III.4 Faktör Yüklerinin Temel Bileşen Yöntemi ile Elde Edilmesi

Faktör analizinde faktör yükleri matrisi (L)ile faktör yapı matrisinin (H) elde edilmesinde kullanılan birçok yöntem vardır. Temel bileşen yöntemi de bu yöntemlerden birisidir. Burada faktör yüklerinin elde edilmesinde temel bileşen yönteminin kullanılması açıklanacaktır.

i) Başlangıç Sistemi ve Kitle Kovaryans Matrisinin Biliniyor Olması Durumu

Başlangıç sistemi $\underline{X} : p \times 1$ değişkenler vektörü ile verilsin. Bu sistem için kitle parametreleri $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$, $Cov(\underline{X}) = \Sigma$ ve Σ matrisi biliniyor olsun. Bu takdirde Σ matrisinin özdeğer-özvektör ikilileri $(\lambda_j\ ,\ \underline{a}_j)\ ,\ j = 1, 2\ ,\ \ldots, p$ olmak üzere, Σ matrisinin spectral ayrışımı;

$$\Sigma = \lambda_1 \underline{a}_1 \underline{a}_1' + \lambda_2 \underline{a}_2 \underline{a}_2' + \cdots + \lambda_p \underline{a}_p \underline{a}_p'$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\underline{a}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\underline{a}_2 \quad \ldots. \quad \sqrt{\lambda_p}\underline{a}_p\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\underline{a}_1' \\ \sqrt{\lambda_2}\underline{a}_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{\lambda_p}\underline{a}_p' \end{bmatrix} = LL' \tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğe göre faktör analizi modeli $(\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon})$ kovaryans matrisindeki tüm bilgiyi (varyansları ve kovaryansları) faktörler tarafından açıklayabilmektedir. Bu durumda ortak faktör sayısı $m = p$ olup özel faktörlerin açıklayabileceği hiçbir bilgi kalmayacaktır. Diğer bir ifadeyle $\Psi = [0]$ olacaktır. Böylece $\underline{X}$ vektörünün kovaryans yapısının açıklanması;

$$\Sigma = LL' + \Psi \tag{3.24}$$

eşitliği gereğince $\Sigma = LL' + [0] = LL'$olup, burada faktör yükleri matrisi;

$$L = \left[\sqrt{\lambda_1}\underline{a}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\underline{a}_2 \quad \ldots. \quad \sqrt{\lambda_p}\underline{a}_p\right]$$

şeklindedir. Bu matrisin k-ncı kolonu k-ncı faktör üzerindeki yükleri tanımlar ve aynı zamanda k-ncı asıl temel bileşenin katsayıları olarak bilinir. Buna göre k-ncı faktör için faktör yükleri $\sqrt{\lambda_k}\underline{a}_k\ , k = 1, 2, \ldots, p$ olup, k-ncı asıl temel bileşenin katsayılarıdır. Böylece j-nci değişken için model denklemi, Eşitlik (3.1) gereğince

$$X_j - \mu_j = \sqrt{\lambda_1} a_{j1} f_1 + \sqrt{\lambda_2} a_{j2} f_2 + \cdots + \sqrt{\lambda_p} a_{jp} f_p + \varepsilon_j\ , j = 1, 2, \ldots, p \tag{3.25}$$

dir. Eşitlik (3,24)'e göre Σ matrisinin faktörleşme yapısı her ne kadar faktörler tarafından kesin olarak ortaya konabiliyorsa da bu durum pratikte genellikle tercih edilmez. Çünkü faktör modelinde ortak faktör sayısının değişken sayısından daha az olması (boyut indirgeme) ve kovaryans matrisine ait bilginin yeterli düzeyde açıklanması araştırmacı için yeterli kabul edilebilir. Buna göre $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \geq 0$ sıralaması gereğince kovaryans matrisine ait bilginin büyük bir çoğunluğu 1-nci faktör tarafından, bundan sonra büyük bir kısmı 2-nci faktör tarafından ve böyle devam ederek çok az bir kısmı p-nci faktör tarafından açıklanacaktır. Eğer ortak faktör sayısı m kabul edilirse $(m < p)$, Σ matrisinin faktörleşme yapısı;

$$\Sigma \cong LL' + \Psi$$

olup, burada $L = \left[\sqrt{\lambda_1}\underline{a}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\underline{a}_2 \quad \ldots. \quad \sqrt{\lambda_m}\underline{a}_m\ \right]: p \times m$ iken $\Psi = K\ddot{o}ş\left[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p\right]$ dir. Öyle ki $\psi_j = \sigma_{jj} - \left(l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2\right) = \sigma_{jj} - h_j^2\ ,\ j = 1, 2, \ldots, p\ ,\ \left(l_{jk} = \sqrt{\lambda_k}a_{jk}\right)$

olacaktır. Böylece $\Sigma \cong LL' + \Psi$ eşitliği ile Σ matrisinin köşegen üzerindeki elemanlar olan değişkenlere ait kitle varyansları tamamen modellenirken, köşegen dışında yer alan ve değişkenlere ait ilişkileri gösteren kovaryanslar yaklaşık olarak modellenmiş olur. Yani;

$$\sigma_{jj} = \sum_{k=1}^{m} l_{jk}^2 + \psi_j = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2 + \psi_j\ , j = 1, 2, \ldots, p \tag{3.26}$$

şeklinde iken;

$$\sigma_{jt} = l_{j1}l_{t1} + l_{j2}l_{t2} + \cdots\ l_{jp}l_{tp} \tag{3.27}$$

şeklindedir.

Temel bileşen yönteminde L faktör yükleri matrisinin satırlarının kareleri toplamı komünalitelere, sütunlarının kareleri toplamı da özdeğerlere eşittir. Buna göre j-nci komünalite $j = 1, 2, \ldots, p$ için

$$h_j^2 = \sum_{k=1}^{m} l_{jk}^2 = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2 \tag{3.28}$$

ile tahmin edilir ve j-nci değişkene ait varyansın $\left(\sigma_{jj}\right)$, m tane ortak faktör tarafından açıklanan kısmını verir. L faktör yükleri matrisinin k-ncı kolonuna ait elemanların kareleri toplamı ise Σ matrisinin k-ncı özdeğeridir. Gerçekten $k = 1, 2, \ldots, m$ için

$$h_k^{*\,2} = \sum_{j=1}^{p} l_{jk}^2 = \sum_{j=1}^{p}\left(\sqrt{\lambda_k}a_{jk}\right)^2 = \lambda_k \sum_{j=}^{p} a_{jk}^2 = \lambda_k \underline{a}_k' \underline{a}_k = \lambda_k \quad ,\left(\underline{a}_k' \underline{a}_k = 1\ old.\right) \tag{3.29}$$

olur. Böylece j-nci değişkene ait varyans (σ_{jj}), bir kısmı ortak faktörlere ve bir kısmı da özel faktöre (hataya) olmak üzere iki kısma ayrılmaktadır:

$$\sigma_{jj} = h_j^2 + \psi_j = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2 + \psi_j \ \ , j = 1, 2, \ldots, p$$

Buna göre j-nci değişkenin varyansına yani σ_{jj}'ye k-ncı faktör l_{jk}^2 kadar katkı yapar. Bu yüzden toplam kitle varyansına, yani $\text{İz}(\Sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \cdots + \sigma_{pp}$'ye k-ncı faktörün katkısı, Eşitlik (3.29)'da belirtildiği gibi

$$h_k^{*\,2} = \sum_{j=1}^{p} \hat{\lambda}_{jk}^2 = \hat{\lambda}_{1k}^2 + \hat{\lambda}_{2k}^2 + \cdots + \hat{\lambda}_{pk}^2 = \lambda_k \ , k = 1, 2, \ldots, m$$

olacaktır.

ii) Başlangıç Sistemi ve Kitle Kovaryans Matrisinin Bilinmiyor Olması Durumu

Başlangıç sistemi $\underline{X} : p \times 1 \sim \left(\underline{\mu}\ , \Sigma\right)$ çok değişkenli kitlesi ile verilsin ve Σ matrisi bilinmiyor olsun. Bu kitleden rastgele çekilen n birimlik örnek $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_n$ olmak üzere Σ matrisinin bir yansız tahmin edicisi, örnek varyans kovaryans matrisi olan S matrisidir. Bu durumda S matrisinin faktörleşme yapısı, Sonuç:1'de verilen Eşitlik (3.5) gereğince;

$$S \cong \hat{L}\hat{L}' + \widehat{\Psi} \tag{3.30}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\hat{L}$ faktör yükleri matrisi kitleye ait L faktör yükleri matrisi için ve $\widehat{\Psi}$ özel faktör varyansları matrisi ise kitleye ait Ψ özel faktör varyansları matrisi için bir tahmin edicidir. Amaç $\hat{L}$ tahmin edicisini bulmaktır. Bu tahmin ediciyi temel bileşen yaklaşımı ile elde edebilmek için önce $\widehat{\Psi}$ özel faktör varyansları matrisini ihmal ederiz ve örnek kovaryans matrisini $S = \hat{L}\hat{L}'$ şeklinde faktörleştiririz. Örnek kovaryans matrisinin bu şekilde bir faktörleşmesini elde edebilmek için bu matrisin spektral ayrışımı kullanılır. Bir matrisin spektral ayrışımı o matrisin özdeğer ve özvektörleri cinsinden yazılabilmesidir. O halde S matrisinin özdeğerler matrisi $\Lambda_{p\times p} = K\ddot{o}ş\left[\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_p\right]$ ve normalleştirilmiş özvektörler matrisi $A_{p\times p} = \left[\ \underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \ldots \quad \underline{a}_p\right]$ olmak üzere, S matrisinin spektral ayrışımı;

$$S = A\Lambda A' \tag{3.31}$$

şeklindedir. Özdeğerler $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \geq 0$ sıralamasına sahip olduğundan, özdeğerler matrisi $\Lambda = \Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}$ şeklinde çarpanlarına ayrılır, öyle ki $\Lambda^{1/2} = K\text{öş}\left[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right]$ olur. Eşitlik (3.27) de Λ matrisi yerine yazılırsa;

$$S = A\Lambda A' = A\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}A' = \left(A\Lambda^{1/2}\right)\left(A\Lambda^{1/2}\right)' \tag{3.32}$$

elde edilir. Burada $\hat{L} = A\Lambda^{1/2}$ gibi düşünürsek $S = \hat{L}\hat{L}'$ formu elde edilmiş olur, ancak $A\Lambda^{1/2}: p \times p$ boyutlu olduğundan $\hat{L}$ matrisini $A\Lambda^{1/2}$ olarak tanımlamamız doğru olmayacaktır. Çünkü biz ortak faktör sayısı $m < p$ olmak üzere $p \times m$ boyutlu bir $\hat{L}$ faktör yükleri matrisi araştırıyoruz. Bu yüzden $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p > 0$ sıralaması gereğince en büyük m tane özdeğerden türetilen $\Lambda_1 = K\text{öş}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ matrisi ile bu özdeğerlere karşılık gelen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ özvektörlerini kapsayan $A_1 = [\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \dots \quad \underline{a}_m]$ matrisini tanımlarız. Daha sonra $A\Lambda^{1/2}$ matrisinin ilk m tane kolonu ile L faktör yükleri matrisini tahmin ederiz. Buna göre L faktör yükleri matrisinin tahmin edicisi;

$$\hat{L} = A_1\Lambda_1^{1/2} = \left[\sqrt{\lambda_1}\,\underline{a}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\,\underline{a}_2 \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_m}\,\underline{a}_m\right] \tag{3.33}$$

olarak elde edilir. Burada $\hat{L} : p \times m$, $A_1 : p \times m$ ve $\Lambda_1^{1/2} = K\text{öş}\left[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}\right] : m \times m$ boyutludur. Örneğin; $p = 5$ ve $m = 2$ iken Eşitlik(3.33)'ün açık ifadesi;

$$\begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{12} \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} \\ \hat{l}_{41} & \hat{l}_{42} \\ \hat{l}_{51} & \hat{l}_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}a_{11} & \sqrt{\lambda_2}a_{12} \\ \sqrt{\lambda_1}a_{21} & \sqrt{\lambda_2}a_{22} \\ \sqrt{\lambda_1}a_{31} & \sqrt{\lambda_2}a_{32} \\ \sqrt{\lambda_1}a_{41} & \sqrt{\lambda_2}a_{42} \\ \sqrt{\lambda_1}a_{51} & \sqrt{\lambda_2}a_{52} \end{bmatrix}$$ şeklinde ya da

$[\underline{\hat{l}}_1 \quad \underline{\hat{l}}_2] = \left[\sqrt{\lambda_1}\,\underline{a}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\,\underline{a}_2\right]$ şeklinde yazılır.

Eşitlik (3.29)'dan görüldüğü gibi $\hat{L}$ faktör yükleri matrisinin kolonları S matrisinin özvektörleri ile orantılıdır. $\hat{L}$ faktör yükleri matrisinin k-ncı kolonu $\sqrt{\lambda_k}\,\underline{a}_k$, $(k = 1, 2, \dots, m)$ k-ncı asıl temel bileşen katsayılarıdır. Bu sebeple $k = 1, 2, \dots, m$ için k-ncı faktör üzerindeki yükler, k-ncı asıl temel bileşendeki katsayılarla orantılıdır. Faktörler ilk m tane temel bileşenle ilgilidir.

$\hat{L}\hat{L}' : p \times p$ matrisinin j-nci köşegen elemanı $\hat{L} : p \times m$ faktör yükleri matrisinin j-nci satırındaki elemanların kareleri toplamı veya $\underline{\hat{l}}_j'\underline{\hat{l}}_j = \sum_{k=1}^{m} \hat{l}_{jk}^2$ dir. Böylece Eşitlik (3.30) ile S matrisinin yaklaşık değerini (kestirimini) hesaplamak için

$$\hat{\psi}_j = s_{jj} - \sum_{k=1}^{m} \hat{l}_{jk}^2 \ , j = 1, 2, \dots, p \tag{3.34}$$

eşitliği tanımlanır ve $\widehat{\Psi} = K\text{öş}\left[\hat{\psi}_1,\ \hat{\psi}_2,\ \dots\ , \hat{\psi}_p\right]$ olmak üzere $S \cong \hat{L}\hat{L}' + \widehat{\Psi}$ yazılır. Böylece bu eşitliğe göre S matrisinin köşegen üzerindeki elemanlar olan değişkenlere ait örnek varyansları tamamen modellenirken, köşegen dışında yer alan ve değişkenlere ait ilişkileri gösteren kovaryanslar yaklaşık olarak modellenmiş olur. Yani;

$$s_{jj} = \sum_{k=1}^{m} \hat{l}_{jk}^2 + \hat{\psi}_j = \hat{l}_{j1}^2 + \hat{l}_{j2}^2 + \cdots + \hat{l}_{jm}^2 + \hat{\psi}_j \ , j = 1, 2, \dots, p \tag{3.35}$$

şeklinde iken;

$$s_{jt} = \hat{l}_{j1}\hat{l}_{t1} + \hat{l}_{j2}\hat{l}_{t2} + \cdots + \hat{l}_{jp}\hat{l}_{tp} \tag{3.36}$$

şeklindedir.

Bu tahmin metodunda $\hat{L}$ faktör yükleri matrisinin satırlarının kareleri toplamı komünalitelere, sütunlarının kareleri toplamı da özdeğerlere eşittir. Buna göre j-nci komünalite $j = 1, 2, \dots, p$ için

$$\hat{h}_j^2 = \sum_{k=1}^{m} \hat{l}_{jk}^2 = \hat{l}_{j1}^2 + \hat{l}_{j2}^2 + \cdots + \hat{l}_{jm}^2 \tag{3.37}$$

ile tahmin edilir ve j-nci değişkene ait varyansın (s_{jj}), m tane ortak faktör tarafından açıklanan kısmını verir. $\hat{L}$ faktör yükleri matrisinin k-ncı kolonuna ait elemanların kareleri toplamı ise S matrisinin k-ncı özdeğeridir. Gerçekten $k = 1, 2, \dots, m$ için

$$h_k^{*\,2} = \sum_{j=1}^{p} \hat{l}_{jk}^2 = \sum_{j=1}^{p} \left(\sqrt{\lambda_k} a_{jk}\right)^2 = \lambda_k \sum_{j=}^{p} a_{jk}^2 = \lambda_k \underline{a}_k' \underline{a}_k = \lambda_k \quad , (\underline{a}_k' \underline{a}_k = 1\ old.) \tag{3.38}$$

olur. Böylece Eşitlik (3.34) ve (3.37) dikkate alındığında j-nci değişkene ait varyansın (s_{jj}), bir kısmının ortak faktörlere ve bir kısmının da özel faktöre (hataya) olmak üzere iki kısma ayrıldığı görülmektedir.

$$s_{jj} = \hat{h}_j^2 + \hat{\psi}_j = \hat{l}_{j1}^2 + \hat{l}_{j2}^2 + \cdots + \hat{l}_{jm}^2 + \hat{\psi}_j \ , \ j = 1, 2, \dots, p \tag{3.39}$$

Buna göre j-nci değişkenin varyansına yani s_{jj}'ye k-ncı faktör $\hat{l}_{jk}^2$ kadar katkı yapar. Bu yüzden toplam örnek varyansına, yani $\text{İ}z(S) = s_{11} + s_{22} + \cdots + s_{pp}$'ye k-ncı faktörün katkısı, Eşitlik (3.38)'de belirtildiği gibi

$$h_k^{*\,2} = \sum_{j=1}^{p} \hat{l}_{jk}^2 = \hat{l}_{1k}^2 + \hat{l}_{2k}^2 + \cdots + \hat{l}_{pk}^2 = \lambda_k \ , k = 1, 2, \dots, m$$

olacaktır.

iii) Standart Değişkenler Sistemi Durumu

Eğer başlangıç sistemine ait değişkenlerin ölçüm birimleri uygun değişe faktör analizi modelini belirlemek için standartlaştırılmış değişkenleri ve bu değişkenlerin faktörleşme yapısını ortaya çıkartmak için R korelasyon matrisi kullanılır. Çünkü $Cov(\underline{Z}) = Kor(\underline{X}) = R$ dir. Bu durumda faktör yüklerinin ve komünalitelerin tahmininde R matrisinin özdeğer ve özvektörleri kullanılır. Faktör yüklerini tahmin etmek için Eşitlik(3.33)'de S matrisinin özdeğer ve özvektörleri yerine R matrisinin özdeğer ve özvektörlerini almak yeterlidir. Böylece $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$; R matrisinin ilk m tane özdeğeri $(m < p)$ ve $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olmak üzere, m ortak faktörlü bir model için temel bileşen yöntemine göre faktör yükleri matrisinin tahmini;

$$\hat{L} = \left[\sqrt{\lambda_1}\,\underline{a}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\,\underline{a}_2 \quad \ldots \quad \sqrt{\lambda_m}\,\underline{a}_m\right] \tag{3.40}$$

olacaktır. Bu durumda R matrisinin faktörleşme yapısı,

$$R \cong \hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi} \tag{3.41}$$

olur. Bu faktörleşme yapısına göre $Z_j, j = 1, 2, \ldots, p$ değişkenine ait varyans;

$$Var(Z_j) = 1 = \hat{l}_{j1}^2 + \hat{l}_{j2}^2 + \cdots + \hat{l}_{jm}^2 + \hat{\psi}_j = \hat{h}_j^2 + \hat{\psi}_j\,,\ j = 1, 2, \ldots, p \tag{3.42}$$

şeklinde iki kısma ayrılır. Birinci kısım söz konusu varyansın m tane ortak faktör tarafından açıklanabilen kısmı olup, j-nci değişkene ait komünalitenin tahminidir ve

$$\hat{h}_j^2 = \hat{l}_{j1}^2 + \hat{l}_{j2}^2 + \cdots + \hat{l}_{jm}^2, j = 1, 2, \ldots, p \tag{3.43}$$

eşitliği ile verilir. İkinci kısım ise özel faktör varyansı $\hat{\psi}_j$'dır.

Eşitlik (3.42)'ye göre j-nci değişkenin varyansına k-ncı faktör $\hat{l}_{jk}^2$ kadar katkı yapar. Bu yüzden toplam örnek varyansına, yani $\text{İz}(R) = r_{11} + r_{22} + \cdots + r_{pp} = p$'ye k-ncı faktörün katkısı, Eşitlik (3.38)'de belirtildiği gibi

$$h_k^{*\,2} = \sum_{j=1}^{p} \hat{l}_{jk}^2 = \hat{l}_{1k}^2 + \hat{l}_{2k}^2 + \cdots + \hat{l}_{pk}^2 = \lambda_k\,, k = 1, 2, \ldots, m$$

olacaktır.

Uygulamalarda R matrisi S matrisinden daha iyi sonuçlar verdiğinden faktör analizi modellemelerinde genel olarak tercih edilir.

III.5 Temel Bileşen Yöntemi ile Elde Edilen Faktör Analiz Modelinin Uygunluğunun Değerlendirilmesi

Temel bileşen yöntemi ile elde edilen faktör analizi modelinin değerlendirilmesi için aşağıda verilen kritelerden yararlanılır. Bu kriterler genel olarak ortak faktör sayısı m'ye karar verme üzerinde yoğunlaşmaktadır.

i. Ortak faktör sayısı (m) herhangi bir yöntemle belirlenmemişse tahmin edilen özdeğerlere dayandırılarak seçilebilir. Eşitlik (3.24), (3.30) ve (3.41)'in sağ ve sol taraflarını karşılaştırmak suretiyle faktör analizi modelinin uygunluğu değerlendirilebilir. Hata ya da artık matrisi;

$$E = \begin{cases} \Sigma - (LL' + \Psi), & \Sigma \text{ matrisinin faktörleşmesinde} \\ S - (\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}), & S \text{ matrisinin faktörleşmesinde} \\ R - (\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}), & R \text{ matrisinin faktörleşmesinde} \end{cases} \tag{3.44}$$

olmak üzere, $E = [e_{ij}] : p \times p$ matrisinin köşegen üzerindeki elemanları sıfır, fakat köşegem dışındaki elemanları sıfır olmayabilir. Bu matrisin elemanlarının ölçüsü üzerinde bir kısıtlama;

$$\sum_{i,j=1}^{p} e_{ij}^2 \leq \lambda_{m+1}^2 + \lambda_{m+2}^2 + \lambda_{m+g}^2 \ , \ (p = m + g) \tag{3.45}$$

eşitsizliği ile verilir. Yani artık matrisinin elemanlarının karelerini toplamı, ilgili matrisin (Σ veya S ya da R) dikkate alınmayan özdeğerlerinin $(g = p - m \ tane)$ kareleri toplamına eşit ya da daha küçükse faktörleşme modeli iyi bir model olarak değerlendirilir. Bu sebeple bu kısıtlamayı sağlayan m sayısı bulunmaya çalışılır. Eğer özdeğerler küçükse artık matrisindeki artıklarda küçük ve uyum iyidir.

ii. Ortak faktör sayısı (m), varyans açıklama oranına göre seçilebilir. İdeal bir faktörleşme yapısında değişkenlerin varyanslarına ilk birkaç faktörün katkıları büyük olmalıdır. Biliyoruz ki k-ncı ortak faktörün (f_k), X_j (veya Z_j) değişkeninin varyansına $(\sigma_{jj} \ veya \ s_{jj} \ ya \ da \ r_{jj} = 1)$ katkısı l_{jk}^2 ya da $\hat{l}_{jk}^2$'dir. Bu durumda m tane faktörün ilgili değişkenin varyansına katkısı ya da ilgili değişkenin varyansının m tane ortak faktör tarafından açıklanabilen kısmı o değişkene ait komünalite olup $j = 1, 2, \dots, p$ için $h_j^2 = \sum_{k=1}^{m} l_{jk}^2$ veya $\hat{h}_j^2 = \sum_{k=1}^{m} \hat{l}_{jk}^2$ ile ölçülür. Bu değerlerin olabildiğince yüksek olması arzu edilir.

Bu durumda $X_j, j = 1, 2, \dots, p$ değişkenlerinin oluşturduğu başlangıç sistemine ait toplam varyansa $(\text{İ}z(\Sigma))$ veya bu varyansın tahmin edicisine $(\text{İ}z(\text{S}))$ ya da standart değişkenler sistemine $(Z_j, j = 1, 2, \dots, p)$ ait toplam varyansa $(\text{İ}z(\text{R}) = p)$, k-ncı faktörün katkısı Eşitlik (3.38) gereğince; $k = 1, 2, \dots, m$ için

${h_k^*}^2 = \sum_{j=1}^{p} l_{jk}^2 = \lambda_k$ olup, bu katkıya k-ncı faktöre ait varyans adı verilir. Böylece k-ncı faktöre göre toplam varyansın açıklanma oranı;

$$V.A.O(f_k) = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\text{İz}(\Sigma)}, & \Sigma \text{ matrisi ile yapılan faktörleşme için} \\ \frac{\lambda_k}{\text{İz}(\text{S})}, & \text{S matrisi ile yapılan faktörleşme için} \\ \frac{\lambda_k}{\text{İz}(\text{R})}, & \text{R matrisi ile yapılan faktörleşme için} \end{cases} \tag{3.46}$$

ile verilir. Buna göre m ortak faktörlü bir faktör analizi modelinde bu ortak faktörlerin birlikte toplam varyansı açıklama oranları;

$$V.A.O(f_1, \ldots, f_m) = \begin{cases} \frac{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}{\text{İz}(\Sigma)}, & \Sigma \text{ matrisi ile yapılan faktörleşme için} \\ \frac{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}{\text{İz}(\text{S})}, & \text{S matrisi ile yapılan faktörleşme için} \\ \frac{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}{\text{İz}(\text{R})}, & \text{R matrisi ile yapılan faktörleşme için} \end{cases} \tag{3.47}$$

eşitliğinden bulunur. Bu oranın %80'i geçtiğini gösteren m sayısı uygun ortak faktör sayısı olarak alınır.

iii. Temel bileşen çözümünde verilen bir faktör için tahmin edilen faktör yükleri faktör sayısı artarken değişmez. Örneğin $m = 1$ için faktör yükleri matrisi $L = \left[\sqrt{\lambda_1}\, \underline{a}_1\right]$ iken, $m = 2$ alındığında $L = \left[\sqrt{\lambda_1}\, \underline{a}_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\, \underline{a}_2\right]$ olacaktır. Bu ise $m = 1$ durumundaki faktörün yükleri ile $m = 2$ durumundaki birinci faktörün yüklerinin aynı olduğu anlamına gelmektedir. Buna göre faktör yükleri matrisine her adımda yeni bir faktör ekleyerek toplam varyansı açıklama oranı %80'i geçen m ortak faktör sayısı belirlenebilir.

iv. Eğer faktörleşme yapısı korelasyon matrisi (R) kullanılarak oluşturuluyorsa R'nin "1"den büyük olan özdeğer sayısı uygun faktör sayısı olarak alınabilir.

v. Temel bileşen yöntemi ile elde edilen faktör analizi sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Değişken $(X_j/Z_j$	Faktör Yükleri				h_j^2 veya $\hat{h}_j^2$	$\psi_j\ veya\ \hat{\psi}_j$
	f_1	f_2	…….	f_m		
1	$l_{11}/\hat{l}_{11}$	$l_{12}/\hat{l}_{12}$		$l_{1m}/\hat{l}_{1m}$	h_1^2 veya $\hat{h}_1^2$	$\psi_1\ veya\ \hat{\psi}_1$
2	$l_{21}/\hat{l}_{21}$	$l_{22}/\hat{l}_{22}$		$l_{2m}/\hat{l}_{2m}$	h_2^2 veya $\hat{h}_2^2$	$\psi_2\ veya\ \hat{\psi}_2$
.	.	.		.	.	.
.	.	.		.	.	.
.	.	.		.	.	.
p	$l_{p1}/\hat{l}_{p1}$	$l_{p2}/\hat{l}_{p2}$		$l_{pm}/\hat{l}_{pm}$	h_p^2 veya $\hat{h}_p^2$	$\psi_p\ veya\ \hat{\psi}_p$
$V(f_k) = {h_k^*}^2$	$\lambda_1/\hat{\lambda}_1$	$\lambda_2/\hat{\lambda}_2$		$\lambda_m/\hat{\lambda}_m$		
$VAO(f_k)$	λ_1/σ_T^2	λ_2/σ_T^2		λ_m/σ_T^2	$(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k)/\sigma_T^2$	

Burada σ_T^2 toplam varyansı göstermektedir.

III.6 Faktör Skorları ve Faktör Katsayıları

Faktör skoru, her bir birimin ortak faktör yapılarına göre tahmin değeri demektir. Her bir faktör yapısı içerisinde $(f_1,\ f_2, \dots\ ,\ f_m\ için)$ tüm değişkenler $\left(X_j\ ya\ da\ Z_j, j = 1,2,\dots,p\right)$ farklı ağırlıklarda yer almaktadır. Bu değişkenlerden bazıları bir faktörü tanımlarken önemli rol oynarlar, bazıları da yardımcı olurlar. Belirlenen faktör yüklerinden yararlanarak her bir değişkenin faktör yapılarına göre birimlere ait ortak faktör skorları hesaplanabilir. $i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere i-nci birimin faktör skorları;

$$\underline{f_i}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\underline{a}_1' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\underline{a}_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\underline{a}_m' \end{bmatrix}_{m\times p} \left(\underline{X_i} - \underline{\overline{X}}\right)_{p\times 1} = (L'L)^{-1}L'\left(\underline{X_i} - \underline{\overline{X}}\right), i = 1,2,\dots,n \qquad (3.48)$$

eşitliği ya da i-nci birimin standart değeri $\underline{Z_i}$ olmak üzere;

$$\underline{f_i} = (L'L)^{-1}L'\underline{Z_i}\ , i = 1,2,\dots,n \qquad (3.49)$$

eşitliği ile bulunur. Böylece faktör skorları matrisi $F_{m\times n} = \left[\underline{f_1} \quad \underline{f_2} \quad \dots. \quad \underline{f_n}\right]$ ile gösterilir. i-nci faktör skoru için verilen Eşitlik (3.48) ve (3.49)'da yer alan $(L'L)^{-1}L'\colon m\times p$ boyutlu matrisine faktör katsayıları matrisi denir. Burada

$$L'L = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\underline{a}_1' \\ \sqrt{\lambda_2}\underline{a}_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{\lambda_m}\underline{a}_m' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\underline{a}_1 & \sqrt{\lambda_2}\underline{a}_2 & \dots & \sqrt{\lambda_m}\underline{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} : m \times m \text{ dir.}$$