T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

İST.482 PARAMETRİK OLMAYAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

10. Hafta

özenilen üniversite

5.1.6 MOOD TESTİ

İki bağımsız grubu değişim parametreleri yönünden karşılaştırmada kullanılan bir parametrik olmayan test tekniğidir. Eğer grupların dağılımı normal ise bu grupları değişim parametreleri (yani varyanslar) yönünden karşılaştırmada bir parametrik teknik olan F-testi kullanılır. Normallik varsayımı sağlanmadığında F-testine alternatif olarak kullanılan bir tekniklerden birisidir.

Varsayımları

i) İlgilenilen değişken sürekli olmalı

ii) Ölçme düzeyi en az sıralama olmalı

iii) Bilinmeyen kitle medyanları eşit olmalı

iv) Gruplardan çekilecek olan örnekler $n_1 \leq n_2$ olacak şekilde rastgele ve birbirinden bağımsız olarak çekilmeli

Test İşleminin Algoritması

1. Hipotezler kurulur

σ_1 : Birinci gruba ait bilinmeyen değişim parametresi

σ_2 : İkinci gruba ait bilinmeyen değişim parametresi, olmak üzere

a) $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ **b)** $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ **c)** $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$ $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

şeklinde oluşturulur.

2. Gruplardan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak $n_1 \leq n_2$ olacak şekilde örnekler çekilir.

Birinci gruptan n_1 birimlik ve ikinci gruptan da n_2 birimlik örnekler çekilsin. Birinci örnek X_{11}, $X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ ve ikinci örnek X_{21}, $X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ olsun.

3. İki örnek birleştirilerek birleştirilmiş örnek oluşturulur ve bu örnekte örnek birimlerine en küçükten başlanarak sıra sayıları verilir. Eğer aynı değerli gözlemler varsa bu gözlemlere verilmesi gereken sıra sayılarının ortalaması olan ortalama sıra sayısı verilir. $i = 1, 2, \dots, n_1$ için $R(X_{1i}) = r_i$ birinci örneğe verilen sıra sayılarını ve $i = 1, 2, \dots, n_2$ için $R(X_{2i})$ ikinci örneğe verilen sıra sayılarını göstersin.

4. Test istatistiği belirlenir. Mood testinde test istatistiği olarak

$$M = \sum_{i=1}^{n_1} \left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2 \tag{5.9}$$

istatistiği kullanılır. Burada $n = n_1 + n_2$ birleştirilmiş örnek hacmi iken $\frac{n+1}{2}$ sıra sayılarının ortalamasıdır. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri M_h olsun. H_0 hipotezi doğru iken test istatistiği ne çok küçük ne de çok büyük bir değer alır.

5. Karar kuralı belirlenir ve karar verilir. α önem seviyesinde H_1 hipotezi altında test istatistiğinin alabileceği değer dikkate alınarak karar kuralı belirlenir.

H_1	**Karar kuralı**
$\sigma_1 < \sigma_2$	$M_h \le M_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir…$P(M \le M_\alpha) = \alpha$ olacak şekilde M_α=? $M_h > M_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez
$\sigma_1 > \sigma_2$	$M_h \ge M'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir…$P(M \ge M'_\alpha) = \alpha$ olacak şekilde M'_α=? $M_h < M'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez
$\sigma_1 \ne \sigma_2$	$M_h \le M_{\alpha/2}$ veya $M_h \ge M'_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi ret edilir. $P\left(M \le M_{\alpha/2}\right) = \alpha/2$ olacak şekilde $M_{\alpha/2}$ =? ve $P\left(M \ge M'_{\alpha/2}\right) = {}^{\alpha}/_{2}$ olacak şekilde $M'_{\alpha/2}$=? $M_{\alpha/2} < M_h < M'_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Burada M_α , M'_α , $M_{\alpha/2}$ ve $M'_{\alpha/2}$ değerleri (T14) tablosundan bulunacak olan kritik değerlerdir.

<u>NOT:</u> M istatistiğinin alabileceği en küçük değer için birinci örnekleme verilen sıra sayılarının $\frac{n+1}{2}$ "sıra sayılarının ortalaması" etrafında değerler alması gerekir. M istatistiğinin alabileceği en büyük değer için birinci örnekleme verilen sıra sayılarının $\frac{n+1}{2}$ noktasına en uzaktaki uç noktalarda yer alan sıra sayıları olmalıdır.

<u>Örnek 5.13</u> $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ hipotezini $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ hipotezine karşı Mood testi ile test edebilmek için değişim parametresi σ_1 olan kitleden n_1 ve değişim parametresi σ_2 olan kitleden n_2 birimlik örnekler çekilsin. Buna göre;

a) $n_1 = 2$ ve $n_2 = 3$ iken test istatistiğinin örnekleme dağılımını oluşturunuz ve beklenen değeri ile varyansını hesaplayınız?

b) $n_1 = 7$ ve $n_2 = 8$ iken test istatistiğinin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz?

c) $n_1 = 7$ ve $n_2 = 9$ iken test istatistiğinin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz?

d) $n_1 = 8$ ve $n_2 = 9$ iken test istatistiğinin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz?

e) $n_1 = 8$ ve $n_2 = 10$ iken test istatistiğinin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz?

<u>Çözüm: a)</u> Mood testi için test istatistiği Eşitlik (5.9) gereğince $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2$dir. Burada $n_1 = 2$ ve $n_2 = 3$ oluğundan $n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5$ olup, test istatistiğinin hesaplanabileceği farklı durumların sayısı $\binom{n}{n_1} = \binom{5}{2} = 10$'dur. Şimdi bu durumları ve her bir durumda test istatistiğinin alabileceği değerleri ve bu değerleri alma olasılıklarını hesaplayalım. Burada $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$'dür.

Durum	r_i	$(r_i - 3)^2$	M	**Durum**	r_i	$(r_i - 3)^2$	M
1	1 2	4 1	5	6	2 4	1 1	2
2	1 3	4 0	4	7	2 5	1 4	5
3	1 4	4 1	5	8	3 4	0 1	1
4	1 5	4 4	8	9	3 5	0 4	4
5	2 3	1 0	1	10	4 5	1 4	5

Böylece M istatistiğinin örnekleme dağılımı:

$\boldsymbol{M = m}$	1	2	4	5	8
$\boldsymbol{Pr\ (M = m)}$	2/10	1/10	2/10	4/10	1/10

M istatistiğinin beklenen değeri: $E(M) = \sum_m m\ Pr\ (M = m) = \frac{1}{10}(2 + 2 + 8 + 20 + 8) = 4$

M istatistiğinin varyansı: $V(M) = E(M^2) - [E(M)]^2 = \sum_m m^2\ Pr\ (M = m) - (4)^2$

$= \frac{1}{10}(2 + 4 + 32 + 100 + 64) - 16 = 4{,}2$ bulunur.

b) $n_1 = 7$ ve $n_2 = 8$ iken $EnkM$=? ve $EnbM$ =? $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2; \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$

Enk$M$ için:		***EnbM için***:	
r_i	$(r_i - 8)^2$	r_i	$(r_i - 8)^2$
8	0	1	49
7	1	15	49
9	1	2	36
6	4	14	36
10	4	3	25
5	9	13	25
11	9	4/12	16
Toplam	**Enk$M$** =28		***EnbM*** =236

c) $n_1 = 7$ ve $n_2 = 9$ iken $EnkM$=? ve $EnbM$ =? $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2$; $\frac{n+1}{2} = \frac{16+1}{2} = 8{,}5$

Enk*M* için:		***EnbM** **için*:	
r_i	$(r_i - 8{,}5)^2$	r_i	$(r_i - 8{,}5)^2$
8	0,25	1	56,25
9	0,25	16	56,25
7	2,25	2	42,25
10	2,25	15	42,25
6	6,25	3	30,25
11	6,25	14	30,25
5/12	12,25	4/13	20,25
Toplam	**Enk*M*** =29,75		***EnbM*** =277,75

d) $n_1 = 8$ ve $n_2 = 9$ iken $EnkM$=? ve $EnbM$ =? $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2$; $\frac{n+1}{2} = \frac{17+1}{2} = 9$

Enk*M* için:		***EnbM** için*:	
r_i	$(r_i - 9)^2$	r_i	$(r_i - 9)^2$
9	0	1	64
8	1	17	64
10	1	2	49
7	4	16	49
11	4	3	36
6	9	15	36
12	9	4	25
5/13	16	14	25
Toplam	**Enk*M*** =44		***EnbM*** =348

e) $n_1 = 8$ ve $n_2 = 10$ iken $EnkM$=? ve $EnbM$ =? $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2$; $\frac{n+1}{2} = \frac{18+1}{2} = 9{,}5$

Enk*M* için:		***EnbM** için*:	
r_i	$(r_i - 9{,}5)^2$	r_i	$(r_i - 9{,}5)^2$
9	0,25	1	72,25
10	0,25	18	72,25
8	2,25	2	56,25
11	2,25	17	56,25
7	6,25	3	42,25
12	6,25	16	42,25
6	12,25	4	30,25
13	12,25	15	30,25
Toplam	**Enk*M*** =42		***EnbM*** =402

Örnek 5.14 Aynı sektörde faaliyet gösteren A ve B firmalarının çalışanlarına ait verimlilik puanları dağılımları benzerlikleri bakımından karşılaştırılmak istenmektedir. Bu amaçla A firması çalışanları arasından 7 ve B firması çalışanları arasından da 9 çalışan rastgele seçilmiş, bu çalışanların verimlilik puanları aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Her iki firmanın verimlilik puanlarına ait medyan değerlerinin aynı olduğu kabul edilmiştir. Bu bilgilere dayanarak B

firması çalışanlarının verimlilik puanları dağılımının A firması çalışanlarına göre daha heterojen olduğu %5 önem seviyesinde söylenebilir mi?

A Firması (X_{1i})	80	85	84	88	94	96	78		
$R(X_{1i})$	3	9,5	8	13	15	16	1		
B Firması (X_{2i})	85	86	82	80	80	87	90	83	81
$R(X_{1i})$	9,5	11	6	3	3	12	14	7	5

Çözüm Değişken (X) : Verimlilik puanı.(puan)… nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit aralıklı

Faktör/Grup: Firma… Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. grup A firması (1)}\\ \text{II. grup B firması (2)}\end{array}\right\}\text{Bağımsız gruplar}$$

σ_1: A firmasına ait verimlilik dağılımı değişim parametresi

σ_2: B firmasına ait verimlilik dağılımı değişim parametresi olmak üzere test edilecek hipotezler;

H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$

H_1: $\sigma_1 < \sigma_2$

şeklinde kurulur. Her iki firmanın verimlilik puanlarına ait medyan değerlerinin aynı olduğu kabul edildiğinden bu hipotezlerin testi Mood testi ile yapılır. Mood testi için test istatistiği $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2$ dir. Burada $n_1 = 7$ ve $n_2 = 9$ iken $n = n_1 + n_2 = 7 + 9 = 16$ ve böylece $\frac{n+1}{2} = \frac{16+1}{2} = 8{,}5$ olur. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri;

$r_i = [R(X_{1i})]$	$(r_i - 8{,}5)^2$	**Karar:** $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı M_α sol kritik değer olmak üzere $M_h \le M_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, aksi takdirde kabul edilir. $M_h = 206{,}50$ olup $n_1 = 7$ ve $n_2 = 9$ iken $\alpha = 0{,}05$ için T14 tablosundan $M_\alpha = 83{,}75$ dir. Böylece 206,50 > 83,75 yani $M_h > M_\alpha$ olup, H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre B firması çalışanlarının verimlilik puanları dağılımının A firması çalışanlarına göre daha heterojen olduğu söylenebilir.
3	30,25	
9,5	1,00	
8	0,25	
13	20,25	
15	42,25	
16	56,25	
1	56,25	
	$M_h = 206{,}50$	

Örnek 5.15 Özel sektörde çalışanların aylık sosyal amaçlı harcamalarına ait değişim parametresinin kamu sektöründe çalışanların aylık sosyal amaçlı harcamalarına ait değişim parametresinden büyük olduğu iddia edilmektedir. Ayrıca her iki sektörün aylık sosyal amaçlı harcamalarına ait medyan parametrelerinin de aynı olduğu kabul edilmiştir. İddianın doğruluğunu araştırmak amacıyla özel sektörde çalışanlardan 7 ve kamu sektörü çalışanlarından da 8 kişi rastgele seçilmiş ve bu kişilerin aylık sosyal amaçlı harcamaları

aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Bu bilgilere göre söz konusu iddia hakkındaki kararınızı %5 önem seviyesinde belirtiniz?

Özel sektör $(\boldsymbol{X_{1i} - TL})$	150	305	520	810	120	155	140	
$R(\boldsymbol{X_{1i}})$	3	12	14	15	1	4	2	
Kamu sektörü $(\boldsymbol{X_{2i} - TL})$	240	160	180	230	300	310	245	220
$R(\boldsymbol{X_{1i}})$	9	5	6	8	11	13	10	7

Çözüm Değişken (X) : Aylık sosyal amaçlı harcama (TL)… nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Faktör/Grup: Sektör… Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

$$\left.\begin{array}{r}\text{I. grup Özel sektör (1)}\\ \text{II. grup Kamu sektörü (2)}\end{array}\right\}\text{Bağımsız gruplar}$$

σ_1: Özel sektöre ait aylık sosyal amaçlı harcamaya ilişkin değişim parametresi

σ_2: Kamu sektörüne ait aylık sosyal amaçlı harcamaya ilişkin değişim parametresi olmak üzere test edilecek hipotezler;

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$

şeklinde kurulur. Her iki sektörün aylık sosyal amaçlı harcamaya ait medyan değerlerinin aynı olduğu kabul edildiğinden bu hipotezlerin testi Mood testi ile yapılır. Mood testi için test istatistiği $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2$ dir. Burada $n_1 = 7$ ve $n_2 = 8$ iken $n = n_1 + n_2 = 7 + 8 = 15$ ve böylece $\frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$ olur. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri;

$r_i = [R(\boldsymbol{X_{1i}})]$	$(r_i - 8)^2$	
3	25	**Karar:** $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı M'_α sağ kritik değer olmak üzere $M_h \geq M'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, aksi takdirde kabul edilir. $M_h = 227$ olup $n_1 = 7$ ve $n_2 = 8$ iken 1-$\alpha = 0{,}95$ için T14 tablosundan $M'_\alpha = 185$ dir. Böylece 227 > 185 yani $M_h > M'_\alpha$ olup, H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre özel sektör çalışanlarının aylık sosyal amaçlı harcamalarına ait değişim parametresi Kamu sektöründe çalışanların aylık sosyal amaçlı harcamalarına ait değişim parametresine göre daha büyüktür.
12	16	
14	36	
15	49	
1	49	
4	16	
2	36	
	$M_h = 227$	

Örnek 5.16 A yöntemi ile tedavi edilen hastaların iyileşme sürelerine ait dağılımın homojenlik bakımından B yöntemi ile tedavi edilen hastaların iyileşme sürelerine ait dağılımdan farklı olduğu düşünülmektedir. Her iki yöntemle de tedavi olan hastalarda iyileşme süresi medyanı aynıdır. A yöntemi ile tedavi edilen 6 ve B yöntemi ile tedavi edilen 7 hastanın iyileşme süreleri

aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Bu örneğe göre %5 önem seviyesinde düşünülen durumun doğru olup olmadığına karar veriniz?

A Yöntemi $(X_{1i} - gün)$	40	30	22	36	27	37	
$R(X_{1i})$	12	6	2	10	4	11	
B Yöntemi $(X_{2i} - gün)$	34	60	12	28	31	25	33
$R(X_{1i})$	9	13	1	5	7	3	8

Çözüm Değişken (X) : İyileşme Süresi (gün)… nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Faktör/Grup: Tedavi yöntemi… Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. grup A yöntemi (1)}\\ \text{II. grup B yöntemi (2)}\end{array}\right\}\text{Bağımsız gruplar}$$

σ_1: A tedavi yöntemi ile tedavi edilen hastalara ait iyileşme süresine ilişkin değişim parametresi

σ_2: B tedavi yöntemi ile tedavi edilen hastalara ait iyileşme süresine ilişkin değişim parametresi olmak üzere test edilecek hipotezler;

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$

şeklinde kurulur. Her iki tedavi yöntemi için iyileşme süresine ait medyan değerlerinin aynı olduğu kabul edildiğinden bu hipotezlerin testi Mood testi ile yapılır. Mood testi için test istatistiği $M = \sum_{i=1}^{n_1}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2$ dir. Burada $n_1 = 6$ ve $n_2 = 7$ iken $n = n_1 + n_2 = 6 + 7 = 13$ ve böylece $\frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$ olur. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri;

$r_i = [R(X_{1i})]$	$(r_i - 7)^2$	**Karar:** $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı $M_{\frac{\alpha}{2}}$ sol kritik değer ve $M'_{\frac{\alpha}{2}}$ sağ kritik değer olmak üzere $M_h \leq M_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $M_h \geq M'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 hipotezi ret edilir, aksi takdirde kabul edilir. $M_h = 227$ olup $n_1 = 6$ ve $n_2 = 7$ iken $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ ve $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ için T14 tablosundan $M_{\frac{\alpha}{2}} = 39$ ve $M'_{\frac{\alpha}{2}} = 129$ bulunur. Böylece $39 < 85 < 129$ yani $M_{\frac{\alpha}{2}} < M_h < M'_{\frac{\alpha}{2}}$ olup, H_0 hipotezi ret edilemez. Buna göre özel A ve B tedavi yöntemleri ile tedavi edilen hastaların iyileşme sürelerine ait dağılımlar benzer homojenliğe sahiptir.
12	25	
6	1	
2	25	
10	9	
4	9	
11	16	
	$M_h = 85$	

5.1.7 SIEGEL - TUKEY TESTİ

İki bağımsız grubu değişim parametreleri yönünden karşılaştırmada kullanılan bir diğer parametrik olmayan test tekniğidir.

Varsayımları

i) İlgilenilen değişken sürekli olmalı

ii) Ölçme düzeyi en az sıralama olmalı

iii) Gruplardan çekilecek olan örnekler rastgele ve birbirinden bağımsız olarak çekilmeli

Test İşleminin Algoritması

1. Hipotezler kurulur

σ_1 : Birinci gruba ait bilinmeyen değişim parametresi

σ_2 : İkinci gruba ait bilinmeyen değişim parametresi, olmak üzere

a) $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ $H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$

b) $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$

c) $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

şeklinde oluşturulur.

2. Gruplardan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak örnekler çekilir.

Birinci gruptan n_1 birimlik ve ikinci gruptan da n_2 birimlik örnekler çekilsin. Birinci örnek X_{11}, $X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ve ikinci örnek $X_{21},\ X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ olsun.

3. İki örnek birleştirilerek birleştirilmiş örnek oluşturulur ve bu örnekte örnek birimleri küçükten büyüğe doğru sıralanır. Bu durumda $n = n_1 + n_2$ birleştirilmiş örnek birim sayısı olup, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere;

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{i. sıradaki değer birinci gruba aitse} \\ 0, & \text{i. sıradaki değer ikinci gruba aitse} \end{cases} \tag{5.10}$$

değişkeni ve n çift sayı iken ağırlık katsayıları adı verilen a_i katsayıları;

$$a_i = \begin{cases} 2i\,, & i-\text{çift sayı ve } 1 < i \leq \left(\frac{n}{2}\right) \text{ ise} \\ 2i-1\,, & i-\text{tek sayı ve } 1 \leq i \leq \left(\frac{n}{2}\right) \text{ ise} \\ 2(n-i)+2\,, & i-\text{çift sayı ve } \left(\frac{n}{2}\right) < i \leq n \text{ ise} \\ 2(n-i)+1\,, & i-\text{tek sayı ve } \left(\frac{n}{2}\right) < i < n \text{ ise} \end{cases} \tag{5.11}$$

olarak tanımlansın.

Örneğin; $n = 10$ iken örnek birimleri $(\boldsymbol{X_i})$, bunların sıralı değerleri $\boldsymbol{X_{(i)}}$, i-değerleri ve a_i katsayıları aşağıdaki tabloda verildiği gibi olacaktır. $\frac{n}{2} = 5$ olacağından;

$\boldsymbol{i}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{X_i}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
$\boldsymbol{X_{(i)}}$	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	$X_{(3)}$	$X_{(4)}$	$X_{(5)}$	$X_{(6)}$	$X_{(7)}$	$X_{(8)}$	$X_{(9)}$	$X_{(10)}$
$\boldsymbol{a_i}$	1	4	5	8	9	10	7	6	3	2

elde edilir.

NOT: eğer n birleştirilmiş örnek hacmi tek sayı ise bu durumda a_i katsayıları bulunurken önce $(\frac{n+1}{2})$ sıradaki örnek birimi (yani sıralı dizide tam ortaya düşen gözlem değeri) örnekten çıkartılır. Bu durumda hem birleştirilmiş örnek hacmi hem de çıkartılan örnek biriminin ait olduğu örneğin örnek hacmi bir birim azalacaktır. Geriye kalan örnek birim sayısı yine çift sayı olacağından a_i katsayıları Eşitlik (5.11) ile hesaplanır.

4. Test istatistiği belirlenir. Siegel – Tukey testinde test istatistiği olarak

$$ST = \sum_{i=1}^{n} a_i{*}\delta_i \qquad (5.12)$$

istatistiği kullanılır. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri ST_h olsun. H_0 hipotezi doğru iken test istatistiği ne çok küçük ne de çok büyük bir değer alır.

5. Karar kuralı belirlenir ve karar verilir. α önem seviyesinde H_1 hipotezi altında test istatistiğinin alabileceği değer dikkate alınarak karar kuralı belirlenir.

$H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$ iken birinci ve ikinci gruba ait örnek birimleri birlikte sıralandığında birinci gruba ait örmek birimleri genellikle sıralı dizinin ortalarında yer alacağından ve bunlara yukarıdaki örnek tabloda da görüldüğü gibi büyük a_i katsayıları karşılık geleceklerdir. Böylece δ_i değişkeni genellikle uçlarda ikinci gruba ait örnek birimleri yer alacağından uçlarda "0" ve orta yerlerde "1" değerini alacaktır. Bu sebeple test istatistiğinin oldukça büyük bir değer alması beklenir.

$H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ iken birinci ve ikinci gruba ait örnek birimleri birlikte sıralandığında birinci gruba ait örmek birimleri genellikle sıralı dizinin sağ ve sol uçlarında yer alacağından ve bunlara yukarıdaki örnek tabloda da görüldüğü gibi küçük a_i katsayıları karşılık geleceklerdir. Böylece δ_i değişkeni genellikle orta yerlerde ikinci gruba ait örnek birimleri yer alacağından uçlarda "1" ve orta yerlerde "0" değerini alacaktır. Bu sebeple test istatistiğinin oldukça küçük bir değer alması beklenir.

$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$ iken test istatistiğinin ya$H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$ durumunda olduğu gibi oldukça büyük bir değer alması ya da $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ durumunda olduğu gibi oldukça küçük bir değer alması beklenir.

Bu beklentiler dikkate alındığında karar kuralı aşağıdaki tabloda verildiği gibi özetlenebilir.

H_1	Karar kuralı
$\sigma_1 < \sigma_2$	$ST_h \geq ST'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir…$P(ST \geq ST'_\alpha) = \alpha$ olacak şekilde ST'_α=? $ST_h < ST'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez
$\sigma_1 > \sigma_2$	$ST_h \leq ST_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir…$P(ST \leq ST_\alpha) = \alpha$ olacak şekilde ST_α=? $ST_h > ST_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez
$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$ST_h \leq ST_{\alpha/2}$ veya $ST_h \geq ST'_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi ret edilir. $P\left(ST \leq ST_{\alpha/2}\right) = \alpha/2$ olacak şekilde $ST_{\alpha/2}$ =? ve $P\left(ST \geq ST'_{\alpha/2}\right) = {}^{\alpha}/_{2}$ olacak şekilde $ST'_{\alpha/2}$=? $ST_{\alpha/2} < ST_h < ST'_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Burada ST_α , ST'_α , $ST_{\alpha/2}$ ve $ST'_{\alpha/2}$ değerleri kritik değerlerdir. Siegel – Tukey testinde ST test istatistiği ile Mann-Whitney U- testinde test istatistiği olan $T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ istatistiğindeki $S = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1i})$ istatistiği aynı anlamdadır. Bu sebeple bu son eşitlikte S istatistiği yerine ST istatistiğini ve T istatistiği yerine de Mann Whitney U- testinin ilgili kritik değerini kullanarak Siegel – Tukey testine ait kritik değerler bulunabilir. Gerçekten;

$W_\alpha = ST_\alpha - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ eşitliğinden $ST_\alpha = W_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ kritik değeri

$W'_\alpha = ST'_\alpha - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ eşitliğinden $ST'_\alpha = W'_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ kritik değeri ve

$W_{\frac{\alpha}{2}} = ST_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ ve $W'_{\frac{\alpha}{2}} = ST'_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ eşitliklerinden sırasıyla $ST_{\frac{\alpha}{2}} = W_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ ve $ST'_{\frac{\alpha}{2}} = W'_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ kritik değerleri bulunabilir.

Örnek 5.17 Rastgele seçilen 6 erkek ve 6 kadın hastanın tahlil sonuçları aşağıda verilmiştir. Buna göre erkek hastaların tahlil sonuçlarına ait dağılımın daha heterojen bir dağılım gösterip göstermediğine Siegel-Tukey testi ile %5 önem seviyesinde karar veriniz?

Erkek (X_{1i})	7,6	11,2	10,1	19,1	20,2	19,6
Kadın (X_{2i})	9,3	12,6	14,1	15,2	19,2	14,4

Çözüm Değişken (X) : Tahlil sonucu… nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Faktör/Grup: Cinsiyet… Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

$\left.\begin{array}{l}\text{I. grup Erkek (1)}\\ \text{II. grup Kadın(2)}\end{array}\right\}$ Bağımsız gruplar

σ_1: Erkek hastalara ait tahlil sonuçlarına ilişkin değişim parametresi

σ_2: Kadın hastalara ait tahlil sonuçlarına ilişkin değişim parametresi olmak üzere test edilecek hipotezler;

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$

şeklinde kurulur. Siegel-Tukey testi için test istatistiği $ST = \sum_{i=1}^{n} a_i{*}\delta_i$ istatistiğidir. ST istatistiğinin değerini hesaplamak için gerekli işlemler tablosu şu şekilde hazırlanır: $n = n_1 + n_2 = 6 + 6 = 12$ çift sayı olduğundan $\frac{n}{2} = 6$ olduğu unutulmamalıdır. $i = 1, 2, \dots, 12$ olmak üzere $X_{(i)}$ **:** birleştirilmiş örnekte i.sıradaki gözlem, a_i : Eşitlik (5.11) ile hesaplanan katsayılar ve $\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{i. sıradaki değer birinci gruba aitse} \\ 0, & \text{i. sıradaki değer ikinci gruba aitse} \end{cases}$ şeklinde tanımlıdır.

$\boldsymbol{i}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{X_{(i)}}$	7,6	9,3	10,1	11,2	12,6	14,1	14,4	15,2	19,1	19,2	19,6	20,2
$\boldsymbol{a_i}$	1	4	5	8	9	12	11	10	7	6	3	2
$\boldsymbol{\delta_i}$	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
$\boldsymbol{a_i * \delta_i}$	1	0	5	8	0	0	0	0	7	0	3	2

$ST_h = 1 + 5 + 8 + 7 + 3 + 2 = 26$ bulunur.

Karar: $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre kritik değer ST_α olmak üzere, eğer $ST_h \leq ST_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, aksi takdirde ret edilemez. $n_1 = n_2 = 6$ ve $\alpha = 0{,}05$ iken (T12) tablosundan $W_\alpha = 8$ ve böylece $ST_\alpha = W_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 8 + \frac{6*7}{2} = 29$ bulunur. Buna göre 26 < 29 yani $ST_h < ST_\alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. O halde erkeklerin tahlil sonuçlarına ait dağılım daha heterojen bir dağılım göstermektedir.

Örnek 5.18 Yerleşim yerlerine göre bireylerin haftalık TV izleme sürelerine ait dağılımlar homojenlikleri yönünden karşılaştırılmak istenmektedir. Bu amaçla şehirde ikamet edenlerden 9 ve kırsal kesimde ikamet edenlerden de 8 birey rastgele seçilerek haftalık TV izleme süreleri aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Buna göre %5 önem seviyesinde

a) şehirde ikamet edenlerin daha homojen bir dağılıma sahip olup olmadığına

b) her iki kesimde ikamet edenlerin haftalık TV izleme sürelerine ait dağılımların homojenlik bakımından farklılık gösterip göstermediğine karar veriniz?

Şehir $(\boldsymbol{X_{1i} - saat})$	36	38	20	42	45	44	46	40	33
Kırsal $(\boldsymbol{X_{2i} - saat})$	28	26	19	15	50	51	43	39	

Çözüm Değişken (X) : Haftalık TV izleme süresi (saat)… nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Faktör/Grup: Yerleşim yeri… Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

$\left.\begin{array}{l} \text{I. grup Şehir (1)} \\ \text{II. grup Kırsal(2)} \end{array}\right\}$ Bağımsız gruplar

σ_1: Şehirde ikamet edenlerin haftalık TV izleme süresine ilişkin değişim parametresi

σ_2: Kırsal kesimde ikamet edenlerin haftalık TV izleme süresine ilişkin değişim parametresi olmak üzere test edilecek hipotezler;

a) $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1: \sigma_1 < \sigma_2$

şeklinde kurulur. Siegel-Tukey testi için test istatistiği $ST = \sum_{i=1}^{n} a_i * \delta_i$ istatistiğidir. ST istatistiğinin değerini hesaplamak için gerekli işlemler tablosu şu şekilde hazırlanır: $n = n_1 + n_2 = 9 + 8 = 17$ tek sayı olduğundan $\frac{n+1}{2} = 9$ncu sıradaki gözlem $X_{(9)} = 39$ işlemden çıkartılır. Bu gözlem ikinci gruba ait bir gözlem olduğundan yeni $n_2 = 7$ iken $n = 16$ çift sayıya dönüşür. Böylece $i = 1, 2, \ldots, 16$ olmak üzere $X_{(i)}$: birleştirilmiş örnekte i.sıradaki gözlem, a_i : Eşitlik (5.11) ile hesaplanan katsayılar ve $\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{i. sıradaki değer birinci gruba aitse} \\ 0, & \text{i. sıradaki değer ikinci gruba aitse} \end{cases}$ şeklinde tanımlıdır.

$\boldsymbol{i}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 9	11 10	12 11	13 12	14 13	15 14	16 15	17 16
$\boldsymbol{X_{(i)}}$	15	19	20	26	28	33	36	38	39	40	42	43	44	45	46	50	51
$\boldsymbol{a_i}$	1	4	5	8	9	12	13	16	---	15	14	11	10	7	6	3	2
$\boldsymbol{\delta_i}$	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
$\boldsymbol{a_i * \delta_i}$	0	0	5	0	0	12	13	16	---	15	14	0	10	7	6	0	0

$ST_h = 5 + 12 + 13 + 16 + 15 + 14 + 10 + 7 + 6 = 98$ bulunur.

Karar: $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre kritik değer ST'_α olmak üzere, eğer $ST_h \geq ST'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, aksi takdirde ret edilemez. $n_1 = 9,\ n_2 = 7$ ve $\alpha = 0{,}05$ iken (T12) tablosundan $W_\alpha = 16$ve$W'_\alpha = n_1 * n_2 - W_\alpha = 9 * 7 - 16 = 47$ olup böylece $ST'_\alpha = W'_\alpha + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 47 + \frac{9*10}{2} = 92$ bulunur. Buna göre 98 > 92 yani $ST_h > ST'_\alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. O halde şehirde ikamet edenlerin haftalık TV izleme süresine ait dağılım daha homojen bir dağılım göstermektedir.

b) $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ olup, test istatistiğinin alabileceği değer (a)'dan dolayı $ST_h = 98$ dir. H_1 hipotezine göre kritik değerler; $n_1 = 9,\ n_2 = 7$ ve $\alpha = 0{,}05$ iken (T12) tablosundan $W_{\frac{\alpha}{2}} = 13$ ve $W'_{\frac{\alpha}{2}} = n_1 * n_2 - W_{\frac{\alpha}{2}} = 9 * 7 - 13 = 50$ dir. Bu değerlere göre: $ST_{\frac{\alpha}{2}} = W_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 13 + \frac{9*10}{2} = 58$ ve $ST'_{\frac{\alpha}{2}} = W'_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 50 + \frac{9*10}{2} = 95$ bulunur. Sonuç olarak; 98 > 95 yani $ST_h > ST'_{\frac{\alpha}{2}}$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. O halde ikamet yerlerine göre haftalık TV izleme süresine ait dağılımlar benzer homojenliğe sahip değildir.