T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

İST.482 PARAMETRİK OLMAYAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

5. Hafta

özenilen üniversite

4.2 İŞARET TESTİ

Binom testinin özel bir durumu olan bu test parametrik olmayan testlerin en eskisi olup, ilk olarak 1710 yılında John Arbuthnot tarafından kullanılmıştır.

Varsayımları

1. Araştırmada ilgilenilen değişken süreklidir

2. Değişkenin ölçme düzeyi en az sıralamadır

3. Örnek birimleri medyanı bilinmeyen bir kitleden tesadüfi olarak çekilir.

Test İşleminin Algoritması

1) Hipotezler kurulur

M: Örneğin çekildiği kitleye ait bilinmeyen medya parametresi ve M_0: herhangi bir reel sayı olmak üzere:

a) $H_0: M = M_0$	b) $H_0: M = M_0$	c) $H_0: M = M_0$
$H_1: M < M_0$	$H_1: M > M_0$	$H_1: M \neq M_0$

2) Medyanı M olan kitleden n birimlik bir örnek çekilir. Örnek birimleri $X_1, X_2, \dots X_n$ olsun. Örnek birimleri üzerinde $i = 1, 2, \dots, n$ için $D_i = X_i - M_0$ olmak üzere $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$ tesadüfi değişkenini tanımlayalım. Eğer $D_i = 0$ sonucu ortaya çıkarsa bu sonucu veren gözlem/gözlemler işlem dışı tutulur. Bu durum örnek hacminin işlem dışı kalan gözlem sayısı kadar azalmasına sebep olur ve işleme yeni örnek hacmi ile devam edilir. Örnek birimleri birbirinden bağımsız olduğundan hem D_i farkları hem de δ_i tesadüfi değişkenleri bağımsızdır ve üstelik $\delta_i \sim Bernoulli(1\,,\ \theta)$ dağılımına sahiptir. H_0 doğru iken örneklemin çekildiği kitlenin medyanı M_0 olacağından, örnek birimlerinin yarısının M_0'dan küçük değerli, diğer yarısının da M_0'dan büyük değerli olması beklenir. Bir diğer ifadeyle D_i farklarının yarısının negatif ve diğer yarısını da pozitif olması ve böylece δ_i tesadüfi değişkeninin alabileceği değerlerin yarısı "0" iken yarısı da "1" olacaktır. Bu sebeple başarı olasılığını gösteren dağılımın parametresi $\theta = \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$ dir.

3) Test istatistiği ve test istatistiğinin örnekleme dağılımı belirlenir. İşaret testinde test istatistiği;

$$k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \qquad (4.6)$$

olup, bağımsız Bernoulli denemelerinin toplamıdır. Bu sebeple k istatistiğinin örnekleme dağılımı;

$k \sim Binom\left(n,\ \theta = \frac{1}{2}\right)$ olup, olasılık fonksiyonu $f(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, k =0,1, 2, ..,n dir. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri k_h olsun.

4) Karar kuralı belirlenir ve karar verilerek sonuç yorumlanır.

Karar kuralı α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre belirlenir. Eğer H_1 hipotezi:

(a) $H_1: \ \mathrm{M} < \mathrm{M}_0$ iken (tek yönlü) test istatistiğinin küçük bir değer almasını bekleriz, çünkü n birimlik örnek, medyanı M olan kitleden çekilmiştir. $\mathrm{M} < \mathrm{M}_0$ olması sebebiyle örnek birimlerinin çok azı M_0'dan büyük ve böylece az sayıda $D_i > 0$, yani çok az sayıda $\delta_i = 1$ değerini almış olacak ve böylece $k_h = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ küçük değer çıkacaktır. Buna göre α önem seviyesinde;

I.Yol: test istatistiğinin örnekleme dağılımından belirlenen kritik değer $Pr(k \leq k_\alpha) = \alpha$ eşitliğini sağlayan k_α (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere, eğer $k_h \leq k_\alpha$ ise H_0 hipotezin ret edilir, $k_h > k_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

II. Yol: $Pr(k \leq k_h) = p$ (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere $p \leq \alpha$ ise H_0 hipotezin ret edilir, $p > \alpha$ ise H_0 hipotezin ret edilemez.

(b) $H_1: \ \mathrm{M} > \mathrm{M}_0$ iken (tek yönlü) test istatistiğinin büyük bir değer almasını bekleriz, çünkü $\mathrm{M} > \mathrm{M}_0$ olması sebebiyle örnek birimlerinin çoğu M_0'dan büyük ve böylece çok sayıda $D_i > 0$, yani çok sayıda $\delta_i = 1$ değerini almış olacak ve böylece $k_h = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ büyük değer çıkacaktır. Buna göre α önem seviyesinde;

I.Yol: test istatistiğinin örnekleme dağılımından belirlenen kritik değer $Pr(k \geq k'_\alpha) = \alpha$ eşitliğini sağlayan k'_α (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere, eğer $k_h \geq k'_\alpha$ ise H_0 hipotezin ret edilir, $k_h < k'_\alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

II. Yol: $Pr(k \geq k_h) = p$ (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere $p \leq \alpha$ ise H_0 hipotezin ret edilir, $p > \alpha$ ise H_0 hipotezin ret edilemez.

(c) $H_1: \ \mathrm{M} \neq \mathrm{M}_0$ iken (çift yönlü) test istatistiğinin ya küçük ya da büyük bir değer almasını bekleriz. Bu durumda α önem seviyesinde;

I. Yol: test istatistiğinin örnekleme dağılımından belirlenen kritik değerler $Pr\left(k \leq k_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ ve $Pr\left(k \geq k'_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ eşitliklerini sağlayan $k_{\frac{\alpha}{2}}$ ve $k'_{\frac{\alpha}{2}}$ (T9 tablosundan bulunabilir) olmak üzere, eğer $k_h \leq k_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $k_h \geq k'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 hipotezin ret edilir, $k_{\frac{\alpha}{2}} < k_h < k'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

II. Yol: $E(k) = np = \frac{n}{2}$ olduğundan, eğer $k_h < E(k)$ ise $Pr(k \leq k_h) = p$ veya $k_h > E(k)$ ise $Pr(k \geq k_h) = p$ olmak üzere (T9 tablosundan bulunabilir) $p \leq \frac{\alpha}{2}$ ise H_0 hipotezin ret edilir, $p > \frac{\alpha}{2}$ ise H_0 hipotezin ret edilemez.

Örnek 4.5 A ilacı ile tedavi edilen hastaların iyileşme süresine ilişkin medyan değerinin 30 günden fazla olduğu iddia edilmektedir. Bu ilacın kullanıldığı hastalardan tesadüfi olarak seçilen 8 hastanın iyileşme süreleri aşağıdadır. Bu bilgiye göre iddianın doğru olup olmadığını %5 önem seviyesinde kontrol ediniz?

X_i(Gün): 32 65 27 34 66 40 36 52

<u>Çözüm</u> Değişken (X): İyileşme süresi (gün)….Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Hipotezler $H_0: M = 30$, ($M_0 = 30$ verilmiş)
$H_1: M > 30$

X_i	$D_i = X_i - 30$	δ_i	Test istatistiği ve örnekleme dağılımı
32	2	1	
65	35	1	$k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ ve H_0 doğru iken $k \sim Binom(n = 8, p = \frac{1}{2})$ olup
27	-3	0	
34	4	1	olasılık fonksiyonu $f(k) = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{8-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 8$
66	36	1	Test istatistiğinin alabileceği değer $k_h = 7$ dir.
40	10	1	
36	6	1	
52	22	1	

<u>Karar:</u> $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı $Pr(k \geq k'_\alpha) = \alpha = 0{,}05$ ise (T9)'dan $k'_\alpha = 7$ için $Pr(k \geq 7) = 0{,}0352 < 0{,}05$ ve $k'_\alpha = 6$ için $Pr(k \geq 6) = 0{,}1446 > 0{,}05$ bulunur. Yakınlık durumu dikkate alındığında $k'_\alpha = 7$ alınır. $k_h = k'_\alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

Veya $p = Pr(k \geq k_h) = Pr(k \geq 7) = 0{,}0352 < 0{,}05 = \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre A ilacı ile tedavi edilen hastaların iyileşme sürelerine ait medyan değerinin 30 günden fazla olduğu iddiası doğrudur.

<u>Örnek 4.6</u> Konumları ve çürüme derecesi aynı olan dişlere yapılan dolguların dayanma süresine ait medyanın 100 aydan az olduğu öne sürülmektedir. Rasgele seçilen bu özellikteki 9 hastadaki dolguların dayanma süreleri aşağıdadır. Buna göre %1 önem seviyesinde iddianın doğruluğunu araştırınız?

X_i(Ay): 110 85 43 60 47 30 150 80 48

<u>Çözüm</u> Değişken (X): Dayanma süresi (ay)….Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi oranlama

Hipotezler $H_0: M = 100$, ($M_0 = 100$ verilmiş)
$H_1: M < 100$

X_i	$D_i = X_i - 100$	δ_i	Test istatistiği ve örnekleme dağılımı
110	10	1	
85	-15	0	$k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ ve H_0 doğru iken $k \sim Binom(n = 9, p = \frac{1}{2})$ olup
43	-57	0	
60	-40	0	olasılık fonksiyonu $f(k) = \binom{9}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{9-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 9$
47	-53	0	Test istatistiğinin alabileceği değer $k_h = 2$ dir.
30	-70	0	
150	50	1	
80	-20	0	
48	-52	0	

<u>Karar:</u> $\alpha = 0{,}01$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı $Pr(k \leq k_\alpha) = \alpha = 0{,}01$ ise (T9)'dan $k_\alpha = 1$ için $Pr(k \leq 1) = 0{,}0196 > 0{,}01$ ve $k_\alpha = 0$ için $Pr(k \leq 0) = 0{,}0020 <$

0,01 bulunur. Yakınlık durumu dikkate alındığında $k_\alpha = 0$ alınır. $k_h > k_\alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez.

Veya $p = Pr(k \le k_h) = Pr(k \le 2) = 0{,}0899 > 0{,}01 = \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Buna göre diş dolgularının dayanma sürelerine ait medyan değerinin 100 aydan az olduğu iddiası doğru değildir.

Örnek 4.7 Sürekli ve en az sıralama düzeyinde ölçülen bir değişken için 10 örnek birimi üzerinde yapılan ölçüm sonuçları aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Bu örneğin medyanı 3,5 birim olan bir kitleden çekilip çekilmediğine %5 önem seviyesinde karar veriniz?

X_i(Birim): 1,80 3,30 5,65 2,25 2,50 3,10 2,75 3,50 2,70 3,00

Çözüm Değişken (X): Sürekli ve ölçme düzeyi en az sıralama

Hipotezler $H_0: M = 3{,}5$, ($M_0 = 3{,}5$ verilmiş)
$H_1: M \neq 3{,}5$

X_i	$D_i = X_i - 3{,}5$	δ_i	Test istatistiği ve örnekleme dağılımı
1,80	-1,70	0	$k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ ve H_0 doğru iken $k \sim Binom(n = 9, p = \frac{1}{2})$ olup olasılık fonksiyonu $f(k) = \binom{9}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{9-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ Test istatistiğinin alabileceği değer $k_h = 1$ dir.
3,30	-0,20	0	
5,65	2,15	1	
2,25	-1,25	0	
2,50	-1,00	0	
3,10	-0,40	0	
2,75	-0,75	0	
3,50	0,00 işlem dışı	--	
2,70	-0,80	0	
3,00	-0,50	0	

Karar: $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı $Pr\left(k \le k_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ ise (T9)'dan $k_{\frac{\alpha}{2}} = 1$ için $Pr(k \le 1) = 0{,}0196 < 0{,}025$ ve $k_\alpha = 2$ için $Pr(k \le 2) = 0{,}0899 > 0{,}025$ bulunur. Yakınlık durumu dikkate alındığında $k_{\frac{\alpha}{2}} = 1$ alınır. $k_h = k_{\frac{\alpha}{2}}$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir.

Veya H_1 çift yönlü, $E(k) = np = \frac{9}{2} = 4{,}5$ ve$k_h = 1 < E(k) = 4{,}5$ olduğundan $p = Pr(k \le k_h) = Pr(k \le 1) = 0{,}0196 < 0{,}025 = \frac{\alpha}{2}$ olup H_0 hipotezi ret edilir. Buna göre bu örnek, medyanı 3,5 birim olan kitleye ait değildir.

4.2.1 Büyük Hacimli Örneklerde İşaret Testi

İşaret testinde örnek hacminin büyük olması özellikle $n > 20$ iken test istatistiğinin örnekleme dağılımı kullanılarak olasılık hesaplamalarında işlem uzunluğu bakımından sıkıntılar ortaya çıkabilmektedir. Böyle durumlarda Binom dağılımının normal dağılıma yaklaşımından yararlanarak test istatistiğinin örnekleme dağılımını Binom dağılımından normal dağılıma taşımak mümkündür.

İşaret testinde $H_0: M = M_0$ hipotezi doğru iken test istatistiğinin örnekleme dağılımı $k \sim Binom\left(n\,,\ p = \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $E(k) = \frac{n}{2}$ ve $V(k) = \frac{n}{4}$ olup, merkezi limit teorisi gereğince yeterince büyük örnekler için $k \sim N\left(\frac{n}{2}\,,\ \frac{n}{4}\right)$ olduğu bilinmektedir. Buna göre büyük örnek durumunda işaret testi için test istatistiği, Binom dağılımının kesikliği ve normal dağılımın sürekli olması nedeniyle uygulanacak olan süreklilik düzeltmesi ile birlikte

$$Z = \frac{\left(k \pm \frac{1}{2}\right) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sim N(0\,,1) \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada düzeltme terimi $\left(k \pm \frac{1}{2}\right)$ olup, uygulanırken şu yol izlenir.

Eğer $Pr(k \leq k_\alpha) = \alpha$ (Tek yönlü), $Pr\left(k \leq k_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}$ (Çift yönlü) ve $p = Pr(k \leq k_h)$ ise $k + \frac{1}{2}$ süreklilik düzeltmesi,

Eğer $Pr(k \geq k'_\alpha) = \alpha$ (Tek yönlü), $Pr\left(k \geq k'_{\alpha/2}\right) = \frac{\alpha}{2}$ (Çift yönlü) ve $p = Pr(k \geq k_h)$ ise $k - \frac{1}{2}$ süreklilik düzeltmesi uygulanır.

<u>Örnek 4.8</u> $H_0: M = 30$ hipotezini $H_1: M > 30$ hipotezine karşı test etmek için tesadüfi olarak 40 birimlin bir örnek seçilmiştir. Sonra örnek birimleri üzerinde $i = 1, 2, \ldots, n$ için $D_i = X_i - 30$ farkları oluşturulmuştur. Bu farklardan 6'sının negatif işaretli ve 34'nünde pozitif işaretli olduğu görülmüştür. %5 önem seviyesinde test işlemi sonucunda H_0 hipotezi hakkındaki kararınızı belirtiniz?

<u>Çözüm</u> Hipotezler $H_0: M = 30$ ve $H_1: M > 30$ şeklinde tek yönlüdür.

Test istatistiği ve örnekleme dağılımı; işaret testi için test istatistiği $k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ olup, $n = 40 > 20$ olduğundan büyük örnek durumu söz konusudur. Bu sebeple test istatistiğinin örnekleme dağılımı için Binom dağılımının normal dağılıma yaklaşımı uygulanır. H_0 doğru iken k istatistiğinin beklenen değer ve varyansı sırasıyla;

$E(k) = n * p = 40 * \frac{1}{2}$ =20 ve $V(k) = n * p * (1 - p) = 40 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 10$ olup, böylece $k \sim N(20; 10)$ elde edilir. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri $k_h = 34$ olup, $k_h > E(k)$ olduğundan $p = Pr(k \geq k_h) = Pr(k \geq 34) = Pr\left(Z > \frac{(34-0{,}5)-20}{\sqrt{10}}\right) = Pr(Z > 4{,}27) = 1 - Pr(Z < 4{,}27) = 1 - 0{,}9999 = 0.0001$ bulunur. Buna göre $p < 0{,}05$ olduğundan H_0 reddedilir.

4.3 WILCOXON İŞARETLİ SIRA SAYILARI TESTİ

Parametrik tekniklerden Z veya t-testinin alternatifi olan ve kitle medyan parametresi ile ilgili hipotezlerin test edilmesinde kullanılan bir parametrik olmayan tekniktir. İşaret testi ile aynı görevi yapmasına rağmen, işaret testine göre daha güçlüdür. Çünkü işaret testi örnek birimlerinin M_0 reel sayısından farklarının sadece işaretlerini (yani negatif veya pozitif) olmasını dikkate alırken, Wilcoxon testi ise bu işaretlerin yanı sıra farkların mutlak büyüklüklerini de dikkate almaktadır. Bu sebeple örneğe ait daha fazla bilgi kullanmaktadır.

Varsayımları

i) İlgilenilen değişken sürekli olmalıdır.

ii) İlgilenilen değişken en az eşi aralıklı ölçme düzeyine sahip olmalı

iii) İlgilenilen değişken bakımından kitlenin dağılımı simetrik olmalı

iv) Örnek birimleri medyanı bilinmeyen kitleden rastgele çekilmeli ve birbirinden bağımsız olmalı

Test İşleminin Algoritması

1) Hipotezler kurulur

M: Örneğin çekildiği kitleye ait bilinmeyen medya parametresi ve M_0: herhangi bir reel sayı olmak üzere:

a) $H_0: M = M_0$ $\quad$ b) $H_0: M = M_0$ $\quad$ c) $H_0: M = M_0$

$H_1: M < M_0$ $\quad$ $H_1: M > M_0$ $\quad$ $H_1: M \neq M_0$

2) Medyanı M olan kitleden n birimlik bir örnek çekilir. Örnek birimleri $X_1,\ X_2, \ldots\ X_n$ olsun. Örnek birimleri üzerinde $i = 1, 2, \ldots, n$ için $D_i = X_i - M_0$ olmak üzere $\delta_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$ tesadüfi değişkenini tanımlayalım. Eğer $D_i = 0$ sonucu ortaya çıkarsa bu sonucu veren gözlem/gözlemler işlem dışı tutulur. Bu durum örnek hacminin işlem dışı kalan gözlem sayısı kadar azalmasına sebep olur ve işleme yeni örnek hacmi ile devam edilir.

3) $= 1, 2, \ldots, n$ için D_i'lerin mutlak değerleri alınarak, $|D_i|$'lerin sayı-sıralı istatistikleri bulunur. $|D_i|$ için sayı-sıralı istatistik değeri ;

$$r(|D_i|) = \sum_{j=1}^{n} s\left(|D_i| - |D_j|\right) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlıdır, burada

$$s(u) = \begin{cases} 1\ , & u \geq 0 \\ 0\ , & u < 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

ile verilir. Bu işlemle $|D_i|$'lere en küçükten başlayarak sıra sayıları verilmektedir. Eğer $|D_i|$'ler içerisinde aynı değerli olanlar varsa onlara ortalama sıra sayısı, yani onlara verilmesi gereken sıra sayılarının ortalaması verilir.

4) Test istatistiği belirlenir ve H_0 hipotezi doğru iken alabileceği değer örnekten hesaplanır.

Wilcoxon işaretli sıra sayılar testi için test istatistiği:

$$T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i \tag{4.9}$$

olarak tanımlıdır. Test istatistiği D_i farklarının hepsi negatif olduğunda en küçük değerini ve bu farkların hepsi pozitif olduğunda da en büyük değerini alacaktır. Buna göre $\forall i$ için $D_i < 0$ ise $\delta_i = 0$ olacağından $Enk(T^+) = 0$ ve $\forall i$ için $D_i > 0$ ise $\delta_i = 1$ olacağından $Enb(T^+) = \frac{n(n+1)}{2}$ elde edilir. Böylece T^+ istatistiğinin alabileceği değerler $t = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$ olup, örnekleme dağılımı $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{4}$ noktasına göre simetrik bir dağılım gösterir. H_0 hipotezi doğru iken test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri T_h^+ ile gösterilsin.

5) Karar kuralı belirlenir ve karar verilir.

α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre test istatistiğinin örnekleme dağılımından yararlanarak kritik değer bulunur ve karar kuralı belirlenir.

a) $H_1: M < M_0$ (tek yönlü) iken, yani örneklemin çekildiği kitlenin medyanı (M), M_0'dan küçükse, bu durumda örnekteki gözlemlerin büyük bir çoğunluğunun, en azından yarısından fazlasının M_0'dan küçük çıkmasını ve buna bağlı olarak δ_i'lerin büyük bir çoğunluğunun sıfır değerini almasını ve böylece test istatistiğinin küçük bir değer almasını bekleriz. Buna göre test istatistiğinin örnekleme dağılımından belirlenen kritik değer (sol kritik değer);

$$Pr(T^+ \leq d_\alpha) = \alpha \tag{4.10}$$

eşitliğini sağlayan d_α (T10 tablosundan bulunur) olmak üzere, eğer $T_h^+ \leq d_\alpha$ ise, (yani $Pr(T^+ \leq T_h^+) = p$ olmak üzere $p \leq \alpha$ ise) H_0 ret edilir, $T_h^+ > d_\alpha$ (veya $p > \alpha$) ise H_0 ret edilemez.

b) $H_1: M > M_0$ (tek yönlü) iken, yani örneklemin çekildiği kitlenin medyanı (M), M_0'dan büyükse bu durumda örnekteki gözlemlerin büyük bir çoğunluğunun, en azından yarısından fazlasının M_0'dan büyük çıkmasını ve buna bağlı olarak δ_i'lerin büyük bir çoğunluğunun bir değerini almasını ve böylece test istatistiğinin büyük bir değer almasını bekleriz. Buna göre test istatistiğinin örnekleme dağılımından belirlenen kritik değer (sağ kritik değer);

$$Pr(T^+ \geq d'_\alpha) = \alpha \tag{4.11}$$

eşitliğini sağlayan d'_α olmak üzere, eğer $T_h^+ \geq d'_\alpha$ ise, (yani $Pr(T^+ \geq T_h^+) = p$ olmak üzere $p \leq \alpha$ ise) H_0 ret edilir, $T_h^+ < d'_\alpha$ (veya $p > \alpha$) ise H_0 ret edilemez. Burada T^+ istatistiğinin örnekleme dağılımı simetrik olduğundan sağ kritik değer, T10 tablosundan bulunan sol kritik değer yardımıyla $d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$ eşitliği ile elde edilir.

c) $H_1 : M \neq M_0$ (çift yönlü) iken, yani örneklemin çekildiği kitlenin medyanı (M), M_0'dan farklı ise bu durumda örnekteki gözlemlerin büyük bir çoğunluğunun, en azından yarısından fazlasının ya M_0'dan küçük ya da M_0'dan büyük çıkmasını ve buna bağlı olarak δ_i'lerin büyük bir çoğunluğunun ya sıfır değerini ya da bir değerini almasını ve böylece test istatistiğinin ya küçük bir değer ya da büyük bir değer almasını bekleriz. Buna göre test istatistiğinin örnekleme dağılımından belirlenen kritik değerler (sol ve sağ kritik değerler) sırasıyla;

$$Pr\left(T^{+} \leq d_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \text{ ve } Pr\left(T^{+} \geq d'_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \tag{4.12}$$

eşitliklerini sağlayan $d_{\frac{\alpha}{2}}$ ve $d'_{\frac{\alpha}{2}}$ olmak üzere, eğer $T_h^{+} \leq d_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $T_h^{+} \geq d'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise, (yani $Pr(T^{+} \leq T_h^{+}) = \frac{p}{2}$ veya $Pr(T^{+} \geq T_h^{+}) = \frac{p}{2}$ olmak üzere $\frac{p}{2} \leq \alpha$ ise) H_0 ret edilir, $d_{\frac{\alpha}{2}} < T_h^{+} < d'_{\frac{\alpha}{2}}$ (veya $\frac{p}{2} > \alpha$) ise H_0 ret edilemez. Burada sol kritik değer $d_{\frac{\alpha}{2}}$ (T10) tablosundan, sağ kritik değer $d'_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} - d_{\frac{\alpha}{2}}$ eşitliğinden elde edilir.

4.3.1 SPSS'de Wilcoxon İşaretli Sıra Sayıları Testi

Spss'de Wilcoxon işaretli sıra sayılar testini uygulayabilmek için takip edilecek algoritmanın adımları şu şekilde verilebilir.

1.Adım Variable View sayfasında değişkenler ve özelliklerinin tanımlamaları yapılır. **Data View** sayfasında değişkenlere ait veriler girilir.

2.Adım Analyze > Nonparametric Tests > One Sample…yolu izlenerek **One-Sample Nonparametric Tests** ekranı açılır. Bu ekranda birinci satırda yer alan **Fields** seçeneği kullanılarak açılan görüntüde **Fields** bölümünde yer alan değişkenler listesinden ilgilenilen değişken seçilerek aktarma butonu aracılığı ile **Test Fields** işlem kutusuna aktarılır.

3.Adım Yine aynı ekranın birinci satırında bulunan **Settings** seçeneği kullanılarak açılacak olan görüntüde **Customize tests** seçeneği işaretlenir. Bu işaretleme ile aktif hale gelen test seçeneklerinin içerisinden **Compare median to hypothesized (Wilcoxon signed-rank test)** tercih edilir. **Hypothesized median** işlem kutusuna H_0 hipotezinde yer alan M_0 medyan değeri girilir.

4.Adım Run düğmesi tıklanarak işlem bitirilir ve sonuçlar çıktı sayfasında sunulur. Çıktı sayfasında sunulan **Hypothesis Test Summary** çıktısı üzerine Mouse'un sol tarafı ile çift tıklandığında test sonuçlarının özetlendiği tablo açılır. Bu tablodaki bilgiler değerlendirilir,

5.Adım α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı belirlenir ve H_0 hipotezi hakkında karar verilir.

Eğer H_1 hipotezi tek yönlü ise (a ve b'de olduğu gibi) sonuç özet tablosunun son satırında bulunan **Asymptotic Sig. (2-sided test) "Asimptotik önemlilik olasılığı (iki yönlü test için)"** ifadesinin karşısındaki sayısal değer, önemlilik olasılığı olarak bilinen p olasılığının iki katıdır.

Bu durumda $p = (sayısal\ değer/2)$ olarak alınır ve $\boldsymbol{\alpha}$ önem seviyesi ile karşılaştırılır. Eğer $p < \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, eğer $p \geq \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Eğer H_1 hipotezi çift yönlü ise (c'de olduğu gibi) $p = (sayısal\ değer)$ olmak üzere $p < \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $p \geq \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Örnek 4.9 Bir ders için sınıf başarı notu medyanı hakkında bilgi edinebilmek için sınıftan bu dersi alan öğrenciler arasından rastgele olarak 8 öğrenci seçilmiş ve başarı notları aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Söz konusu ders için bu sınıfa ait başarı notu medyanın 60 puandan az olduğu %5 önem seviyesinde söylenebilir mi?

$\boldsymbol{X_i}$ (Puan): 62 52 50 40 17 76 18 46

Çözüm Değişken (X): Başarı notu (puan)….Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit aralıklı

Hipotezler
$H_0: M = 60$ ($M_0 = 60$ biliniyor)
$H_1: M < 60$

Test istatistiği: $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$ olup, burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $D_i = X_i - 60$ ve $\delta_i = \begin{cases} 1 & , \ D_i > 0 \\ 0 & , \ D_i < 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlıdır.

$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{D_i}$	$\boldsymbol{\lvert D_i \rvert}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)}$	$\boldsymbol{\delta_i}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)\delta_i}$	**Sonuç ve Karar Kuralı**
62	2	2	1	1	1	Test istatistiğinin alabileceği değer:
52	-8	8	2	0	0	$T_h^+ = 6$'dır.
50	-10	10	3	0	0	
40	-20	20	6	0	0	H_1 hipotezine göre
17	-43	43	8	0	0	$Pr(T^+ \leq d_\alpha) = \alpha$ olmak üzere
76	16	16	5	1	5	$T_h^+ \leq d_\alpha$ ise H_0 ret edilir
18	-42	42	7	0	0	$T_h^+ > d_\alpha$ ise H_0 ret edilemez
46	-14	14	4	0	0	

Kritik değer: $n = 8$ ikenH_1tek yönlü olduğundan $\alpha = 0{,}05$için (T10) tablosundan

$Pr(T^+ \leq 5) = 0{,}0391 < 0{,}05$

$Pr(T^+ \leq 6) = 0{,}0547 > 0{,}05$ bulunur. Bu olasılıklardan ikincisi (0,0547), $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesine daha yakın olduğundan kritik değer $d_\alpha = 6$ dır. Buna göre $T_h^+ = d_\alpha$ olduğundan H_0 ret edilir. Bu sonuca göre; bu sınıf için ilgili derse ait başarı notu medyanın 60 puandan az olduğu %95 güvenle söylenir.

Spss Çözümü Değişken (X): Başarı notu (puan)….Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit aralıklı

Hipotezler
$H_0: M = 60$ ($M_0 = 60$ biliniyor)
$H_1: M < 60$
Test istatistiği: $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$

Total n	8	**Sonuç ve Karar**
Test Statistic	6,000	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 6$'dır.
Standart Error	7,141	H_1 tek yönlü olduğundan $p = \frac{0,093}{2} = 0,0465$ ve
Standardized Test Statistic	-1,680	$\alpha = 0,05$ iken $p < \alpha$ olduğundan H_0 ret edilir.
Asymptotic Sig. (2-sided test)	0,093	

Bu sonuca göre; bu sınıf için ilgili derse ait başarı notu medyanın 60 puandan az olduğu %95 güvenle söylenir.

Örnek 4.10 TRC1 bölgesinde (Gaziantep, Adıyaman ve Kilis) yıllara göre (2008-2017) istihdam oranları (%) aşağıdaki gibi tespit edilmiş. Bu bilgiye dayanarak bu bölgede istihdam oranına ait medyanın %37'den fazla olduğu %5 önem seviyesinde söylenebilir mi? (T.C. Sanayi ve Teknoloji Bakanlığı-GAP Bölge Kalkınma İdaresi Başkanlığı- İstatistiki Veriler)

Yıllar	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
İstihdam Oranı (%)	36,6	34,8	39,4	36,5	38,5	42,0	39,7	38,8	38,7	39,8

Çözüm Değişken (X): İstihdam oranı (%)….Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit oranlama

Hipotezler

$H_0: M = 37$ ($M_0 = \%37$ biliniyor)

$H_1: M > 37$

Test istatistiği: $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$ olup, burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $D_i = X_i - 37$ ve $\delta_i = \begin{cases} 1 \ , & D_i > 0 \\ 0 \ , & D_i < 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlıdır.

X_i	D_i	$\lvert D_i \rvert$	$r(\lvert D_i \rvert)$	δ_i	$r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	**Sonuç ve Karar Kuralı**
36,6	-0,4	0,4	1	0	0	Test istatistiğinin alabileceği değer:
34,8	-2,2	2,2	6	0	0	$T_h^+ = 46$'dır.
39,4	2,4	2,4	7	1	7	H_1 hipotezine göre
36,5	-0,5	0,5	2	0	0	$Pr(T^+ \geq d'_\alpha) = \alpha$ olmak üzere
38,5	1,5	1,5	3	1	3	$T_h^+ \geq d'_\alpha$ ise H_0 ret edilir
42,0	5	5	10	1	10	$T_h^+ < d'_\alpha$ ise H_0 ret edilemez
39,7	2,7	2,7	8	1	8	
38,8	1,8	1,8	5	1	5	$d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha$
38,7	1,7	1,7	4	1	4	
39,8	2,8	2,8	9	1	9	

Kritik değer: $n = 10$ iken$H_1: M > 37$ tek yönlü olduğundan $\alpha = 0,05$ için (T10) tablosundan

$Pr(T^+ \leq 10) = 0{,}0420 < 0{,}05$

$Pr(T^+ \leq 11) = 0{,}0527 > 0{,}05$ bulunur. Bu olasılıklardan ikincisi (0,0527), $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesine daha yakın olduğundan $d_\alpha = 11$ dir. Buna göre $d'_\alpha = \frac{n(n+1)}{2} - d_\alpha = \frac{10*11}{2} - 11 = 44$ ve böylece $T_h^+ > d'_\alpha$ olduğundan H_0 ret edilir. Bu sonuca göre; TRC1 bölgesinde yıllara göre istihdam oranına ait medyanın %37'den fazla olduğu söylenebilir.

Spss Çözümü Değişken (X): İstihdam oranı (%)….Nicel, sürekli ve ölçme düzeyi eşit oranlama
Hipotezler
$H_0: M = 37$ $(M_0 = \%37$ biliniyor$)$
$H_1: M > 37$
Test istatistiği: $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$

Total n	10	**Sonuç ve Karar**
Test Statistic	46,00	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 46$'dır.
Standart Error	9,811	H_1 tek yönlü olduğundan $p = \frac{0{,}059}{2} = 0{,}0295$ ve
Standardized Test Statistic	1,886	$\alpha = 0{,}05$ iken $p < \alpha$ olduğundan H_0 ret edilir.
Asymptotic Sig. (2-sided test)	0,059	

Bu sonuca göre; TRC1 bölgesinde yıllara göre istihdam oranına ait medyanın %37'den fazla olduğu söylenebilir.

Örnek 4.11 $H_0: M = 107$ hipotezini $H_1: M \neq 107$ hipotezine karşı test etmek için medyanı M olan kitleden 13 birimlik bir örnek çekilmiştir. Örnek birimlerinin bir X değişkenine ait ölçüm değerleri aşağıdaki gibi gözlenmiştir. Bu bilgiye dayanarak %5 önem seviyesinde H_0 hipotezi hakkında kararınızı belirtiniz?

X_i: 99 100 90 94 135 107 111 119 104 127 109 114 126

Çözüm

Hipotezler
$H_0: M = 107$ $(M_0 = 107$ biliniyor$)$
$H_1: M \neq 107$
Test istatistiği: $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$ olup, burada $i = 1, 2, \dots, n$ için $D_i = X_i - 107$ ve $\delta_i = \begin{cases} 1 \ , & D_i > 0 \\ 0 \ , & D_i < 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlıdır. $D_i = 0$ sonucu olursa, bu sonucu veren örnek birimi/birimleri işlem dışı tutulur ve örnek hacmi işlem dışı kalan gözlem sayısı kadar azalır.

X_i	D_i	$\lvert D_i \rvert$	$r(\lvert D_i \rvert)$	δ_i	$r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	Sonuç ve Karar Kuralı
99	-8	8	6	0	0	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 48{,}5$'dır. H_1 hipotezine göre $Pr\left(T^+ \le d_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ ve $d'_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} - d_{\frac{\alpha}{2}}$ olmak üzere $T_h^+ \le d_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $T_h^+ \ge d'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilir $d_{\frac{\alpha}{2}} < T_h^+ < d'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilemez Kritik değer: $n = 12$ iken H_1 çift yönlü olduğundan $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ için (T10) tablosundan
100	-7	7	4,5	0	0	
90	-17	17	9	0	0	
94	-13	13	8	0	0	
135	28	28	12	1	12	
107	0 İşlem	Dışı	----	--	---	
111	4	4	3	1	3	
119	12	12	7	1	7	
104	-3	3	2	0	0	
127	20	20	11	1	11	
109	2	2	1	1	1	
114	7	7	4,5	1	4,5	
126	19	19	10	1	10	

$Pr(T^+ \le 13) = 0{,}0212 < 0{,}025$

$Pr(T^+ \le 14) = 0{,}0261 > 0{,}025$ bulunur. Bu olasılıklardan ikincisi (0,0261), $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ önem seviyesine daha yakın olduğundan sol kritik değer $d_{\frac{\alpha}{2}} = 14$ iken sağ kritik değer $d'_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{12*13}{2} - 14 = 64$ bulunur. Buna göre 14<48,5<64 yani $d_{\frac{\alpha}{2}} < T_h^+ < d'_{\frac{\alpha}{2}}$ olduğundan H_0 ret edilemez. Bu sonuca göre; mevcut örneğin çekildiği kitlenin medyanı %95 güvenle 107'ye eşittir.

Spss Çözümü

Hipotezler

$H_0: M = 37$ ($M_0 = \%37$ biliniyor)

$H_1: M > 37$

Test istatistiği: $T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$

Total n	13	**Sonuç ve Karar**
Test Statistic	48,5	Test istatistiğinin alabileceği değer: $T_h^+ = 48{,}5$'dir. H_1 çift yönlü olduğundan $p = 0{,}746$ ve $\alpha = 0{,}05$ iken $p > \alpha$ olduğundan H_0 ret edilemez. Bu sonuca göre; mevcut örneğin çekildiği kitlenin medyanı %95 güvenle 107'ye eşittir.
Standart Error	12,743	
Standardized Test Statistic	0,746	
Asymptotic Sig. (2-sided test)	0,456	

Örnek 4.12 $H_0: M = M_0$ hipotezini $H_1: M > M_0$ hipotezine karşı Wilcoxon işaretli sıra sayılar testi ile test etmek için medyanı M olan bir kitleden $n = 4$ birimlik bir rastgele örnek çekiliyor. Örnek birimleri X_1, X_2, X_3, X_4 olsun. Buna göre:

a) Test istatistiğinin örnekleme dağılımını bulunuz?

b) Test istatistiğinin beklenen değerini ve varyansını hesaplayınız?

c) $P(T^{+} > 2)$, $P(T^{+} \leq 4)$ ve $P(2 < T^{+} < 6)$ olasılıklarını hesaplayınız?

<u>**Çözüm**</u> **a)** Test istatistiğinin örnekleme dağılımını oluşturabilmek için önce test istatistiğinin kaç farklı durumda hesaplanabileceğini belirleyelim. Wilcoxon işaretli sıra sayıları içi test istatistiği $T^{+} = \sum_{i=1}^{n} r(|D_i|)\delta_i$ olup, $i = 1, 2, 3, 4$ için $D_i = X_i - M_0$ farklarından pozitif olanların sayısına göre kaç farklı durumda hesaplanabileceği belirlenir. Pozitif D_i farklarının sayısı t olmak üzere T^{+} istatistiğinin hesaplanabileceği farklı durumların sayısı n birimlik bir örnekte;

$\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}$=$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ kadardır. Örnek hacmi $n = 4$ iken bu sayı $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$'dır. Eğer;

i) Bütün $D_i < 0$ ise: $\binom{4}{0} = 1$ farklı durum olup

$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{D_i}$	$\boldsymbol{\lvert D_i \rvert}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)}$	$\boldsymbol{\delta_i}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)\delta_i}$
X_1	-$D1$	$\lvert D_1 \rvert$	1	0	0
X_2	-$D2$	$\lvert D_2 \rvert$	2	0	0
X_3	-$D3$	$\lvert D_3 \rvert$	3	0	0
X_4	-$D4$	$\lvert D_4 \rvert$	4	0	0
				$T^{+} = \sum_{i=1}^{n} r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	0

ii) Bir tane $D_i > 0$ ve üç tane $D_i < 0$ ise: $\binom{4}{1} = 4$ farklı durum olup

$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{D_i}$	$\boldsymbol{\lvert D_i \rvert}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)}$				$\boldsymbol{\delta_i}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)\delta_i}$			
X_1	$D1$	$\lvert D_1 \rvert$	1	2	3	4	1	1	2	3	4
X_2	-$D2$	$\lvert D_2 \rvert$	2	1	1	1	0	0	0	0	0
X_3	-$D3$	$\lvert D_3 \rvert$	3	3	2	2	0	0	0	0	0
X_4	-$D4$	$\lvert D_4 \rvert$	4	4	4	3	0	0	0	0	0
							$T^{+} = \sum_{i=1}^{n} r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	1	2	3	4

iii) İki tane $D_i > 0$ ve iki tane $D_i < 0$ ise: $\binom{4}{2} = 6$ farklı durum olup

$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{D_i}$	$\boldsymbol{\lvert D_i \rvert}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)}$						$\boldsymbol{\delta_i}$	$\boldsymbol{r(\lvert D_i \rvert)\delta_i}$					
X_1	$D1$	$\lvert D_1 \rvert$	1	1	1	2	2	3	1	1	1	1	2	2	3
X_2	$D2$	$\lvert D_2 \rvert$	2	3	4	3	4	4	1	2	3	4	3	4	4
X_3	-$D3$	$\lvert D_3 \rvert$	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
X_4	-$D4$	$\lvert D_4 \rvert$	4	4	3	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0
									$T^{+} = \sum_{i=1}^{n} r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	3	4	5	5	6	7

iii) Üç tane $D_i > 0$ ve bir tane $D_i < 0$ ise: $\binom{4}{3} = 4$ farklı durum olup

X_i	D_i	$\lvert D_i \rvert$	$r(\lvert D_i \rvert)$				δ_i	$r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$			
X_1	$D1$	$\lvert D_1 \rvert$	1	1	1	2	1	1	1	1	2
X_2	$D2$	$\lvert D_2 \rvert$	2	2	3	3	1	2	2	3	3
X_3	$D3$	$\lvert D_3 \rvert$	3	4	4	4	1	3	4	4	4
X_4	-$D4$	$\lvert D_4 \rvert$	4	3	2	1	0	0	0	0	0
							$T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	6	7	8	9

iv) Bütün $D_i > 0$ ise: $\binom{4}{4} = 1$ farklı durum olup

X_i	D_i	$\lvert D_i \rvert$	$r(\lvert D_i \rvert)$	δ_i	$r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$
X_1	$D1$	$\lvert D_1 \rvert$	1	1	1
X_2	$D2$	$\lvert D_2 \rvert$	2	1	2
X_3	$D3$	$\lvert D_3 \rvert$	3	1	3
X_4	$D4$	$\lvert D_4 \rvert$	4	1	4
				$T^+ = \sum_{i=1}^{n} r(\lvert D_i \rvert)\delta_i$	10

Böylece T^+ istatistiğinin örnekleme dağılımı:

$T^+ = t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Pr(T^+ = t)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

olarak bulunur.

b) Test istatistiğinin beklenen değeri:

$E(T^+) = \sum_{t=0}^{10} t\, Pr(T^+ = t) = \frac{1}{16}[0 + 1 + 2 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 8 + 9 + 10] = 5$ birim

Test istatistiğinin varyansı:

$V(T^+) = E\left({T^+}^2\right) - [E(T^+)]^2 = \sum_{t=0}^{10} t^2\, Pr(T^+ = t) - [E(T^+)]^2 =$

$\frac{1}{16}[0 + 1 + 4 + 18 + 32 + 50 + 72 + 98 + 64 + 81 + 100] - (5)^2 = 7{,}5$ birim

c) $P(T^+ > 2) = \sum_{t=3}^{10} Pr(T^+ = t) = Pr(T^+ = 3) + Pr(T^+ = 4) + \cdots + Pr(T^+ = 10) = \frac{13}{16}$

$P(T^+ \leq 4) = \sum_{t=0}^{4} Pr(T^+ = t) = Pr(T^+ = 0) + Pr(T^+ = 1) + Pr(T^+ = 2) + Pr(T^+ = 3) + Pr(T^+ = 4) = \frac{7}{16}$

$P(2 < T^+ < 6) = \sum_{t=3}^{5} Pr(T^+ = t) = Pr(T^+ = 3) + Pr(T^+ = 4) + Pr(T^+ = 5) = \frac{6}{16}$ bulunur.