteriniz?

**ÇÖZÜMLER**

**I.1.** $\begin{cases} x = g(t) = \alpha sint - sin(\alpha t) \\ y = h(t) = \alpha cost + cos(\alpha t) \end{cases}$ , $\frac{dy}{dx} = \frac{h'(t)}{g'(t)}$ ……(*)

$g'(t) = \alpha cost - \alpha cos(\alpha t) = \alpha\big(cost - cos(\alpha t)\big)$

$h'(t) = -\alpha sint - \alpha sin(\alpha t) = -\alpha\big(sint + sin(\alpha t)\big)$ , bu sonuçlar (*) eşitliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\alpha\big(sint+sin(\alpha t)\big)}{\alpha\big(cost-cos(\alpha t)\big)}=-\frac{\big(sint+sin(\alpha t)\big)}{\big(cost-cos(\alpha t)\big)}=-\frac{2sin\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)tcos\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)t}{2sin\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)tsin\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)t}=-\frac{cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)t}{sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)t}=-cot\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)t$$

bulunur.

**I.2.** $\begin{cases} x=g(t)=2ln(cott) \\ y=h(t)=tant+cott \end{cases}, \; y'=\frac{h'(t)}{g'(t)}$ ……(*)

$$g'(t)=2\frac{-\frac{1}{sin^2t}}{cott}=-2\times\frac{1}{sin^2t}\times\frac{sint}{cost}=-\frac{2}{sintcost}$$

$$h'(t)=\frac{1}{cos^2t}-\frac{1}{sin^2t}=\frac{sin^2t-cos^2t}{sin^2tcos^2t}=\frac{1-2cos^2t}{sin^2tcos^2t}$$

$y'=\frac{1-2cos^2t}{sin^2tcos^2t}\times\left(-\frac{sintcost}{2}\right)=-\frac{1-2cos^2t}{2sintcost}=\frac{2cos^2t-1}{sin(2t)}=\frac{cos(2t)}{sin(2t)}=cot(2t)$ bulunur.

**I.3.** $\begin{cases} x=g(t)=acos^3t \\ y=h(t)=asin^3t \end{cases}$ için $\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{h''(t)g'(t)-h'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}$ ……(*)

$g'(t)=3acos^2t(-sint)=-3acos^2tsint \quad\Rightarrow\quad g''(t)=-3a[2cost(-sint)sint+cos^2tcost]=-3a[cos^3t-2costsin^2t]=-3acost(cos^2t-2sin^2t)$

$h'(t)=3asin^2tcost \;\Rightarrow\; h''(t)=3a[2sintcostcost+sin^2(-sint)]=3a[2sintcos^2t-sin^3t]=3asint(2cos^2t-sin^2t)$ , bu sonuçlar (*) eşitliğinde yerlerine yazılırsa;

$$y''=\frac{3asint(2cos^2t-sin^2t)[-3acos^2tsint]-3asin^2tcost[-3acost(cos^2t-2sin^2t)]}{[-3acos^2tsint]^3}$$

$$=\frac{-9a^2cos^2tsin^2t\big(2cos^2t-sin^2t\big)+9a^2cos^2tsin^2t\big(cos^2t-2sin^2t\big)}{-27a^3cos^6tsin^3t}=$$

$\frac{-9a^2cos^2tsin^2t\big[2cos^2t-sin^2t-cos^2t+2sin^2t\big]}{-27a^3cos^6tsin^3t}=\frac{cos^2t+sin^2t}{3acos^4tsint}=\frac{1}{3acos^4tsint}$ bulunur.

**II.1.** $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ için $y'$ =?

Verilen fonksiyon kapalı formda olduğundan birinci mertebeden türevi;

$y'=-\frac{\frac{dF(x,y)}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dy}}=-\frac{2a_{11}x+2a_{12}y+2a_{13}}{2a_{12}x+2a_{22}y+2a_{23}}=-\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{12}x+a_{22}y+a_{23}}$ olur.

**II.2.** $F(x,y)=lnx+e^{-(y/x)}=0$ için $\frac{dy}{dx}$ =?

**<u>1.yol</u>** Verilen fonksiyon kapalı formda olduğundan birinci mertebeden türevi;

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF(x,y)}{dx}}{\frac{dF(x,y)}{dy}}=-\frac{\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}}{-\frac{1}{x}e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}}=\frac{1+\frac{y}{x}e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}}{e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}}=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$ bulunur.

**<u>2.yol</u>** $\frac{d}{dx}F(x,y)=\frac{d}{dx}\big(lnx+e^{-(y/x)}\big)=\frac{d}{dx}(0)\Rightarrow\frac{1}{x}-\left(\frac{y'x-y}{x^2}\right)e^{-(y/x)}=0\Rightarrow$

$\frac{1}{x} - \frac{y'}{x}e^{-\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x^2}e^{-\left(\frac{y}{x}\right)} = 0 \Rightarrow \frac{e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}}{x}y' = \frac{y}{x^2}e^{-\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ bulunur.

**II.3.** $F(x,y) = xsiny + ysinx = 0$ için $y' =?$

$\frac{d}{dx}F(x,y) = \frac{d}{dx}(xsiny + ysinx) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow \; siny + x.y'cosy + y'sinx + ycosx = 0 \Rightarrow$

$(xcosy + sinx)y' = -(ycosx + siny) \Rightarrow \; y' = -\frac{ycosx+siny}{xcosy+sinx}$ bulunur.

**II.4.** $F(x,y) = arctany - y + x = 0$ için $\frac{d^2y}{dx^2} =?$

$\frac{d}{dx}F(x,y) = \frac{d}{dx}(arctany - y + x) = \frac{d}{dx}(0) \;\Rightarrow \frac{y\prime}{1+y^2} - y' + 1 = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right)y' = -1$

$\Rightarrow \frac{-y^2}{1+y^2}y' = -1 \quad \Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2}$ iken,

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = \frac{2yy'y^2 - 2yy\prime(1+y^2)}{y^4} = \frac{2yy\prime\left(y^2-1-y^2\right)}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3} = -\frac{2\frac{1+y^2}{y^2}}{y^3} =$
$-\frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}$ bulunur.

**II.5.** $(a+bx)e^{(y/x)} = x$ iken $x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$(a+bx)e^{(y/x)} = x$ iken $F(x,y) = (a+bx)e^{(y/x)} - x = 0$ yazılabilir. Buradan

$\frac{d}{dx}F(x,y) = \frac{d}{dx}\left[(a+bx)e^{(y/x)} - x\right] = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow be^{(y/x)} + \frac{y'x-y}{x^2}(a+bx)e^{(y/x)} - 1 = 0 \;\Rightarrow$

$be^{(y/x)} + \frac{y'x-y}{x^2}x - 1 = 0 \Rightarrow be^{(y/x)} + y' - \frac{y}{x} - 1 = 0 \Rightarrow y' = 1 + \frac{y}{x} - be^{(y/x)}$ ve

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y'x-y}{x^2} - b\frac{y'x-y}{x^2}e^{\left(\frac{y}{x}\right)} = \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right)\left(1 - e^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right) = \left(\frac{1+\frac{y}{x}-be^{(y/x)}}{x} - \frac{y}{x^2}\right)\left(1 - e^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$

$= \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} - \frac{b}{x}e^{(y/x)} - \frac{y}{x^2}\right)\left(1 - e^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{b}{x}e^{(y/x)}\right)\left(1 - e^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right) = \frac{1}{x}\left(1 - be^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right)^2$

$x^3\frac{d^2y}{dx^2} = x^3\frac{1}{x}\left(1 - be^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right)^2 = x^2\left(1 - be^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right)^2$ .........(i)

$\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = \left(x\left(1 + \frac{y}{x} - be^{(y/x)}\right) - y\right)^2 = \left(x + y - bxe^{\left(\frac{y}{x}\right)} - y\right)^2 =$

$x^2\left(1 - be^{\left(\frac{y}{x}\right)}\right)^2$ ..........(ii)

(i) ve (ii) eşitliklerinin sağ tarafları birbirine eşit olduğundan sol taraflarda eşit olmak zorundadır. Böylece verilen fonksiyonun $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$ eşitliğini sağladığı gösterilmiş oldu.