T.C.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

İST.482 PARAMETRİK OLMAYAN İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLER

PROF. DR. YÜKSEL ÖNER

7. Hafta

özenilen üniversite

5.1.2 MANN WHITNEY TESTİ

Medyan testi gibi iki bağımsız grubu medyan parametreleri yönünden karşılaştırmada kullanılan bir parametrik olmayan test tekniğidir. Medyan testi her bir örnek birimini birleştirilmiş örneğin medyan değerinden büyük ya da küçük olmasına göre sınıflandırdığından bilgi kaybına neden olmaktadır. Şöyle ki $m = 45$ iken ölçüm değeri 50 olan örnek birimi ile ölçüm değeri 250 olan örnek birimi test istatistiğine aynı katkıyı sağlamaktadır. Bu durum medyan testinin zayıf bir yanı olup, bu eksiklik Mann Whitney testi tarafından giderilmektedir.

Varsayımları

i) İlgilenilen değişken sürekli olmalıdır.

ii) İlgilenilen değişkenin ölçme düzeyi en az sıralama olmalıdır.

iii) Veriler iki bağımsız gruptan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak çekilmelidir.

Test İşleminin Algoritması

1. Hipotezler kurulur

M_1: Birinci grubun bilinmeyen medyan parametresi

M_2: İkinci grubun bilinmeyen medyan parametresi olmak üzere;

a) $H_0: M_1 = M_2$	b) $H_0: M_1 = M_2$	c) $H_0: M_1 = M_2$
$H_1: M_1 < M_2$	$H_1: M_1 > M_2$	$H_1: M_1 \neq M_2$

şeklindedir.

2. Gruplardan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak örnekler çekilir.

Birinci gruptan n_1 birimlik ve ikinci gruptan da n_2 birimlik örnekler çekilsin. Birinci örnek X_{11}, $X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ve ikinci örnek X_{21}, $X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ olsun.

3. İki örnek birleştirilerek birleştirilmiş örnek oluşturulur ve bu örnekte örnek birimlerine en küçükten başlanarak sıra sayıları verilir. Eğer aynı değerli gözlemler varsa bu gözlemlere verilmesi gereken sıra sayılarının ortalaması olan ortalama sıra sayısı verilir. $i = 1, 2, \dots, n_1$ için $R(X_{1i})$ birinci örneğe verilen sıra sayılarını ve $i = 1, 2, \dots, n_2$ için $R(X_{2i})$ ikinci örneğe verilen sıra sayılarını göstersin.

4. Test istatistiği belirlenir. Mann Whitney testi için test istatistiği

$$T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2} \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlıdır, burada $S = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1i})$, yani birinci örneğe verilen sıra sayılarının toplamıdır. T_h test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri olsun. (minT=0 ve maxT=$n_1 n_2$)

5. Karar kuralı belirlenir ve karar verilir. Karar kuralı α önem seviyesinde H_1 hipotezi dikkate alınarak belirlenir. $\left(\underbrace{0,\ 1,\ 2,}_{W_\alpha} \quad \ldots \quad ,\underbrace{n-2, n-1, n}_{W'_\alpha}\ ; (n = n_1 n_2)\right)$

H_1	**Karar Kuralı**
$M_1 < M_2$	$T_h \leq W_\alpha$ ise H_0 ret edilir $T_h > W_\alpha$ ise H_0 ret edilemez $P(T \leq W_\alpha) = \alpha$ ise W_α=? (sol kritik değer)
$M_1 > M_2$	$T_h \geq W'_\alpha$ ise H_0 ret edilir $T_h < W'_\alpha$ ise H_0 ret edilemez $W'_\alpha = n_1 n_2 - W_\alpha$ (sağ kritik değer)
$M_1 \neq M_2$	$T_h \leq W_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $T_h \geq W'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilir $P\left(T \leq W_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ ise $W_{\frac{\alpha}{2}}$ =? $W_{\frac{\alpha}{2}} < T_h < W'_{\frac{\alpha}{2}}$ ise H_0 ret edilemez $W'_{\frac{\alpha}{2}} = n_1 n_2 - W_{\frac{\alpha}{2}}$

SPSS'de Mann Whitney Testi

Spss'de Mann Whitney testinin uygulanmasında takip edilecek algoritmanın adımları şu şekilde verilebilir.

1.Adım Variable View sayfasında bağımlı değişken (ilgilenilen değişken) ve grup değişkeni (bağımsız grupları gösteren kategorik değişken) özellikleri ile birlikte tanımlanır. Grup değişkeninin kategorileri **Values** penceresinde belirtilir. **Data View** sayfasında değişkenlere ait veriler girilir. Grup değişkenine ait veriler birinci grup için "1" ve ikinci grup için "2" olarak girilir.

2.Adım Analyze > Nonparametrics Tests > Legacy Dialogs > 2 Independent Samples… yolu izlenerek **Two Independent Samples Tests** ekranı açılır. Bu ekranda değişkenler listesinden ilgilenilen değişken seçilerek **Test Variable List** işlem kutusuna, grup değişkeni de **Grouping Variable** işlem kutusuna aktarılır. **Define Groups** penceresinden grup kategorileri girilir.

3.Adım Test Type penceresinden **Mann Whitney U** seçeneği işaretlenir. Tam olasılık değerini elde etmek için **Exact** penceresi tıklanarak açılacak olan pencerede **Exact** seçeneği işaretlenir. **Continue** ve **Ok** tuşları ile test işlemi bitirilir. Sonuçlar çıktı sayfasında tablo halinde sunulur.

4.Adım Çıktı tablosunda test istatistiğinin değeri olarak **Mann Whitney U** değeri verilir. Ayrıca tek yönlü durumda **Exact. Sig. (1-tailed)** satırındaki sayısal değer p olasılığı olarak, çift yönlü durumda ise **Exact. Sig. (2-tailed)** satırındaki sayısal değer p olasılığı olarak alınır. Eğer $p < \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $p \geq \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

ÖRNEK 5.2 $H_0: M_1 = M_2$ hipotezini $H_1: M_1 > M_2$ hipotezine karşı Mann Whitney U testi ile test etmek için medyanı M_1 olan kitleden 3 birimlik ve M_2 olan kitleden 2 birimlik ratgele örnekler çekilmiştir. Buna göre;

a) Test istatistiğinin örnekleme (olasılık) dağılımını oluşturunuz?

b) Test istatistiğinin beklenen değerini ve varyansını hesaplayınz?

c) $P(T > 2)$, $P(T \leq 4)$ ve $P(1 < T \leq 5)$ olasılıklarını hesaplayınız?

Çözüm a) Mann Whitney U testi için test istatistiği $T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ dir. $n_1 = 3$ ve $n_2 = 2$ olup, iki örneklem birleştirilince birleştirilmiş örnek hacmi $n = n_1 + n_2 = 5$ olur. Bu durumda test istatistiğinin hesaplanabileceği farklı durumların sayısı, n tane sıra sayısından n_1 tanesi birinci gruba verileceğinden farklı dağılışların sayısı olarak $\binom{n}{n_1} = \binom{5}{3} = 10$ olacaktır. Şimdi bu durumları oluşturalım ve her bir durumda T istatistiğinin alabileceği değerleri bulalım.

Durum	X_{1i}	X_{2i}	$R(X_{1i})$	$R(X_{2i})$	$S = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1i})$	$T = S - 6$
1	X_{11} X_{12} X_{13}	X_{21} X_{22}	1 2 3	4 5	6	0
2			1 2 4	3 5	7	1
3			1 2 5	3 4	8	2
4			1 3 4	2 5	8	2
5			1 3 5	2 4	9	3
6			1 4 5	2 3	10	4
7			2 3 4	1 5	9	3
8			2 3 5	1 4	10	4
9			2 4 5	1 3	11	5
10			3 4 5	1 2	12	6

Böylece T istatistiğinin örnekleme dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$T = t$	0	1	2	3	4	5	6
$P(T = t)$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

b) T istatistiğinin beklenen değeri;

$E(T) = \sum_{t=0}^{6} t\, P(T = t) = \frac{1}{10}(0 * 1 + 1 * 1 + 2 * 2 + 3 * 2 + 4 * 2 + 5 * 1 + 6 * 1) = 3$

iken, varyansı ise

$V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \sum_{t=0}^{6} t^2\, P(T = t) - (3)^2$

$= \frac{1}{10}(0^2 * 1 + 1^2 * 1 + 2^2 * 2 + 3^2 * 2 + 4^2 * 2 + 5^2 * 1 + 6^2 * 1) - 9 = 3$ bulunur.

c) $P(T > 2) = 1 - P(T \leq 2) = 1 - \sum_{t=0}^{2} P(T = t) = 1 - \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10}\right] = \frac{3}{5}$

$P(T \leq 4) = \sum_{t=0}^{4} P(T = t) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$

$P(1 < T \leq 5) = \sum_{t=2}^{5} P(T = t) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$ olarak elde edilir.

ÖRNEK 5.3 Yabancı dil eğitiminde A yöntemi ve B yöntemi olarak bilinen iki farklı yöntem uygulanmaktadır. Uzmanlar A yöntemi ile yapılan eğitimde öğrencilerin başarı puanlarının genel olarak B yöntemi ile eğitilen öğrencilerin başarı puanlarına göre daha düşük olduğu görüşündedirler. Bu durumun geçerliliğini incelemek amacı ile birincisinde 12 ikincisinde 8 öğrencinin olduğu gruplardan birincisi A yöntemi ile ikincisi de B yöntemi ile eğitime alınmıştır. Eğitim sürecinin sonunda yapılan genel bir testten öğrencilerin aldıkları puanlar aşağıdadır. Uzmanların haklı olup olmadığına %5 önem seviyesinde Mann Whitney U testi ile karar veriniz?

A Yöntemi (X_{1i})	30	20	40	60	41	50	90	15	47	56	12	50
$R(X_{1i})$	4	3	6,5	14	8	10,5	19	2	9	12	1	10,5
B Yöntemi (X_{2i})	37	80	82	59	40	91	88	68				
$R(X_{2i})$	5	16	17	13	6,5	20	18	15				

Çözüm i) Hipotezler kurulur

M_1: A yöntemi ile eğitim görenlerin başarı puanı medyanı

M_2: B yöntemi ile eğitim görenlerin başarı puanı medyanı olmak üzere:

$H_0: M_1 = M_2$

$H_1: M_1 < M_2$

ii) Test istatistiği belirlenir ve alabileceği değer hesaplanır

Mann Whitney U testi için test istatistiği $T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ dir. Burada $n_1 = 12$ ve $S = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1i}) = 99{,}5$ ve böylece T istatistiğinin alabileceği değer $T_h = 99{,}5 - \frac{12*13}{2} = 21{,}5$ bulunur.

iii) Karar: α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı $T_h \leq W_\alpha$(veya $p \leq \alpha$) ise H_0 ret edilir, $T_h > W_\alpha$ (veya $p > \alpha$) ise H_0 ret edilemez. $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde $n_1 = 12$ ve

$n_2 = 8$ için kritik değer (T12)'den $W_\alpha = 27$ olarak bulunur. Buna göre 21,5 < 27 yani $T_h < W_\alpha$ olduğundan H_0 ret edilir. p olasılığı hakkında (T12)'den yaklaşık olarak bir değer bulunabilir. $p = P(T \leq T_h) = P(T \leq 21{,}5)$ olsun. $n_1 = 12$ ve $n_2 = 8$ iken (T12)'den $P(T \leq 18) = 0{,}01$ ve $P(T \leq 23) = 0{,}025$ bulunur. Bu sonuca göre $0{,}01 < P(T \leq 21{,}5) < 0{,}025$, yani 0,01< p < 0,025 elde edilir. Böylece $\alpha = 0{,}05$ iken $p < \alpha$ olup H_0 ret edilir. Sonuç olarak uzmanlar düşüncelerinde %95 güvenle haklıdırlar.

Spss Çözümü Hipotezler:

$H_0: M_1 = M_2$

$H_1: M_1 < M_2$

Ranks

	Yöntem	N	Mean Rank	Sum of Ranks
	A-Yöntemi	12	8,29	S=99,50
Puan	B-Yöntemi	8	13,81	110,50
	Total	20		

Test Statistics[a]

	Puan
Mann-Whitney U	21,500
Wilcoxon W	99,500
Z	-2,046
Asymp. Sig. (2-tailed)	,041
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,039[b]
Exact Sig. (2-tailed)	,041
Exact Sig. (1-tailed)	,020
Point Probability	,002

$T_h = 21{,}5$ ve H_1 tek yönlü olduğundan $p = 0{,}02$ dir. $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde iken $p < \alpha$ olduğundan H_0 ret edilir. Sonuç olarak uzmanlar düşüncelerinde %95 güvenle haklıdırlar.

Burada Z değeri Mann Whitney test istatistiğinin standartlaştırılmış değerini göstermekte olup, büyük hacimli örnekler için kullanılır ($n_1$ve/veya n_2'den birisi 20'den büyükse)

ÖRNEK 5.4 Bir zirai araştırmacı gübre türlerinin buğday verimi üzerine etkisini araştırmak amacıyla hazırladığı deney planında birincisinde 10 parsel diğerinde 9 parsel olacak şekilde iki grup düzenliyor. Birinci grup parsellerde yaptığı buğday ekiminde A türü gübre, ikinci grup parsellerde yaptığı buğday ekiminde ise B türü gübre kullanmıştır. Buğday verimine etki yapabilecek olan diğer tüm faktörler sabit hale getirilmiştir. Hasat mevsimi sonunda parsellerden alınan buğday verimleri aşağıdadır. Buna göre %5 önem seviyesinde A türü gübrenin verime etkisinin daha iyi olduğu Mann Whitney testine göre söylenebilir mi?

A-Gübresi(X_{1i})	36	48	61	70	81	67	78	90	70	14
$R(X_{1i})$	9,5	11	12	14,5	17	13	16	18,5	14,5	3
B-Gübresi(X_{2i})	28	36	90	17	29	30	21	8	10	

$\boldsymbol{R(X_{2i})}$	6 9,5 18,5 4 7 8 5 1 2

Çözüm i) Hipotezler kurulur

M_1: A gübresinin kullanıldığı parsellerden elde edilen buğday verimine ait medyan

M_2: B gübresinin kullanıldığı parsellerden elde edilen buğday verimine ait medyan

olmak üzere:

$H_0: M_1 = M_2$

$H_1: M_1 > M_2$

ii) Test istatistiği belirlenir ve alabileceği değer hesaplanır

Mann Whitney U testi için test istatistiği $T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ dir. Burada $n_1 = 10$ ve $S = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1i}) = 129$ ve böylece T istatistiğinin alabileceği değer $T_h = 129 - \frac{10*11}{2} = 74$ bulunur.

iii) Karar: α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı $T_h \geq W'_\alpha$(veya $p \leq \alpha$) ise H_0 ret edilir, $T_h < W'_\alpha$ (veya $p > \alpha$) ise H_0 ret edilemez. $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde $n_1 = 10$ ve $n_2 = 9$ için kritik değer (T12)'den $W_\alpha = 25$ ve böylece $W'_\alpha = n_1 * n_2 - W_\alpha$= 10*9 – 25 = 65 olarak bulunur. Buna göre 74 > 65, yani $T_h > W'_\alpha$ olduğundan H_0 ret edilir. p olasılığı hakkında (T12)'den yaklaşık olarak bir değer bulunabilir. $p = P(T \geq 74)$ olsun. T istatistiğinin örnekleme dağılımı simetrik olduğundan $p = P(T \geq 74) = P(T \leq [n_1 n_2 - 74]) = P(T \leq 10 * 9 - 74) = P(T \leq 16)$ yazılabilir.$n_1 = 10$ ve $n_2 = 9$ iken (T12)'den $P(T \leq 14) = 0,005$ ve $P(T \leq 17) = 0,01$ bulunur. Bu sonuca göre $0,005 < P(T \geq 74) < 0,01$, yani 0,005< p < 0,01 elde edilir. Böylece $\alpha = 0,05$ iken $p < \alpha$ olup H_0 ret edilir. Sonuç olarak A gübresinin buğday verimine etkisi %95 güvenle B gübresinden daha fazladır.

Spss Çözümü Hipotezler:

$H_0: M_1 = M_2$

$H_1: M_1 > M_2$

	gübre	N	Mean Rank	Sum of Ranks
verim	A gübresi	10	12,90	S =129,00
	B gübresi	9	6,78	61,00
	Total	19		

Test Statistics[a]

	verim
Mann-Whitney U	16,000
Wilcoxon W	61,000
Z	-2,371
Asymp. Sig. (2-tailed)	,018
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,017[b]
Exact Sig. (2-tailed)	,016
Exact Sig. (1-tailed)	,008
Point Probability	,001

$T_h = 16$ olup, elle çözünden elde edilen $T_h = 74$ değerinden farklıdır. Bunun nedeni Spss bu değeri hesaplarken Sdeğeri küçük olan grubu dikkate almasıdır. Yani $S = \sum_{i=1}^{n_2} R(X_{2i}) = 61$ olup, $T_h = S - \frac{n_2(n_2+1)}{2} = 61 - \frac{9*10}{2} = 16$bulunur.$H_1$ tek yönlü olduğundan $p = 0{,}008$ dir. $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde iken $p < \alpha$ olduğundan H_0 ret edilir. Sonuç olarak A gübresinin kullanıldığı parsellerden alınan verim B gübresinin kullanıldığı parsellerden alınan verimden daha fazladır.

ÖRNEK 5.5 A meslek grubundan 9 ve B meslek grubundan da 8 birey rastgele seçilmiş ve aynı Mal grubuna yaptıkları harcamalar aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Bu meslek gruplarının yaptıkları harcamalar bakımından farklı oldukları %5 önem seviyesinde söylenebilir mi?

A Mesleği$(X_{1i} - 100TL)$	42	60	71	80	74	30	18	61	29
$R(X_{1i})$	9	11	14	16	15	6	2,5	12	5
B Mesleği$(X_{2i} - 100TL)$	18	91	67	32	44	7	26	38	
$R(X_{2i})$	2,5	17	13	7	10	1	4	8	

Çözüm: i) Hipotezler kurulur

M_1: A meslek grubunun harcama medyanı

M_2: B meslek grubunun harcama medyanı

olmak üzere:

H_0: $M_1 = M_2$

H_1: $M_1 \neq M_2$

ii) Test istatistiği belirlenir ve alabileceği değer hesaplanır

Mann Whitney U testi için test istatistiği $T = S - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$ dir. Burada $n_1 = 9$ ve $S = \sum_{i=1}^{n_1} R(X_{1i}) = 90{,}5$ ve böylece T istatistiğinin alabileceği değer $T_h = 90{,}5 - \frac{9*10}{2} = 45{,}5$ bulunur.

iii) Karar: α önem seviyesinde H_1 hipotezine göre karar kuralı $T_h \leq W_{\frac{\alpha}{2}}$ veya $T_h \geq W'_{\frac{\alpha}{2}}$ (veya $p \leq \alpha$) ise H_0 ret edilir, $W_{\frac{\alpha}{2}} < T_h < W'_{\frac{\alpha}{2}}$ (veya $p > \alpha$) ise H_0 ret edilemez. $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde $n_1 = 9$ ve $n_2 = 8$ için kritik değer (T12)'den $W_{\frac{\alpha}{2}} = 16$ ve böylece $W'_{\frac{\alpha}{2}} =$

$n_1 * n_2 - W_{\frac{\alpha}{2}}$= 9*8 – 16 =56 olarak bulunur. Buna göre 16 < 45,5 < 56, yani$W_{\frac{\alpha}{2}} < T_h < W'_{\frac{\alpha}{2}}$ olduğundan H_0 ret edilir. p olasılığı hakkında (T12)'den yaklaşık olarak bir değer bulunabilir. H_1çift yönlü ve $E(T) = \frac{n_1 * n_2}{2} = \frac{9*8}{2} = 36$ olup $T_h = 45,5 > 36 = E(T)$olduğundan $p = P(T \geq 45,5)$ olsun [Eğer $T_h < E(T)$ olursa, o zaman $p = P(T \leq T_h)$ olarak alınır]. Tistatistiğinin örnekleme dağılımı simetrik olduğundan $p = P(T \geq 45,5) = P(T \leq [n_1 n_2 - 45,5]) = P(T \leq 9 * 8 - 45,5) = P(T \leq 26,5)$yazılabilir. $n_1 = 9$ ve $n_2 = 8$ iken (T12)'den $P(T \leq 23) = 0,10$ bulunur. Bu sonuca göre $P(T \leq 26,5) = P(T \geq 45,5) > 0,10$, yani $p > 0,10$ elde edilir. Böylece $\alpha = 0,05$ iken $p > \alpha$ olup H_0 ret edilemez. Sonuç olarak A ve B meslek gruplarında çalışanların söz konusu mal grubuna yaptıkları harcamalar arasında %95 güvenle fark yoktur.

<u>Spss Çözümü</u> Hipotezler:

$H_0: M_1 = M_2$

$H_1: M_1 \neq M_2$

Ranks

	meslek	N	Mean Rank	Sum of Ranks
harcama	A gurubu	9	10,06	S=90,50
	B grubu	8	7,81	62,50
	Total	17		

Test Statistics[a]

	harcama
Mann-Whitney U	26,500
Wilcoxon W	62,500
Z	-,915
Asymp. Sig. (2-tailed)	,360
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,370[b]
Exact Sig. (2-tailed)	,384
Exact Sig. (1-tailed)	,192
Point Probability	,014

$T_h = 26,5$ olup, elle çözünden elde edilen $T_h = 45,5$ değerinden farklıdır. Bunun nedeni Spss bu değeri hesaplarken Sdeğeri küçük olan grubu dikkate almasıdır. Yani $S = \sum_{i=1}^{n_2} R(X_{2i}) = 62,5$ olup, $T_h = S - \frac{n_2(n_2+1)}{2} = 62,5 - \frac{8*9}{2} = 26,5$bulunur.$H_1$çift yönlü olduğundan $p = 0,384$ dir. $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde iken $p > \alpha$ olduğundan H_0 ret edilemez. Sonuç olarak A ve B meslek gruplarında çalışanların söz konusu mal grubuna yaptıkları harcamalar arasında %95 güvenle fark yoktur.

5.1.3 WALD-WOLFOWITZ DİZİ PARÇALARI TESTİ

İki bağımsız grubu dağılım fonksiyonlarının benzerliği yönünden karşılaştırmak amacı ile kullanılan bu test, örnek birimlerinin simgelerle gösterilmesi durumunu kapsayan tek grup dizi parçaları testine benzemektedir.

Varsayımları

i) İlgilenilen değişken süreklidir

ii) İlgilenilen değişkenin ölçme düzeyi en az sıralama olmalıdır.

iii) Veriler iki bağımsız gruptan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak çekilmelidir.

Test İşleminin Algoritması

1. Hipotezler kurulur

$F_1(x)$: Birinci gruba ait bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$F_2(x)$: İkinci gruba ait bilinmeyen dağılım fonksiyonu olmak üzere

H_0: $F_1(x) = F_2(x)$, bütün x değerleri için

H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$, en az bir x değerleri için

2. Gruplardan rastgele ve birbirinden bağımsız olarak örnekler çekilir.

Birinci gruptan n_1 birimlik ve ikinci gruptan da n_2 birimlik örnekler çekilsin. Birinci örnek X_{11}, $X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ ve ikinci örnek X_{21}, $X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ olsun.

3. İki örnek birleştirilerek birleştirilmiş örnek oluşturulur ve bu örnekte örnek birimleri küçükten büyüğe doğru sıralanır. Daha sonra her bir örnek birimi sırasıyla ait olduğu gruba göre simgelenir. Eğer ilgili örnek birimi birinci gruba aitse (+) ile ikinci gruba aitse (-) ile simgelenir.

4. Test istatistiği belirlenir. Wald-Wolfovitz testi için test istatistiği

r : Dizi parçalarının sayısı (5.5)

olarak tanımlanır. r istatistiğinin alabileceği değerler 2, 3, 4, …, n olup, burada $n = n_1 + n_2$ dir. Eğer H_0 hipotezi doğru ise bu durumda birinci örnekteki örnek birimlerine verilen simgeler ile ikinci örnekteki örnek birimlerine verilen simgelerin iyice karışmış olmasını bir diğer ifadeyle sistematik dizilişe yakın bir diziliş göstermesini bekleriz. Bu ise test istatistiğinin büyük değer alacağı anlamına gelir. Test istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri r_h olsun.

5. Karar kuralı belirlenir ve karar verilir.

H_1 hipotezi doğru iken birinci ve ikinci örneklerdeki örnek birimlerine verilen simgelerin kümelenme yapısına yakın bir diziliş göstermesi yani test istatistiğinin küçük değer alması beklenir. Ne kadar küçük olması gerektiği ile ilgili kritik değer α önem seviyesine, n_1 ve n_2 değerlerine göre (T11.a) tablosundan bulunacak olan r_k kritik değeridir. Eğer $r_h \leq r_k$ (veya $p \leq \alpha$) ise H_0 hipotezi ret edilir, $r_h > r_k$ (veya $p > \alpha$) ise H_0 hipotezi ret edilemez.

SPSS'de Wald-Wolfowitz Testi

Spss'de Wald-Wolfowitz testinin uygulanmasında takip edilecek algoritmanın adımları şu şekilde verilebilir.

1.Adım Variable View sayfasında bağımlı değişken (ilgilenilen değişken) ve grup değişkeni (bağımsız grupları gösteren kategorik değişken) özellikleri ile birlikte tanımlanır. Grup değişkeninin kategorileri **Values** penceresinde belirtilir. **Data View** sayfasında değişkenlere ait veriler girilir. Grup değişkenine ait veriler birinci grup için "1" ve ikinci grup için "2" olarak girilir.

2.Adım Analyze > Nonparametrics Tests > Legacy Dialogs > 2 Independent Samples… yolu izlenerek **Two Independent Samples Tests** ekranı açılır. Bu ekranda değişkenler listesinden ilgilenilen değişken seçilerek **Test Variable List** işlem kutusuna, grup değişkeni de **Grouping Variable** işlem kutusuna aktarılır. **Define Groups** penceresinden grup kategorileri girilir.

3.Adım Test Type penceresinden **WALD-Wolfowitz runs** seçeneği işaretlenir. Tam olasılık değerini elde etmek için **Exact** penceresi tıklanarak açılacak olan pencerede **Exact** seçeneği işaretlenir. **Continue** ve **Ok** tuşları ile test işlemi bitirilir. Sonuçlar çıktı sayfasında tablo halinde sunulur.

4.Adım Çıktı tablosunda test istatistiğinin değeri olarak **Number of Runs (dizi parçalarının sayısı)** sütunundaki değer alınır. Ayrıca H_1çift yönlü olduğundan **Exact. Sig. (1-tailed)** sütunundaki sayısal değer p olasılığı olarak alınır. Eğer $p \leq \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilir, $p > \alpha$ ise H_0 hipotezi ret edilemez.

Örnek 5.6 A ve B kimyasal gübrelerinin kullanıldığı parsellerden rastgele seçilen 10'ar parselden elde edilen verim miktarları (kg) aşağıda verilmiştir. Bu örnekleme göre 0,025 önem seviyesinde A ve B gübrelerinin kullanıldığı durumlarda elde edilen verime ait dağılımların benzer olup olmadığına karar veriniz?

A-Gübresi$(\boldsymbol{X_{1i}})$	420 430 428 400 460 462 475 500 406 525
B-Gübresi$(\boldsymbol{X_{2i}})$	390 380 422 424 427 466 472 474 473 576

Çözüm Hipotezler kurulur

$F_1(x)$: A gübresine ait verim için bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$F_2(x)$: B gübresine ait verim için bilinmeyen dağılım fonksiyonu olmak üzere

H_0: $F_1(x) = F_2(x)$, bütün x değerleri için

H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$, en az bir x değerleri için

İki örnek birleştirilerek, birleştirilmiş örnekte örnek birimleri küçükten büyüğe doğru sıralanır ve her bir örnek birimi ait olduğu gruba göre, A gübresinin kullanıldığı gruba aitse (+) ve B gübresinin kullanıldığı gruba aitse (-) ile simgelenir.

X_i :	380	390	400	406	420	422	424	427	428	430	460	462
Simge :	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+

466	472	473	474	475	500	525	576
-	-	-	-	+	+	+	-

Test istatistiğinin alabileceği değer $r_h = 7$ dir. $\alpha = 0{,}025$ için H_1 e göre kritik değer $n_1 = 10$ ve $n_2 = 10$ iken $r_k = 6$ dır. Böylece $r_h > r_k$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. Böylece gübre türlerine göre alınan verimlere ait dağılımlar birbirine benzerdir.

Spss Çözümü Hipotezler

H_0: $F_1(x) = F_2(x)$, bütün x değerleri için

H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$, en az bir x değerleri için

Test Statistics

		Number of Runs	Z	Exact Sig. (1-tailed)	Point Probability	$\alpha = 0{,}025$ önem seviyesinde p =,051 > α olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez.
verim	Exact Number of Runs	r_h =7	-1,608	p =,051	,033	

NOT: Gruplardan çekilen örneklerde karşılıklı olarak aynı değerli gözlemlerin olması durumunda bu gözlemler sıralamada arka arkaya geleceğinden simgelerken gözlemlerin ait olduğu grup için mümkün olan bütün farklı simgelemeler oluşturulur. Mümkün olan her bir sıralama için r istatistiğinin değeri hesaplanır ve bu değerlerin ortalaması r_h değeri olarak alınır. Spss çözümünde ise sonuç tablosunda mümkün olan bütün farklı simgeleme durumlarından elde edilen r istatistiği değerlerinden **Minimum possible (minr_h)** ve **Maximum possible ($max\, r_h$)** değerlerinin yer aldığı iki satır bilgisi verilir. Bu değerlere karşılık gelen p olasılıkları dikkate alınarak karar verilir ve değerlendirilir.

Örnek 5.7 Erkek hastalardan rastgele seçilen 6 ve kadın hastalardan rastgele seçilen 7 hastanın tahlil sonuçları aşağıdadır. $\alpha = 0{,}025$ önem seviyesinde bu örneklerin ait olduğu dağılımlar için dağılım fonksiyonlarının benzer olup olmadığına karar veriniz?

Erkek(X_{1i})	10	11	18	9	17	19	
Kadın(X_{2i})	19	13	20	22	21	12	14

Çözüm Hipotezler kurulur

$F_1(x)$: Erkekler grubuna ait tahlil sonuçları için bilinmeyen dağılım fonksiyonu

$F_2(x)$: Kadınlar grubuna ait tahlil sonuçları için bilinmeyen dağılım fonksiyonu olmak üzere

H_0: $F_1(x) = F_2(x)$, bütün x değerleri için

H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$, en az bir x değerleri için

İki örnek birleştirilerek, birleştirilmiş örnekte örnek birimleri küçükten büyüğe doğru sıralanır ve her bir örnek birimi ait olduğu gruba göre, erkekler grubuna aitse (E) ve kadınlar grubuna aitse (K) ile simgelenir. Gruplarda karşılıklı olarak aynı değerli gözlemler olduğundan (19 her iki grupta da var), simgelemenin iki defa yapılması gerekir. Birinci simgelemede ilk 19 gözlemi erkekler grubuna ait olarak değerlendirilirken, ikinci simgelemede ilk 19 gözlemi ikinci gruba ait olarak değerlendirilir.

X_i :	9	10	11	12	13	14	17	18	**19**	**19**	20	21	22	r_h
1. Simge :	E	E	E	K	K	K	E	E	**E**	**K**	K	K	K	4
2. Simge :	E	E	E	K	K	K	E	E	**K**	**E**	K	K	K	6

Test istatistiğinin alabileceği değer $r_h = \frac{4+6}{2} = 5$ dir. $n_1 = 6$ ve $n_2 = 7$ iken $\alpha = 0{,}025$ için H_1 e göre kritik değer r_k = 3 dür. Böylece $r_h > r_k$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez. O halde erkek ve kadın hastalar için tahlil sonuçlarına ait dağılımların dağılım fonksiyonları birbirine benzerdir.

Spss Çözümü Hipotezler

H_0: $F_1(x) = F_2(x)$, bütün x değerleri için

H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$, en az bir x değerleri için

Test Statistics

		Number of Runs	Z	Exact Sig. (1-tailed)	Point Probability	
tahlil	Minimum Possible	4	-1,727	,043	,035	minr_h=4 ve maxr_h=6 dır. Bu değerlere karşılık gelen olasılıklar ise sırasıyla 0,043 ve 0,296 olup $p = 0{,}043$ alınsa bile $p > \alpha = 0{,}025$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez.
	Maximum Possible	6	-,561	,296	,175	