T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

İST.482 PARAMETRİK OLMAYAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

14. Hafta

özenilen üniversite

BÖLÜM 7

İKİ BAĞIMLI GRUP KARŞILAŞTIRILMASI İÇİN TESTLER

Bu Bölümde iki bağımlı gruptan düzenlenen verilerin analiz edilmesinde kullanılan parametrik olmayan testler incelenecektir. Bu testler;

i. İşaret testi

ii. Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları testi

iii. Mc Nemar testi

olarak bilinmektedir. İki bağımlı gruba ait veriler genellikle "işlem –öncesi işlem sonrası" veya "eşleştirme" tasarımları kullanılarak oluşturulmaktadır. Bu tasarımlar yardımı ile oluşturulan iki bağımlı grubun ilgili değişkene göre dağılımları normallik varsayımını sağlıyorsa, bu grupları karşılaştırmada parametrik tekniklerden t –testi kullanılmaktadır. Eğer normallik varsayımı sağlanmıyorsa, bu durumda kullanılabilecek testler t –testinin alternatifi olan ve yukarıda sıraladığımız parametrik olmayan testlerdir.

7.1 İşaret Testi

İki bağımlı grup karşılaştırmasında kullanılacak olan işaret testi, tek grup karşılaştırmalarında kullanılan işaret testinin kullanımına benzerdir. Ancak; önce iki bağımlı grup üzerine bir dönüşüm uygulayarak iki bağımlı grup tek gruba dönüştürülür. Daha sonra bu grup üzerine bilinen işaret testi uygulanır. Testin varsayımları:

i) İlgilenilen değişkenin ölçme düzeyi en az sıralamadır

ii) İlgilenilen değişken süreklidir.

iii) Veriler (X_1, Y_1), $(X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ gibi n tane gözlem çiftinden oluşur.

Test İşleminin Algoritması

1. Hipotezler oluşturulur

M_1: Birinci grubun bilinmeyen medyan parametresi

M_2: İkinci grubun bilinmeyen medyan parametresi

M_D: Farklar grubun bilinmeyen medyan parametresi, ($M_D = M_1 - M_2$) olmak üzere:

a) $H_0 \colon M_D = 0$ | **b)** $H_0 \colon M_D = 0$ | **c)** $H_0 \colon M_D = 0$

$H_1 \colon M_D < 0$ | $H_1 \colon M_D > 0$ | $H_1 \colon M_D \neq 0$

2. Fraklar grubunu oluşturmak için örnek birimleri üzerinde $D_i = X_i - Y_i, i = \overline{1, n}$ dönüşümü uygulanır. $D_i = 0$ sonucu ortaya çıkarsa, bu sonucu veren (X_i, Y_i) ikilisi işlemden çıkarılır. Bu

durum sadece çıkartılan gözlem sayısı kadar örnek hacminin azalmasına yol açar ve yeni örnek hacmi ile işleme devam edilir.

3. Oluşturulan farklar grubu üzerinde, farkların pozitif olup olmama durumuna göre iki değer alan; $\delta_i = \begin{cases} 1 \ , & D_i > 0 \\ 0 \ , & D_i < 0 \end{cases}$, $i = \overline{1,n}$ rastgele değişkenini tanımlayalım. H_0 hipotezi doğru iken, $i = 1,2,\dots,n$ için $\delta_i \sim Bernoulli(1, p = 1/2)$ dağılımlı ve birbirinden bağımsızdır.

4. Test istatistiği ve örnekleme dağılımı belirlenir. İşaret testinde test istatistiği $k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ şeklinde tanımlı olup, bağımız Bernoulli değişkenlerinin toplamıdır. Bu sebeple test istatistiğinin örnekleme dağılımı için H_0 hipotezi doğru iken $k \sim Binom(n\ ,\ p = 1/2)$ olacaktır. Bu durumda k istatistiğinin olasılık fonksiyonu;

$$f(k) = \binom{n}{k}(1/2)^k(1/2)^{n-k} = \binom{n}{k}(1/2)^n, k = 0,1,2,\dots,n$$

şeklinde olacaktır. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri k_h olsun.

5. Karar kuralı belirlenir. α önem seviyesi olmak üzere H_1 hipotezi altında test istatistiğinin örnekleme dağılımından elde edilecek olan kritik değer dikkate alınarak karar kuralı belirlenir. H_1 hipotezine göre karar kuralları aşağıdaki tabloda belirtilmiştir.

H_1 Hipotezi	Karar Kuralı	Kritik değerin bulunması
$H_1: M_D < 0$	$k_h \le k_\alpha$ ise H_0 ret edilir $k_h > k_\alpha$ ise H_0 ret edilemez	$Pr(k \le k_\alpha) = \alpha$ ise k_α =?
$H_1: M_D > 0$	$k_h \ge k'_\alpha$ ise H_0 ret edilir $k_h < k'_\alpha$ ise H_0 ret edilemez	$Pr(k \ge k'_\alpha) = \alpha$ ise k'_α =?
$H_1: M_D \ne 0$	$k_h \le k_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $k_h \ge k'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilir. $k_{\frac{\alpha}{2}} < k_h < k'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilemez	$Pr\left(k \le k_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$ ise$k_{\frac{\alpha}{2}}$ =? $Pr\left(k \ge k'_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$ ise$k'_{\frac{\alpha}{2}}$ =?

7.2 Wilcoxon İşaretli Sıra Sayılar Testi

İki bağımlı grup analizlerinde bağımlı değişken için ölçme düzeyinin eşit aralıklı veya oranlama düzeyinde olması halinde işaret testi bilgi kaybına neden olmaktadır. Bu durumlarda daha güçlü test olan Wilcoxon işaretli ıra sayıları testinin kullanılması tercih edilmelidir. İki bağımlı gruba ait veri düzeni (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), … , (X_n, Y_n) ile gösterilen gözlem çiftlerinden oluşmakta ve bu veri düzeninden $D_i = X_i - Y_i, i = \overline{1,n}$ dönüşümü ile farklar grubu oluşturulur. Testin varsayımları:

i) Farklar grubu sürekli bir rastgele değişkendir.

ii) Fraklar grubunu oluşturan değişkenin ölçme düzeyi en az eşit aralıklıdır.

iii) Farklar grubuna ait kitlenin dağılımı simetriktir

iii) Veriler (X_1, Y_1), $(X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ gibi n tane gözlem çiftinden veya $D_i = X_i - Y_i, i = \overline{1, n}$ dönüşümü ile elde edilen n tane farktan oluşur.

Test İşleminin Algoritması

1. Hipotezler oluşturulur

M_1: Birinci grubun bilinmeyen medyan parametresi

M_2: İkinci grubun bilinmeyen medyan parametresi

M_D: Farklar grubun bilinmeyen medyan parametresi, ($M_D = M_1 - M_2$) olmak üzere:

a) $H_0: M_D = 0$ **b)** $H_0: M_D = 0$ **c)** $H_0: M_D = 0$

$H_1: M_D < 0$ $H_1: M_D > 0$ $H_1: M_D \neq 0$

2. Fraklar grubunu oluşturmak için örnek birimleri üzerinde $D_i = X_i - Y_i, i = \overline{1, n}$ dönüşümü uygulanır. $D_i = 0$ sonucu ortaya çıkarsa, bu sonucu veren (X_i, Y_i) ikilisi işlemden çıkarılır. Bu durum sadece çıkartılan gözlem sayısı kadar örnek hacminin azalmasına yol açar ve yeni örnek hacmi ile işleme devam edilir.

3. Oluşturulan farklar grubu üzerinde, farkların pozitif olup olmama durumuna göre iki değer alan; $\delta_i = \begin{cases} 1 \ , & D_i > 0 \\ 0 \ , & D_i < 0 \end{cases}$ $, i = \overline{1, n}$ rastgele değişkenini tanımlayalım. H_0 hipotezi doğru iken, $i = 1, 2, \dots, n$ için $\delta_i \sim Bernoulli(1, p = 1/2)$ dağılımlı ve birbirinden bağımsızdır.

4. İkinci adımda elde edilen D_i farklarının mutlak değerleri alınır ve $|D_i|$'lere sıra sayıları verilir. Aynı değerli olanlara ortalama sıra sayısı verilmesi gerektiği unutulmamalıdır. $|D_i|$'lere verilen sıra sayılarını $r(|D_i|)$ ile gösterelim.

5. Test istatistiği ve örnekleme dağılımı belirlenir. Wilcoxon işaretli sıra sayıları testi için test istatistiği;

$$T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$$

dir. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri T_h^+ ile gösterilsin.

6) Karar kuralı belirlenir ve karar verilir.

α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre test istatistiğinin örnekleme dağılımından yararlanarak kritik değer bulunur ve karar kuralı belirlenir. H_1 hipotezine göre karar kuralları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

H_1 Hipotezi	Karar Kuralı	Kritik değerin bulunması
$H_1: M_D < 0$	$T_h^+ \leq d_\alpha$ ise H_0 ret edilir $T_h^+ > d_\alpha$ ise H_0 ret edilemez	$Pr(T_h^+ \leq d_\alpha) = \alpha$ ise d_α =? (T10 Tablosu)
$H_1: M_D > 0$	$T_h^+ \geq d'_\alpha$ ise H_0 ret edilir $T_h^+ < d'_\alpha$ ise H_0 ret edilemez	$d'_\alpha = \dfrac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$

$H_1: M_D \neq 0$	$T_h^+ \leq d_{\frac{\alpha}{2}}$ veya$T_h^+ \geq d'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilir. $d_{\frac{\alpha}{2}} < T_h^+ < d'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilemez	$Pr\left(T_h^+ \leq d_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ ise $d_{\frac{\alpha}{2}} =?$ $d'_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} - d_{\frac{\alpha}{2}}$

Örnek:7.1 Rastgele seçilen10 bayanın ağırlıkları ölçülmüş (X_i) ve sonra bu bayanlara bir zayıflama rejimi 4 ay boyunca uygulanmıştır. Zayıflama rejiminden sonra bayanların ağırlıkları tekrar ölçülmüştür (Y_i). Elde edilen veriler aşağıda verilmiştir. Zayıflama rejiminin etkili olduğu %5 önem seviyesinde

a) İşaret testi ile

b) Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları testi ile söylenebilir mi?

$X_i(Rejimden\ önce)$: 82 81 80 68 70 71 68 67 66 61

$Y_i(Rejimden\ sonra)$: 80 82 80 63 65 66 62 60 59 59

Çözüm: Değişken : Ağırlık …. Nicel türden, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Grup: $\begin{cases} \text{Rejim öncesi (I. Grup)} \\ \text{Rejim sonrası (II. Grup)} \end{cases}$…. Gruplar bağımlı

a) İşaret testini uygulayalım.

Test edilecek olan hipotezleri oluşturalım. M_1: Rejim öncesi grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_2: Rejim sonrası grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_D: Farklar grubunun bilinmeyen medyan parametresi, $(M_D = M_1 - M_2)$ olmak üzere:

$H_0: M_D = 0$

$H_1: M_D > 0$

Test istatistiği ve örnekleme dağılımı: İşaret testinde test istatistiği $k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ olup, örnekleme dağılımı H_0 doğru iken $k \sim Binom(n, p = 1/2)$ dağılımıdır. Test istatistiğinin alabileceği değeri bulalım:

X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i	
82	80	2	1	$k_h = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 8$
81	82	-1	0	**Karar** $\alpha = 0{,}05$ için H_1'e göre karar
80	80	0	İşlem dışı	kuralı $k_h \geq k'_\alpha$ ise H_0 ret edilir. H_0 doğru
68	63	5	1	iken $p = 1/2$ olduğundan binom
70	65	5	1	dağılımı simetrik bir dağılım gösterir. Bu
71	66	5	1	sebeple $k'_\alpha = n - k_\alpha$ ile bulunabilir.
68	62	6	1	Burada bir gözlem çifti işlem dışı

67	60	7	1	tutulduğundan dolayı örnek hacmi $n = 9$ ve $p = 1/2$ iken Tablo T.9'dan $k_\alpha = 1$ olarak bulunur. Buna göre $k'_\alpha = 9 - 1 = 8$ bulunur.
66	59	7	1	
61	59	2	1	

Sonuç olarak $k_h = k'_\alpha = 8$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre zayıflama rejimi bayan ağırlıkları üzerinde etkili olmuştur.

b) Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları testini uygulayalım.

Test edilecek olan hipotezleri oluşturalım. M_1: Rejim öncesi grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_2: Rejim sonrası grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_D: Farklar grubunun bilinmeyen medyan parametresi, ($M_D = M_1 - M_2$) olmak üzere:

$H_0: M_D = 0$

$H_1: M_D > 0$

Wilcoxon işaretli sıra sayıları testi için test istatistiği; $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$ olup, test istatistiğinin alabileceği değeri bulalım.

X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i	$\|D_i\|$	$r(\|D_i\|)$	$r(\|D_i\|)\delta_i$
82	80	2	1	2	2,5	2,5
81	82	-1	0	1	1	0
80	80	0	İşlem dışı	…….	…..	…..
68	63	5	1	5	5	5
70	65	5	1	5	5	5
71	66	5	1	5	5	5
68	62	6	1	6	7	7
67	60	7	1	7	8,5	8,5
66	59	7	1	7	8,5	8,5
61	59	2	1	2	2,5	2,5
					Toplam	$T_h^+ = 44$

Karar: $\alpha = 0{,}05$ için H_1'e göre karar kuralı $T_h^+ \geq d'_\alpha$ ise H_0 ret edilir. Burada

$d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$ dır. T.10 tablosundan $n = 9$ ve $\alpha = 0{,}05$ için;

$Pr(T^+ \leq 8) = 0{,}0488 < 0{,}05$

$Pr(T^+ \leq 9) = 0{,}0645 > 0{,}05$ olup, 0,0488 değeri 0,05'e daha yakın olduğundan $d_\alpha = 8$ alınır. Sonuç olarak $d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha = \frac{9\times10}{2} - 8 = 37$ ve böylece $44 > 37$ yani $T_h^+ > d'_\alpha$

olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre zayıflama rejimi bayan ağırlıkları üzerinde etkili olmuştur.

Örnek:7.2 Bir hastalığın tedavisinde iki farklı yöntem uygulanmaktadır. Bu tedavi yöntemlerinden birincisinin daha iyi olduğu iddia edilmektedir. Hastaların iyileşme süresi üzerinden yaşlarının etkisini arındırmak amacıyla 7 farklı yaş grubundan birer çift hasta rastgele seçilmiştir. Sonra bu çiftlerin her birindeki eşler rastgele iki gruba birer tane ayrılarak yedişerli iki grup oluşturulmuştur. Gruplara sözü edilen tedavi yöntemleri uygulanmış ve iyileşme süreleri aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Buna göre %10 önem seviyesinde iddia edilen durumun geçerliliğini;

a) İşaret testi ile
b) Wilcoxon işaretli sıra sayıları testi ile belirleyiniz.

X_{1i}: 14 15 10 9 8 7 5
X_{2i}: 18 14 16 12 9 10 12

Çözüm a) Değişken : İyileşme süresi …. Nicel türden, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Grup: $\begin{cases} 1.\,\text{Yöntemle tedavi edilenler (I. Grup)} \\ 2.\,\text{Yöntemle tedavi edilenler (II. Grup)} \end{cases}$ …. Gruplar bağımlı (yaş faktörü bakımından)

a) İşaret testini uygulayalım.

Test edilecek olan hipotezleri oluşturalım. M_1: 1. Yöntemle tedavi edilenler grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_2: 2. Yöntemle tedavi edilenler grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_D: Farklar grubunun bilinmeyen medyan parametresi, ($M_D = M_1 - M_2$) olmak üzere:

$H_0: M_D = 0$

$H_1: M_D < 0$

Test istatistiği ve örnekleme dağılımı: İşaret testinde test istatistiği $k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ olup, örnekleme dağılımı H_0 doğru iken $k \sim Binom(n, p = 1/2)$ dağılımıdır. Test istatistiğinin alabileceği değeri bulalım:

X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i
14	18	-4	0
15	14	1	1
10	16	-6	0
9	12	-3	0
8	9	-1	0
7	10	-3	0
5	12	-7	0

$k_h = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$ **Karar** $\alpha = 0{,}10$ için H_1'e göre karar kuralı $k_h \leq k_\alpha$ ise H_0 ret edilir. H_0 doğru iken $p = 1/2$ olduğundan binom dağılımı simetrik bir dağılım gösterir. Burada örnek hacmi $n = 7$ ve $p = 1/2$ iken Tablo T.9'dan $k_\alpha = 1$ olarak bulunur.

Sonuç olarak $k_h = k_\alpha = 1$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre birinci tedavi yöntemi hastaların iyileşme süresi üzerinde etkili olmuştur.

b) Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları testini uygulayalım.

Test edilecek olan hipotezleri oluşturalım. M_1: 1.Yöntemle tedavi edilenler grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_2: 2.Yöntemle tedavi edilenler grubunun bilinmeyen medyan parametresi

M_D: Farklar grubunun bilinmeyen medyan parametresi, ($M_D = M_1 - M_2$) olmak üzere:

$H_0: M_D = 0$

$H_1: M_D < 0$

Wilcoxon işaretli sıra sayıları testi için test istatistiği; $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$ olup, test istatistiğinin alabileceği değeri bulalım.

X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	δ_i	$\lvert D_i\rvert$	$r(\lvert D_i\rvert)$	$r(\lvert D_i\rvert)\delta_i$
14	18	-4	0	4	5	0
15	14	1	1	1	1,5	1,5
10	16	-6	0	6	6	0
9	12	-3	0	3	3,5	0
8	9	-1	0	1	1,5	0
7	10	-3	0	3	3,5	0
5	12	-7	0	7	7	0
					Toplam	$T_h^+ = 1{,}5$

Karar: $\alpha = 0{,}10$ için H_1'e göre karar kuralı $T_h^+ \leq d_\alpha$ ise H_0 ret edilir. Burada

T.10 tablosundan $n = 7$ ve $\alpha = 0{,}10$ için; $Pr(T^+ \leq 6) = 0{,}1094 > 0{,}05$

$Pr(T^+ \leq 5) = 0{,}0781 < 0{,}05$ olup, 0,1094 değeri 0,10'a daha yakın olduğundan $d_\alpha = 6$ alınır. Sonuç olarak $1{,}5 < 6$ yani $T_h^+ < d_\alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre birinci tedavi yöntemi hastaların iyileşme süresi üzerinde etkili olmuştur.

SORU: Rastgele seçilen 9 hastanın işlem öncesi ve işlem sonrası tahlil sonuçları aşağıda verilmiştir. Elde edilen bulgulara göre uygulanan işlemin tahlil sonucunda fark oluşturup oluşturmadığına %5 önem seviyesinde:

a) İşaret testi ile **b)** Wilcoxon işaretli sıra sayıları testi ile karar veriniz?

İşlem öncesi: 14 24 32 18 24 30 34 35 38

İşlem sonrası: 15 21 30 20 28 37 40 42 39

Örnek:7.3 Süt veriminin arttırılması amacı ile yapılan çalışmalar sonucunda iki farklı yem türü geliştirilmiştir. Bunlardan ikincisinin daha iyi olduğu iddia edilmektedir. Süt veriminin üzerinden ineklerin ırklarının etkisini arındırmak için sekiz ırkın her birinden birer çift inek rastgele seçilmiştir. Sonra bu çiftlerin her birindekiler rastgele iki gruba birer tane ayrılarak sekizerli iki grup oluşturulmuştur. Birinci ve ikinci gruba sözü edilen yemler verilerek izleyen hafta içindeki ortalama süt verimleri aşağıdaki gibi tespit edilmiştir. Bu verilere göre söz konusu iddianın doğruluğunu %5 önem seviyesinde:

a) İşaret testi ile

b) Wilcoxon işaretli sıra sayıları testi ile araştırınız.

X_{1i}: 31 34 26 21 18 17 19 15

X_{2i}: 36 32 30 26 28 27 23 20

<u>Çözüm:</u> Değişken(X): Süt verimi (kg)…. Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Faktör(Grup): Yem türü…Nitel ve ölçme düzeyi sınıflama

$$\left.\begin{array}{l} I.Grup: Birinci\ yem\ türü \\ II.Grup: İkinci\ yem\ türü \end{array}\right\}$$ Gruplar ırk faktörü bakımından bağımlı gruplar

a) M_1: Birinci grubun medyan parametresi

M_2: İkinci grubun medyan parametresi

M_D: Farklar grubunun medyan parametresi ($M_D = M_1 - M_2$), olmak üzere test edilecek olan hipotezler;

$H_0: M_D = 0$

$H_1: M_D < 0$ (yani $M_1 < M_2$) şeklinde oluşturulur. İşaret testi için test istatistiği ve örnekleme dağılımı:

$k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sim Binom\left(n, p = \frac{1}{2}\right)$ "H_0 doğru iken". Burada $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0\ ise \\ 0, & D_i < 0\ ise \end{cases}$ olarak tanımlıdır.

X_{1i}	X_{2i}	$D_i = X_{1i} - X_{2i}$	δ_i	Karar
31	36	-5	0	Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri: $n = 8$
34	32	2	1	için $k_h = \sum_{i=1}^{8} \delta_i = 1$dir.
26	30	-4	0	$\alpha = 0{,}05$ için H_1'e göre kritik değer (T9) tablosundan
21	26	-5	0	$P(k \leq 1) = 0{,}0039 + 0{,}0313 = 0{,}0352 < 0{,}05$
18	28	-10	0	$P(k \leq 2) = 0{,}0352 + 0{,}1094 = 0{,}1446 > 0{,}05$
17	27	-10	0	k_α =1 bulunur. Buna göre $k_h = k_\alpha$ =1 olduğundan H_0
19	23	-4	0	hipotezi ret edilir. Böylece %95 güven seviyesinde
15	20	-5	0	ikinci yem türünün daha iyi olduğu iddiası geçerlidir.

b) M_1: Birinci grubun medyan parametresi

M_2: İkinci grubun medyan parametresi

M_D: Farklar grubunun medyan parametresi ($M_D = M_1 - M_2$), olmak üzere test edilecek olan hipotezler;

H_0: $M_D = 0$

H_1: $M_D < 0$ (yani $M_1 < M_2$) şeklinde oluşturulur.

Wilcoxon işaretli sıra sayıları testi için test istatistiği: $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\,\delta_i$ dir. Burada $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0\ ise \\ 0, & D_i < 0\ ise \end{cases}$ olarak tanımlıdır.

Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri;

X_{1i}	X_{2i}	$D_i = X_{1i} - X_{2i}$	δ_i	$\lvert D_i \rvert$	$r(\lvert D_i \rvert)$	$r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	Karar
31	36	-5	0	5	5	0	$T_h^+ = 1$ dir. $\alpha = 0{,}05\ ve\ n = 8$ için H_1'e göre kritik değer (T10) tablosundan $d_\alpha = 6$ bulunur. Buna göre 1<6 yani $T_h^+ < d_\alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Böylece %95 güven seviyesinde ikinci yem türünün daha iyi olduğu iddiası geçerlidir.
34	32	2	1	2	1	1	
26	30	-4	0	4	2,5	0	
21	26	-5	0	5	5	0	
18	28	-10	0	10	7,5	0	
17	27	-10	0	10	7,5	0	
19	23	-4	0	4	2,5	0	
15	20	-5	0	5	5	0	

7.3 McNemar Testi

Bu test iki bağımlı örnek problemlerinde ölçüm(işlem) sonucuna göre eşlerin kategorilere ayrıldığı durumlarda kullanılır. Eşlerin;

a) Tahlil sonucunun pozitif veya negatif olmasına göre sınıflandırılması

b) Tedavi sonucunda yaşamlarını sürdürüp sürdürmeme durumuna göre sınıflandırılması bu duruma örnek olarak verilebilir.

İki bağımlı örnek problemlerinde eşler veya birimler iki ayrık sınıftan oluşan sınıflara sınıflandırma yapıldığında 2×2 boyutlu bir frekans tablosu elde edilir. Eşleştirme tasarımı için bu tablonun genel şekli aşağıdadır.

		İşlem Grubu		TOPLAM
		Negatif	Pozitif	
Kontrol Grubu	Negatif	A	C	A+C
	Pozitif	B	D	B+D
	TOPLAM	A+B	C+D	n

Bu tablodaki sembollerin anlamı:

n: Eş sayısı

A: Hem kontrol hem de işlem grubundaki birimlerin tahlil sonucunun negatif olduğu eşlerin sayısı

B: Kontrol grubundaki birimin tahlil sonucunun pozitif ve işlem grubundaki birimin tahlil sonucunu negatif olduğu eşlerin sayısı

C: Kontrol grubundaki birimin tahlil sonucunun negatif ve işlem grubundaki birimin tahlil sonucunu pozitif olduğu eşlerin sayısı

D: Hem kontrol hem de işlem grubundaki birimlerin tahlil sonucunun pozitif olduğu eşlerin sayısı

A+B: İşlem grubundaki birimlerin tahlil sonucunun negatif olduğu eşlerin sayısı

C+D: İşlem grubundaki birimlerin tahlil sonucunun pozitif olduğu eşlerin sayısı

A+C: Kontrol grubundaki birimlerin tahlil sonucunun negatif olduğu eşlerin sayısı

B+D: Kontrol grubundaki birimlerin tahlil sonucunun pozitif olduğu eşlerin sayısı

İşlem öncesi-işlem sonrası tasarımı için veri tablosunun genel biçimi şu şekildedir.

$i - nci$ hasta tedavi öncesi ve tedavi sonrası tahlil sonuçlarının ND içinde ve ND dışında olma durumlarına göre sınıflandırılmış olsun. Bu durumda tablodaki sembollerin anlamları şöyledir:

		Tedavi sonrası		TOPLAM
		ND içinde	ND dışında	
Tedavi öncesi	ND içinde	A	C	A+C
	ND dışında	B	D	B+D
	TOPLAM	A+B	C+D	n

(ND:Normal değerler)

n: toplam hasta sayısı

A: Hem tedavi öncesi hem de tedavi sonrası tahlil sonucu ND içinde olan hasta sayısı

B: Tahlil sonucu tedavi öncesi ND dışında iken tedavi sonrası ND içinde olan hasta sayısı

C: Tahlil sonucu tedavi öncesi ND içinde iken tedavi sonrası ND dışında olan hasta sayısı

D: Hem tedavi öncesi hem de tedavi sonrası tahlil sonucu ND dışında olan hasta sayısı

A+B: Tedavi sonrası tahlil sonucu ND içinde olan hasta sayısı

C+D: Tedavi sonrası tahlil sonucu ND dışında olan hasta sayısı

A+C: Tedavi öncesi tahlil sonucu ND içinde olan hasta sayısı

B+D: Tedavi öncesi tahlil sonucu ND dışında olan hasta sayısı

Bir işlem altında ilgilenilen özellikte olanların oranı π_1 ve diğer işlem altında ilgilenilen özellikte olanların oranı π_2 olmak üzere, McNemar testinde test edilecek olan hipotezler:

a) $H_0: \pi_1 = \pi_2$ **b)** $H_0: \pi_1 = \pi_2$ c) $H_0: \pi_1 = \pi_2$

$H_1: \pi_1 > \pi_2$ $H_1: \pi_1 < \pi_2$ $H_1: \pi_1 \neq \pi_2$

şeklinde ifade edilir. İlgilenilen özellik bakımından örnek oranlarını P_1 ve P_2 ile gösterelim. Örneğin kontrol grubu/İşlem öncesi grubu için bu oranı P_1 ve işlem grubu/işlem sonrası grubu için de bu oranı P_2 ile gösterebiliriz. Eşli örneklerde tahlil sonucunun negatif olma özelliği ile ilgileniliyorsa daha önce verilen frekans tablosu aracılığıyla:

$P_1 = \frac{A+C}{n}$ ve $P_2 = \frac{A+B}{n}$

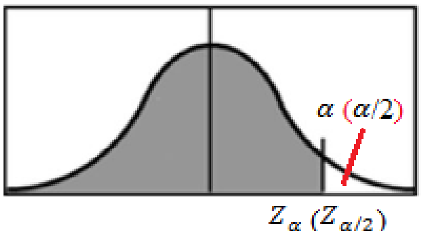
olarak bulunur. Bu örnek oranları arasındaki fark : $P_1 - P_2 = \frac{A+C}{n} - \frac{A+B}{n} = \frac{C-B}{n}$ olur. H_0 doğru iken $E\left(\frac{C-B}{n}\right)$=0 dır. H_0 hipotezinin testi için test istatistiği olarak McNemar: $P_1 - P_2 \sim N\big(E(P_1 - P_2)\,, V(P_1 - P_2)\big)$ öyleki $E(P_1 - P_2) = E\left(\frac{C-B}{n}\right) = \pi_1 - \pi_2 = 0$,(H_0 doğru iken) ve $V(P_1 - P_2) = V\left(\frac{C-B}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(C + B)$olduğundan, test istatistiği

$$Z = \frac{(P_1 - P_2) - E(P_1 - P_2)}{\sqrt{V(P_1 - P_2)}} = \frac{(C - B)/n}{\sqrt{(C + B)/n^2}} = \frac{C - B}{\sqrt{C + B}} \sim N(0\,,1)$$

istatistiğini önermiştir. Z istatistiğinin örnekleme dağılımı, H_0 doğru ve C+B değeri en az 10 iken standart normal dağılıma sahiptir. Z istatistiği için hesaplanan değer Z_h olmak üzere, α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı:

H_1	Karar Kuralı	Karar	
$\pi_1 > \pi_2$ $\pi_1 < \pi_2$	$\lvert Z_h \rvert > Z_\alpha$ $\lvert Z_h \rvert \leq Z_\alpha$	ise H_0 ret edilir ise H_0 ret edilemez	$p = Pr(Z > \lvert Z_h \rvert)$ olmak üzere $p < \alpha$ ise H_0 ret edilir, $p \geq \alpha$ ise H_0 ret edilemez.
$\pi_1 \neq \pi_2$	$\lvert Z_h \rvert > Z_{\alpha/2}$ $\lvert Z_h \rvert \leq Z_{\alpha/2}$	ise H_0 ret edilir ise H_0 ret edilemez	$p = Pr(Z > \lvert Z_h \rvert)$ olmak üzere $p < \frac{\alpha}{2}$ ise H_0 ret edilir, $p \geq \frac{\alpha}{2}$ ise H_0 ret edilemez

Burada Z_α veya ($Z_{\alpha/2}$) kritik noktası aşağıdaki grafikte gösterilen noktadır.



Örnek:7.4 Rastgele seçilen 20 hastanın kandaki şeker ölçümleri alınmış ve bu ölçümler normal değerler (ND) üst sınırından büyük olup olmamaya göre değerlendirilmiştir. Bu 20 hastaya 4 ay boyunca kandaki şeker ölçümünü düşürme amaçlı bir tedavi uygulanmış ve ardından kandaki şeker ölçümleri tekrar alınarak ND üst sınırından büyük olup olmamaya göre değerlendirilmiştir. Bu sınıflandırma ile elde edilen frekans tablosu aşağıdadır. Buna göre %5 önem seviyesinde tedavinin etkili olduğu söylenebilir mi?

		Tedavi sonrası		TOPLAM
		ND üzerinde değil	ND üzerinde	
Tedavi öncesi	ND üzerinde değil	A=4	C=2	6
	ND üzerinde	B=12	D=2	14
	TOPLAM	16	4	n=20

(ND:Normal değerler)

Çözüm: Değişken (X): Kandaki şeker ölçümü… Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi sıralamadır. Çünkü gözlenen değerlere göre birimler ND üzerinde veya ND üzerinde değil şeklinde sınıflandırılmakla birlikte bu sınıflar arasında derecelendirme anlamlıdır.. İlgilenilen özellik kandaki şeker oranını düşürmek, yani kandaki şeker oranının normal değerin üzerinde olmamasıdır.

Gruplar: $\begin{cases} \text{I. Grup ... Tedavi öncesi} \\ \text{II. Grup ... Tedavi sonrası} \end{cases}$ …Bu gruplar bağımlı gruplardır.

π_1: Tedavi sonrası grubunda kandaki şeker ölçüm değeri ND üzerinde olmayanların oranı

π_2: Tedavi öncesi grubunda kandaki şeker ölçüm değeri ND üzerinde olmayanların oranı olmak üzere test edilecek hipotezler;

$H_0: \pi_1 = \pi_2$

$H_1: \pi_1 < \pi_2$

şeklinde oluşturulur. Test istatistiği, Mc Nemar testi için;

$$Z = \frac{C-B}{\sqrt{C+B}} \sim N(0\,,1)$$

olup, burada B: Kandaki şeker ölçümü tedavi öncesi ND üzerinde iken tedavi sonrası ND üzerinde olmayanların sayısı, yani $B = 12$ ve C: kandaki şeker ölçümü tedavi öncesi ND üzerinde değilken tedavi sonrası normal değer üzerinde olanların sayısı, yani $C = 2$ dir. Buna göre test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri;

$$Z_h = \frac{C-B}{\sqrt{C+B}} = \frac{2-12}{\sqrt{2+12}} = -2{,}67$$

bulunur. $\alpha = 0{,}05$ iken kritik değer; $Z_\alpha = 1{,}64$'dür. H_1 hipotezi gereğince karar kuralı $|Z_h| > Z_\alpha$ ise H_0 ret edilir, aksi takdirde ret edilemez. Buna göre $|Z_h| = 2{,}67 > 1{,}64 = Z_\alpha$ olduğundan H_0 ret edilecektir. O halda %95 güven düzeyinde uygulanan tedavi yöntemi kandaki şeker miktarını düşürmede etkili olmuştur.

Karar kuralı için ikinci yol: $p = Pr(Z > |Z_h|)$ olmak üzere $p < \alpha$ ise H_0 ret edilir, $p \geq \alpha$ ret edilemez. $p = Pr(Z > |Z_h|) = Pr(Z > |-2{,}67|) = Pr(Z > 2{,}67) = 1 - Pr(Z \leq 2{,}67) = 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038$ bulunur. $\alpha = 0{,}05$ iken $p < \alpha$ olduğundan H_0 ret edilecektir.

Örnek:7.5 Her biri aynı yaş grubundan 2 hasta kapsayan 16 çiftin grup özelliği (kontrol grubu ve işlem grubu) ve tahlil sonucu (pozitif ve negatif) na göre sınıflandırılmış şekli aşağıdaki çapraz frekans tablosunda verilmiştir. Buna göre; Tahlil sonucunun pozitif çıkması üzerinde uygulanan işlemin farklılık oluşturup oluşturmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

		İşlem Grubu		TOPLAM
		Pozitif	Negatif	
Kontrol Grubu	Pozitif	A=4	C=3	7
	Negatif	B=6	D=3	9
	TOPLAM	10	6	n=16

Çözüm Değişken (X): Tahlil sonucu… İki değer alan bir değişken (pozitif/negatif)

İlgilenilen özellik tahlil sonucunun pozitif çıkması

Gruplar: $\begin{cases} \text{I. Grup ... Kontrol grubu} \\ \text{II. Grup ... İşlem Grubu} \end{cases}$ …Bu gruplar bağımlı gruplardır. Çünkü yaş faktörüne göre farklı yaş gruplarından çiftler alınarak yaş faktörünün etkisi sabitleştirilniştir.

π_1: Kontrol grubunda tahlil sonucu pozitif olanların oranı

π_2: İşlem grubunda tahlil sonucu pozitif olanların oranı olmak üzere test edilecek hipotezler;

$H_0: \pi_1 = \pi_2$

$H_1: \pi_1 \neq \pi_2$

şeklinde oluşturulur. Test istatistiği, Mc Nemar testi için;

$$Z = \frac{C-B}{\sqrt{C+B}} \sim N(0\,,1)$$

olup, burada B: kontrol grubundaki birimin tahlil sonucu negatif iken işlem grubundaki birimin tahlil sonucu pozitif olan çiftlerin sayısı, yani $B = 6$ ve C: kontrol grubundaki birimin tahlil sonucu pozitif iken işlem grubundaki birimin tahlil sonucu negatif olan çiftlerin sayısı, yani $C = 3$ dür. Buna göre test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri;

$$Z_h = \frac{C-B}{\sqrt{C+B}} = \frac{3-6}{\sqrt{3+6}} = -1{,}00$$

bulunur. $\alpha = 0{,}05$ iken kritik değer; $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$'dır. Buna göre $|Z_h| = 1 < 1{,}96 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$ olduğundan H_0 ret edilemez. O halda %95 güven düzeyinde tahlil sonucunun pozitif çıkması üzerinde uygulanan işlemin farklılık oluşturmadığı söylenir.

Karar kuralı için ikinci yol: $p = Pr(Z > |Z_h|)$ olmak üzere $p < \alpha/2$ ise H_0 ret edilir, $p \geq \alpha/2$ ret edilemez. $p = Pr(Z > |Z_h|) = Pr(Z > |-1{,}00|) = Pr(Z > 1) = 1 - Pr(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$ bulunur. $\alpha = 0{,}05$ iken $p \geq \frac{\alpha}{2}$ olduğundan H_0 ret edilemez.