T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

İST.482 PARAMETRİK OLMAYAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

11. Hafta

BÖLÜM 6

İKİDEN FAZLA BAĞIMSIZ GRUP (KİTLE) KARŞILAŞTIRMALARINDA KULLANILAN PARAMETRİK OLMAYAN TEST TEKNİKLERİ

İkiden fazla bağımsız grubu (kitleyi) konum parametreleri (ortalamaları) yönünden karşılaştırmada kullanılan parametrik teknik "F-testidir". Tek faktör varyans analizi olarak da bilinen bu teknikte temel varsayımlar ilgilenilen değişkene göre grupların dağılımı normal dağılımlı ve gruplar homojen varyanslı olmalıdır. Eğer bu varsayımlardan birisi bile sağlanmıyorsa F-testinin kullanılması doğru olmaz. Böyle durumlarda F-testinin alternatifleri olan parametrik olmayan tekniklere başvurulmalıdır. Bu bağlamda kullanılacak olan parametrik olmayan teknikler:

i) Medyan testi

ii) Kruskal-Wallis H testi

olarak bilinirler.

6.1. MEDYAN TESTİ

İkiden fazla bağımsız grubu konum parametresi olarak medyanların benzerliği yönünden karşılaştırılmayı amaçlayan bir tekniktir.

<u>Varsayımları</u>

i. İlgilenilen değişken (bağımlı değişken) sürekli olmalı, Faktör (gruplama değişkeni) nitel/nicel olabilir ama ölçme düzeyi sınıflama veya sıralama olmalıdır.

ii. İlgilenilen değişkenin ölçme düzeyi en az sıralama olmalı

iii. $k > 2$ bağımsız grup sayısı (faktör düzey sayısı) olmak üzere örnek birimleri gruplardan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak çekilmeli

<u>Test İşleminin Algoritması</u>

1. Hipotezler kurulur

$M_j =: j$-nci grubun (kitlenin) medyanı $(j = 1, 2, \dots, k)$

M : Genel kitle medyanı

olmak üzere test edilecek olan hipotezler:

$H_0 :\ M_1 = M_2 = \cdots = M_k = M$

$H_1 :$ En az bir M_j diğerlerinden farklı (6.1)

şeklinde oluşturulur.

2. k tane grubun her birinden rastgele ve birbirinden bağımsız olarak n_j birimlik örnekler çekilir. Bu takdirde örnek veri düzeni aşağıdaki gibi bir tablo ile verilebilir.

GRUPLAR			
1	**2**	**…**	**k**
X_{11} X_{21} $\vdots$ $X_{n_1 1}$	X_{12} X_{22} $\vdots$ $X_{n_2 2}$	$\cdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\cdots$	X_{1k} X_{2k} $\vdots$ $X_{n_k k}$
n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Bu örnekler birleştirilerek birleştirilmiş örnek oluşturulur ve birleştirilmiş örneğin medyan hesaplanır.

n: Birleştirilmiş örnek hacmi ve m : Birleştirilmiş örnek medyanı olmak üzere

$$n = \sum_{j=1}^{k} n_j \tag{6.2}$$

$$m = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & , \ n \ tek \ sayı \\ \dfrac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & , \ n \ çift \ sayı \end{cases} \tag{6.3}$$

3. Her bir örnekteki gözlem değerleri m den büyük olup olmama durumuna göre iki sınıftan birine ayrılır.

	GRUPLAR				**Toplam**
	1	2	$\cdots$	k	
$\boldsymbol{m}$'den büyük olanlar	G_{11}	G_{12}	$\cdots$	G_{1k}	$n/2$
$\boldsymbol{m}$'den küçük veya eşit olanlar	G_{21}	G_{22}	$\cdots$	G_{2k}	$n/2$
Toplam	n_1	n_2	$\cdots$	n_k	n

Burada;

G_{1j} : j-nci örnekte $\boldsymbol{m}$'den büyük olan birimlerin sayısı (gözlenen frekans), $(j = 1, 2, \ldots, k)$

G_{2j} : j-nci örnekte $\boldsymbol{m}$'den küçük veya eşit olan birimlerin sayısı (gözlenen frekans)

4. Test istatistiği belirlenir.

İkiden fazla bağımsız grubun karşılaştırılmasında kullanılan medyan testinde test istatistiği;

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(G_{ij} - B_{ij}\right)^2}{B_{ij}} \sim \chi^2_{(k-1)*(2-1)} \tag{6.4}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

B_{ij}: j-nci örnekte $\boldsymbol{m}$'den büyük / $\boldsymbol{m}$'den küçük veya eşit olan birimlerin sayısı (beklenen frekans), $(j = 1, 2, \ldots, k; i = 1, 2)$ olup;

$$B_{ij} = \frac{n_j * (n/2)}{n} = \frac{n_j}{2} \ , (j = 1, 2, \ldots, k; i = 1, 2) \qquad (6.5)$$

eşitliği ile hesaplanır. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri χ_h^2 olsun.

5. Karar kuralı belirlenerek kara verilir.

H_0 hipotezi doğru iken gözlenen frekanslar ile beklenen frekansların birbirine yakın ya da eşit çıkması ve böylece test istatistiğinin küçük bir değer alması beklenir.

Eğer H_1 hipotezi doğru ise bu durumda gözlenen frekanslar ile beklenen frekansların birbirinden farklı olması ve böylece test istatistiğinin de büyük bir değer alması beklenir. Buna göre α önem seviyesi olmak üzere H_1 hipotezi altında kritik değer $\chi_t^2 = \chi^2_{(k-1)*(2-1);\,\alpha}$ iken; eğer $\chi_h^2 > \chi_t^2$ (yani $p < \alpha$) ise H_0 hipotezi ret edilir, eğer $\chi_h^2 \leq \chi_t^2$ (yani $p \geq \alpha$) ise H_0 hipotezi ret edilemez.

SPSS Algoritması

Adım 1. İlgilenilen değişken (bağımlı değişken) ve faktör (grup) değişkeni özellikleri ile **Variable View** sayfasında birlikte tanımlanır. Grup değişkeninin kategorileri **Value** hücresinde kodlanır.

Adım 2. Bağımlı değişken değerleri ilgili sütuna grup sırasına göre alt alta ve grup kategorileri de kendisine ait sütuna n_1 tane "1", n_2 tane "2"… vs şeklinde girilir.

Adım 3. Analyze > Nonparametric Tests > Legacy Dialogs > K Independent Samples…yolu izlenerek açılacak olan ekranda, bağımlı değişken seçilerek **Test Variable List işlem** kutusuna ve Grup değişkeni seçilerek **Grouping Variable** işlem kutusuna aktarılır. Aktarma işleminden sonra aktif konuma gelen **Define Range** penceresi açılarak bu pencerede grup değişkeninin değer aralığı tanımlanır ve **Continue** tıklanır. Bu ekranda yer alan **Test Type** bölümünden **Median** işaretlenir. Yine aynı ekranda bulunan **Exact** penceresi açılarak p olasılık değerinin hesaplanmasında gerekli olan **Exact** seçeneği işaretlenir.

Adım 4. Continue ve **OK** düğmeleri tıklanarak test işlemi bitirilir. Sonuçlar **Output** sayfasında tablo halinde sunulur. Sonuç tablosunda test istatistiğinin hesaplanan değerini (χ_h^2) ve p olasılık değerini belirleyebiliriz. Eğer α önem seviyesi olmak üzere, eğer $p < \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $p \geq \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

ÖRNEK 6.1 A, B ve C şehirlerinde yaşayan üniversite mezunu çalışanlar arasından rastgele seçilen 12'şer birimlik örneklerden haftalık sosyal amaçlı harcamaya (TL) ilişkin aşağıdaki veri düzenlenmiştir. Buna göre %5 önem seviyesinde söz konusu şehirlere ait haftalık sosyal amaçlı harcama medyanlarının benzer olup olmadığına karar veriniz?

ŞEHİRLER		
A	**B**	**C**
100 80 110 115	141 152 160 133	153 172 105 111 165
130 85 87 96 99	129 139 128 117	180 112 119 164
132 131 145	93 122 136 154	185 177 196

Çözüm Bağımlı değişken (X): Haftalık sosyal amaçlı harcama (TL)… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Faktör (Gruplama Değişkeni): Şehir…. Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

Faktör düzeyleri $\begin{cases} A\ şehri\ (1-nci\ grup) \\ B\ şehri\ (2-nci\ grup) \\ C\ şehri\ (3-ncü\ grup) \end{cases}$ gruplar bağımsız olup grup sayısı $k=3$

Hipotezler

$H_0:\ M_1 = M_2 = M_3 = M$

$H_1:$ En az bir M_j diğerlerinden farklı

Test istatistiğinin değerini hesaplayabilmek için önce üç grubu birleştirerek birleştirilmiş grubu oluşturalım ve bu grubun medyanını hesaplayalım. $n_1 = n_2 = n_3 = 12$ olup, birleştirilmiş örnek hacmi $n=36$ çift sayıdır. Buna göre birleştirilmiş grup medyanı

$$m = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{X_{(18)} + X_{(19)}}{2} = \frac{130+131}{2} = 130{,}5$$

bulunur. Üç şehire ait gözlem değerlerini $m = 130{,}5$ değerinden büyük olup olmama durumuna göre iki sınıfa ayıralım.

	ŞEHİRLER			**Toplam**
	A	B	C	
$\boldsymbol{m = 130,5}$’dan büyük olanlar	3 6	7 6	8 6	$n/2 = 18$
$\boldsymbol{m}$**=130,5**’dan küçük veya eşit olanlar	9 6	5 6	4 6	$n/2 = 18$
Toplam	$n_1 = 12$	n_2=12	$n_3 = 12$	$n = 36$

$B_{ij} = \frac{n_j}{2} = \frac{12}{2} = 6\ \ (j = 1,2,3; i = 1,2;\ n_1 = n_2 = n_3 = 12$ olduğundan)

Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri;

$$\chi_h^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(G_{ij} - B_{ij}\right)^2}{B_{ij}} = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(7-6)^2}{6} + \frac{(8-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(4-6)^2}{6} = 4{,}66$$

olarak bulunur.

Karar: H_1 hipotezi göre karar kuralı $\chi_h^2 > \chi_t^2$ ise H_0 hipotezi ret edilir, aksi takdirde kabul edilir. $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde H_1 hipotezi altında kritik değer $\chi_t^2 = \chi^2_{(k-1)*(2-1);\,\alpha} = \chi^2_{2;0,05} = 5,99$ olup; 4,66<5,99 yani $\chi_h^2 < \chi_t^2$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Buna göre A, B ve C şehirlerinde üniversite mezunu çalışanların haftalık sosyal amaçlı harcamalarına ait dağılımlar konum parametreleri bakımından farklılık göstermemektedirler.

<u>Spss çözümü</u>

Gözlem değerlerinin sınıflara dağılımı ($m = 130,5$)

		ŞEHİR		
		A şehri	B şehri	C şehri
harcama	> Median	3	7	8
	<= Median	9	5	4

Test Statistics

	HARCAMA
N	36
Median	130,5000
Chi-Square	4,667[b]
df	2
Asymp. Sig.	,097
Exact Sig.	,175
Point Probability	,114

Karar: $p = 0,175$ ve $\alpha = 0,05$ için $p > \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Buna göre A, B ve C şehirlerinde üniversite mezunu çalışanların haftalık sosyal amaçlı harcamalarına ait dağılımlar konum parametreleri bakımından farklılık göstermemektedirler.

6.2. KRUSKAL – WALLIS H TESTİ

İkiden fazla bağımsız grubu konum parametresi olarak dağılım fonksiyonlarının, medyanlarının veya faktör düzeyleri etkilerinin benzerliği yönünden karşılaştırılmayı amaçlayan bir tekniktir. Parametrik tekniklerden tek faktör varyans analizinde kullanılan F-testinin alternatifidir. Tek faktör varyan analizinde model denkleminin;

$$X_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \ , \ i = 1, 2, \dots, n_j; j = 1, 2, \dots, k \qquad (6.6)$$

olduğu bilinmektedir. Burada X bağımlı değişken olup;

X_{ij} : Faktörün j-nci düzeyinde (j-nci bağımsız grupta) i-nci birime ait bağımlı değişken değeri

μ : Genel kitle ortalaması

τ_j : Faktörün j-nci düzeyinin bağımlı değişken üzerine etkisi ($\tau_j = \mu_{.j} - \mu$, ($j = 1, 2, \dots, k$)

$\mu_{.j}$: Faktörün j-nci düzeyine ait alt kitle ortalaması

ε_{ij} : Hata terimi

dir. Burada $\sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j = 0$ olduğu varsayılır.

Varsayımları

i. İlgilenilen değişken (bağımlı değişken) sürekli olmalı, Faktör (gruplama değişkeni) nitel/nicel olabilir ama ölçme düzeyi sınıflama veya sıralama olmalıdır.

ii. İlgilenilen değişkenin ölçme düzeyi en az sıralama olmalı

iii. $k > 2$ bağımsız grup sayısı (faktör düzey sayısı) olmak üzere örnek birimleri gruplardan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak çekilmeli

Test İşleminin Algoritması

1. Hipotezler kurulur

Kruskal-Wallis H testinde hipotezler farklı kaynaklarda farklı biçimlerde tanımlanmaktadır. Ancak; hepsi de aynı anlama gelmektedir.

a) M_j: j-nci grubun (kitlenin) medyanı $(j = 1, 2, \dots, k)$

M : Genel kitle medyanı olmak üzere

$H_0 :\ M_1 = M_2 = \cdots = M_k = M$

$H_1 :$ En az bir M_j diğerlerinden farklı (6.7)

şeklinde veya

b) $F_j(x)$: j-nci grubun (kitlenin) dağılım fonksiyonu olmak üzere $(j = 1, 2, \dots, k)$

$H_0 :\ F_1(x) = F_2(x) = \cdots = F_k(x)$

$H_1 :$ En az bir x için $F_j(x)$ diğerlerinden farklı (6.8)

şeklinde ya da

c) $H_0 :\ \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k$

$H_1 :$ En az bir τ_j diğerlerinden farklı (6.9)

şeklinde oluşturulabilir.

2. k tane grubun her birinden rastgele ve birbirinden bağımsız olarak n_j birimlik örnekler çekilir. Bu takdirde örnek veri düzeni aşağıdaki gibi bir tablo ile verilebilir.

GRUPLAR			
1	**2**	**…**	**k**
X_{11} X_{21} $\vdots$ $X_{n_1 1}$	X_{12} X_{22} $\vdots$ $X_{n_2 2}$	$\cdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\cdots$	X_{1k} X_{2k} $\vdots$ $X_{n_k k}$
n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Bu örnekler birleştirilerek birleştirilmiş örnek oluşturulur ve birleştirilmiş örnekte örnek birimlerine sıra sayıları verilir. Eğer aynı değerli gözlemler varsa (ister aynı grup içerisinde olsun isterse farklı gruplarda olsun) bu gözlemlere verilmesi gereken sıra sayılarının ortalaması alınarak ortalama sıra sayısı verilir. Bu durumda yukarıda verilen örnek veri düzeni sıra sayısı veri düzenine dönüşür. Sıra sayıları veri düzeni R_{ij} : j-nci grupta i-nci örnek birimine verilen sıra sayısı olmak üzere aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sıra Sayıları Veri Düzeni Tablosu

GRUPLAR				
1	**2**	**…**	**k**	
R_{11} R_{21} $\vdots$ $R_{n_1 1}$	R_{12} R_{22} $\vdots$ $R_{n_2 2}$	$\cdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\cdots$	R_{1k} R_{2k} $\vdots$ $R_{n_k k}$	
n_1	n_2	$\cdots$	n_k	$n = \sum_{j=1}^{k} n_j$

3. Test istatistiği belirlenir.

Kruskal Wallis H testi için test istatistiği

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{R}_{.\,j} - \frac{n+1}{2}\right)^2 \qquad (6.10)$$

olarak tanımlıdır. Hesaplamalarda ise genellikle;

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R^2_{.\,j}}{n_j} - 3(n+1) \qquad (6.11)$$

eşitliği kullanılır. Bu iki eşitliğin birbirine eşit olduğu gösterilebilir (gösteriniz).

Bu eşitliklerde yer alan bazı notasyonların anlamı ve hesaplanması aşağıdaki bağıntılar yardımıyla yapılır.

$R_{.\,j}$: j-nci gruba verilen sıra sayılarının toplamı

$\overline{R}_{.\,j}$: j-nci gruba verilen sıra sayılarının ortalaması

$$R_{.\,j}=\sum_{i=1}^{n_j}R_{ij} \text{ ve } \overline{R}_{.\,j}=\frac{R_{.\,j}}{n_j}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}R_{ij} \quad ,(j=1,2,\dots,k) \tag{6.12}$$

$R_{.\,.}$: Sıra sayıları genel toplamı

$\overline{R}_{.\,.}$: Sıra sayıları genel ortalaması

$$R_{.\,.}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}R_{ij}=\sum_{j=1}^{k}R_{.\,j}=\frac{n(n+1)}{2} \tag{6.13}$$

$$\overline{R}_{.\,.}=\frac{R_{.\,.}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}R_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}n_j\overline{R}_{.\,j}=\frac{n+1}{2} \tag{6.14}$$

Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri H_h olsun.

4. Karar kuralı belirlenerek karar verilir.

α önem seviyesi olmak üzere H_1 hipotezine göre test istatistiğinin örnekleme dağılımı dikkate alınarak kritik nokta belirlenir ve karar kuralı oluşturulur. H istatistiğinin örnekleme dağılımı grup sayısına ve gruplardaki örnek birim sayılarına bağlı olarak farklılık göstermektedir.

a) $k=3$ ve $\forall n_j \leq 5$ iken H istatistiğinin kesin örnekleme dağılımı kullanılır. Yani bu koşullar altında H istatistiğinin hesaplanabileceği farklı durumların sayısı, her bir durumda alabileceği değerler ve bu değerleri alma olasılıkları hesaplanarak H istatistiğinin olasılık dağılımı oluşturulur. Bu dağılım kullanılarak kritik değer belirlenir. Bu yoldan kritik noktanın belirlenmesinde (T15) tablosundan yararlanılmaktadır. Bu tabloya göre α önem seviyesindeki kritik değer $Pr(H \geq H'_\alpha)=\alpha$ denklemini sağlayan H'_α olmak üzere, eğer $H_h \geq H'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Eğer $H_h < H'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Örneğin; $n_1=3,\ n_2=4, n_3=2$ ve $\alpha=0{,}05$ iken H'_α =?

(T15)'den kritik değerleri bulurken örneklere ait birim sayıları küçükten büyüğe doğru $(n_1\,,\ n_2,\ n_3)$ üçlüsü şeklinde sıralanır ve bu sıralı üçlünün tablodaki yeri bulunarak, bu üçlü için ayrılmış olan yerdeki sayısal değerler yardımıyla kritik değer belirlenir. Bize verilen örnek hacimlerine göre küçükten büyüğe sıralı olan üçlü $(n_1\,,\ n_2,\ n_3)=(2,\ 3,\ 4)$ şeklindedir.

(2, 3, 4)			
c = H'_α	p		
4,444 5,400 6,300	0,102 0,051 0,011	$\Pr(H \geq 4{,}444)=0{,}102$ $\Pr(H \geq 5{,}400)=0{,}051$ $\Pr(H \geq 6{,}300)=0{,}011$	$H'_\alpha=5{,}400$ alınır. Çünkü $\alpha=0{,}05$'e en yakın olasılık değeri $p=0{,}051$ dir.

b) $k=3$ ve $\forall n_j > 5$ veya $k>3$ ve $\forall n_j \geq 5$ iken H istatistiğinin Ki-Kare istatistiğine yaklaşımı kullanılır. Belirtilen bu koşullar altında;

$$H \sim \chi^2_{k-1} \tag{6.15}$$

olup, bu takdirde α önem seviyesindeki kritik değer $H'_\alpha=\chi^2_{k-1;\alpha}$ olacaktır. Karar kuralı ise eğer $H_h \geq H'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Eğer $H_h < H'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

c) $k \geq 3$ ve $\exists n_j < 5$ iken H istatistiğininΓ (gamma) veya β (beta) yaklaşımları kullanılır. (Bu yaklaşımlar burada tanıtılmayacaktır)

6.2.1 Aynı Değerli Gözlemlerin Olması Durumu

Kruskal – Wallis H testinde veriler içerisinde aynı değerleri gözlemlerin olması durumunda bu gözlemlere verilmesi gereken sıra sayılarının ortalaması olan ortalama sıra sayısı verilmektedir. Bu durum test istatistiğinin beklenen değerini etkilemezken varyansının küçülmesine neden olmaktadır. Varyansta meydana gelecek olan bu küçülmenin H istatistiğinin dağılımı üzerine olan etkisinin bir düzeltme terimi ile ortadan kaldırılabilmektedir. Söz konusu düzeltme terimi;

$$D.T. = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{s}(t_i^3 - t_i)}{n^3 - n} \tag{6.16}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada s : aynı değerli gözlem gruplarının sayısı ve t_i ; Aynı değerli gözlemlerin i-nci grubundaki birim sayısıdır.

Aynı değerli gözlemlerin olması durumunda kullanılacak olan test istatistiği

$$H^* = \frac{H}{D.T.} \tag{6.17}$$

olarak verilmektedir. H^* istatistiğinin örnekleme dağılımı H istatistiğinin örnekleme dağılımı ile aynı olup:

$$H^* = \begin{cases} \text{Kesin örnekleme dağılımı}, & k = 3 \text{ ve } \forall n_j \leq 5 \text{ iken} \\ \chi^2_{k-1} \text{ yaklaşımı}, & k = 3 \text{ ve } \forall n_j > 5 \text{ veya } k > 3 \text{ ve } \forall n_j \geq 5 \text{ iken} \\ \Gamma \text{ veya } \beta \text{ yaklaşımı}, & k \geq 3 \text{ ve } \exists n_j < 5 \text{ iken} \end{cases} \tag{6.18}$$

şeklinde ifade edilir. Bu sebeple H^* test istatistiğinin kullanıldığı durumda da karar kuralı aynıdır. Yani $H_h^* \geq H_\alpha^{*\prime}$ ise H_0 hipotezi ret edilir. Eğer $H_h^* < H_\alpha^{*\prime}$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.