<u>Örnek 4.6</u> İleride basketbol 19 yaş "**genç milli takımına giremeyecek sporcular"** ile "**Genç Yedek-1"** ve "**Genç Ana Kadro"** milli takımlarına girebilecek sporcuları yıldız takımlarında iken belirlemek amacıyla yürütülen ve 6 yıl süren bir çalışmada yıldızlar (yaş:13-15) kategorisi Türkiye şampiyonalarında ilk altıda yer alan takımların sporcularının bir çok özelliği kaydedilmiştir. Bu özelliklerden üç tanesi; X_1**: Vücut yağ yüzdesi (%),** X_2 **:Squat Sıçrama Yüksekliği (cm),** X_3**:Kuvvet İndeksi** dikkate alınarak bu sporcular arasından 4-6 yıl sonra 19 yaş genç milli takımlar kadrolarında yer alanlar ve alamayanlar belirleniyor. Veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu çalışma sonucunda elde edilen verilerle uygun ayırıcı fonksiyonlar elde edilebilirse, 19 yaş milli takımlarına giremeyecek ya da takımlardan birine girebilecek sporcu ya da sporcuları 4-6 yıl önceden belirleyebilmek mümkün olabilecektir. Bu ise antrenörlerin, milli takımlara girebilecek sporcuları çok önceden belirleyebilmesi anlamına gelmektedir. Bu veri üzerinde ayırım analizinin bir uygulamasını yapalım.

Tablo 4.8 Milli Takımlara Giremeyen ve Giren Sporcuların 4-6 Yıl Önceki Ölçümleri

	Giremeyenler			**Genç Yedek 1**			**Genç Ana Kadro**		
	X1	**X2**	**X3**	**X1**	**X2**	**X3**	**X1**	**X2**	**X3**
	7,23	28,0	4,08	6,62	30,9	2,45	5,22	33,1	3,66
	8,65	36,0	3,45	7,67	34,8	2,25	8,21	35,2	3,29
	13,00	34,9	4,50	6,04	37,4	3,08	6,48	34,4	2,74
	8,71	28,8	4,30	4,27	29,5	2,81	2,97	34,7	2,75
	11,32	28,4	3,55	7,33	31,2	2,62	4,55	37,8	2,43
	15,67	35,4	3,19	9,49	36,3	3,85	4,16	37,1	2,04
	9,50	36,0	3,08	10,79	30,6	2,66	5,71	36,3	3,36
	8,11	37,2	2,70	4,51	27,9	2,99	4,65	35,4	2,66
	9,52	36,9	3,15	10,92	34,9	3,66	6,33	34,0	3,21
	11,31	33,4	3,33	4,64	34,8	3,50	7,85	34,5	2,24
	7,32	35,3	3,45	12,66	24,9	2,80	5,59	36,7	2,63
	11,53	31,1	3,58	4,66	27,8	2,48	4,92	31,9	2,56
	9,18	28,4	3,87	10,13	32,5	3,19	4,57	34,6	2,88
	13,07	28,1	2,85	9,42	34,5	2,04	7,14	32,2	2,85
	14,86	28,0	4,12	7,46	36,3	2,58	4,90	36,0	3,45
	7,37	31,7	2,90	7,69	31,8	3,28	7,44	33,7	2,60
	10,30	29,0	3,85	7,95	30,4	2,25	5,67	35,6	2,33
	9,76	31,7	3,70	7,07	27,3	3,56	1,46	38,9	3,55
	10,70	30,6	3,30	8,17	26,7	2,47	2,97	34,8	3,19
	9,08	32,3	4,25	7,76	32,0	2,90	8,21	39,1	3,09
	9,40	28,9	3,40	8,13	31,4	3,73	4,23	34,0	2,80
	12,40	30,0	3,68	6,73	28,7	2,81	2,19	32,6	4,46
	10,20	25,5	3,60	6,77	33,6	3,18	4,44	33,7	2,97
	9,00	26,4	3,73	7,14	32,7	3,20	3,75	37,3	2,97
	10,12	31,2	2,60	8,10	30,5	2,64	4,05	33,8	2,86
	11,20	33,4	3,50	7,25	31,1	3,32	4,07	35,1	3,74
	11,00	32,2	3,78	7,87	32,6	2,85	3,40	36,0	2,86
	10,40	30,4	3,30	7,80	32,2	2,75	2,40	35,5	2,90
	11,50	32,9	3,87	7,50	36,3	2,90	4,45	35,5	3,12
	9,77	35,2	3,31	7,93	31,1	3,63	4,73	40,1	2,09
Ort.	**10,37**	**31,58**	**3,53**	**7,68**	**31,76**	**2,95**	**4,89**	**35,32**	**2,94**

Soru:1 Bağımlı değişken kategorilerine göre örneklem gruplarının çok değişkenli normal dağılım ile uyumlu olup olmadığını gösteriniz?

Çözüm: Bağımlı değişken, 13-15 yaş grubu yıldızlar kategorisinde yer alan sporcuların durumu: Kategorik değişken olup sınıflama düzeyinde ölçülmüştür. Bu değişkenin alabileceği değerler, yani kategoriler **(1) Milli takıma giremeyenler, (2) Genç yedek 1 takımına seçilenler, (3) Genç ana kadro takımına seçilenler** şeklindedir.

Bağımsız/açıklayıcı değişkenler ise $\boldsymbol{X_1}$: **Vücut yağ yüzdesi (%),** $\boldsymbol{X_2}$ **:Squat Sıçrama Yüksekliği (cm),** $\boldsymbol{X_3}$**:Kuvvet İndeksi** olmak üzere değişkenler vektörü, $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Bağımlı değişkenin her bir kategorisi için ayrı ayrı $n = 30$ $(n_1 = n_2 = n_3 = n)$ birimlik örneklemlerin $N_3\left(\underline{\mu}, \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumlu olup olmadığını gösterelim. Bunun için Grafik yöntem ve Mardia'nın Basıklık katsayısı testi uygulandı.

(1) Milli takıma giremeyenler için:

Test edilecek hipotezler

H_0: Milli takıma giremeyenlere ait çok değişkenli örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumludur.

H_1: Milli takıma giremeyenlere ait çok değişkenli örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumlu değildir.

Önce grafik yöntem için birimlere ait her bir birimin grup ortalamasına olan Kare Mahalanobis uzaklıklarını hesaplanır. Bu uzaklıklar ve diğer bilgiler Tablo 4.9 da ve $i = 1, 2, \ldots, 30$ için $\left(\boldsymbol{m^2_{(i)}}, \boldsymbol{\chi^2_i}\right)$ ikililerine ait saçılım grafiği ise Grafik 4.2 ile verildi.

Grafik 4.2'ye göre noktaların saçılımı genellikle doğruya oldukça yakın bir dağılım göstermektedir, sadece bir noktanın doğrudan biraz sapma gösterdiği görülmektedir. Bu durumda H_0 hipotezinin kabul edilmesi noktasında az da olsa bir kuşku vardır. Bu kuşkuyu giderebilmek için Mardia'nın çok değişkenli basıklık testi ile kontrol etmekte yarar vardır. Be teste göre çok değişkenli basıklık katsayısı

$\hat{\gamma}_{2p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i^4 = \frac{428.97}{30} = 14{,}299$ olup, test istatistiği

$$Z = \frac{\hat{\gamma}_{2p} - p(p+2)}{\sqrt{\frac{8p(p+2)}{n}}} \sim N(0,1)$$

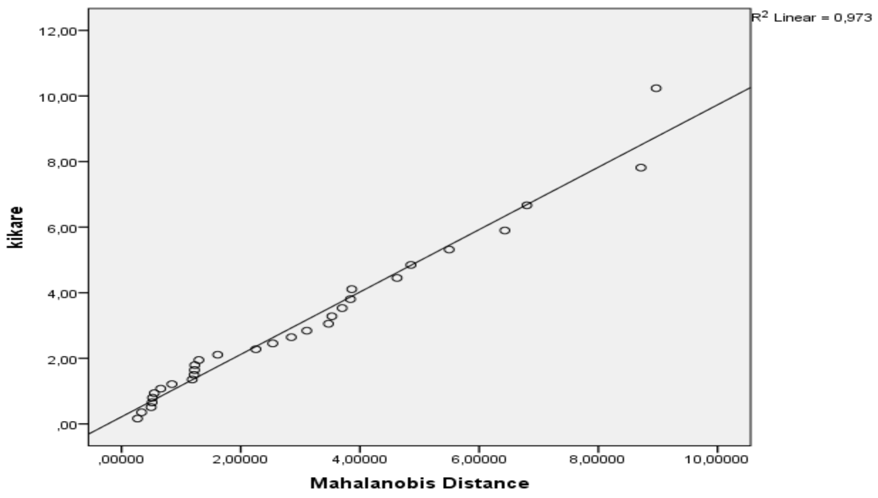
dir. Her bir gözlem için m_i^4 değerleri Tablo 4.9'da verilmiştir. Buna göre, $p = 3$ için test istatistiğinin H_0 hipotezi altında alabileceği değer;

$$Z_h = \frac{14{,}299-3*5}{\sqrt{\frac{8*3*5}{30}}} = -0{,}35$$

olarak bulunur. $p = Pr(Z \le Z_h) = Pr(Z \le -0{,}35) = 0{,}5000 - 0{,}1368 = 0{,}3632$ olup, $\alpha = 0{,}05$ iken, $p > \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumludur.

Tablo 4.9 Çok Değişkenli Normal Dağılıma Uyumluluk Testi İşlem Tablosu

Birim	m_i^2	$m_{(i)}^2$	P_i	χ_i^2	m_i^4
1,00	4,85535	,26759	,02	,16	,07
2,00	2,53695	,33808	,05	,35	,11
3,00	8,71458	,49645	,08	,51	,25
4,00	3,84117	,51225	,12	,66	,26
5,00	1,21620	,51913	,15	,80	,27
6,00	8,97034	,54794	,18	,94	,30
7,00	2,25332	,65819	,22	1,07	,43
8,00	5,49718	,84589	,25	1,21	,72
9,00	2,84900	1,18616	,28	1,35	1,41
10,00	,65819	1,21620	,32	1,50	1,48
11,00	3,47327	1,22434	,35	1,64	1,50
12,00	,33808	1,22905	,38	1,79	1,51
13,00	1,61370	1,29736	,42	1,95	1,68
14,00	6,80127	1,61370	,45	2,11	2,60
15,00	6,43130	2,25332	,48	2,28	5,08
16,00	3,86285	2,53695	,52	2,46	6,44
17,00	,84589	2,84900	,55	2,64	8,12
18,00	,26759	3,10851	,58	2,84	9,66
19,00	,51913	3,47327	,62	3,05	12,06
20,00	3,52884	3,52884	,65	3,28	12,45
21,00	1,22905	3,70136	,68	3,53	13,70
22,00	1,18616	3,84117	,72	3,80	14,75
23,00	3,70136	3,86285	,75	4,11	14,92
24,00	3,10851	4,62236	,78	4,45	21,37
25,00	4,62236	4,85535	,82	4,85	23,57
26,00	,51225	5,49718	,85	5,32	30,22
27,00	,49645	6,43130	,88	5,90	41,36
28,00	,54794	6,80127	,92	6,67	46,26
29,00	1,22434	8,71458	,95	7,81	75,94
30,00	1,29736	8,97034	,98	10,24	80,47



Grafik 4.2 Milli takıma giremeyenler için $\left(m_{(i)}^2, \chi_i^2\right)$ nokta ikilileri serpme diyagramı

(2) <u>Genç yedek 1 takımına seçilenler için:</u>

Test edilecek hipotezler

H_0: Genç yedek 1 takımına seçilenlere ait çok değişkenli örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumludur.

H_1: Genç yedek 1 takımına seçilenlere ait çok değişkenli örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumlu değildir.

Önce grafik yöntem için birimler için her bir birimin grup ortalamasına olan Kare Mahalanobis uzaklıklarını hesaplanır. Bu uzaklıklar ve diğer bilgiler Tablo 4.10 de ve $i = 1, 2, \ldots, 30$ için $\left(\boldsymbol{m}_{(i)}^2, \boldsymbol{\chi}_i^2\right)$ ikililerine ait saçılım grafiği ise Grafik 4.3 ile verildi. Grafik 4.3'e göre noktaların saçılımı genellikle doğruya oldukça yakın bir dağılım göstermektedir, sadece bir kaç noktanın doğrudan biraz sapma gösterdiği görülmektedir. Bu durumda H_0 hipotezinin kabul edilmesi noktasında az da olsa bir kuşku vardır. Bu kuşkuyu giderebilmek için Mardia'nın çok değişkenli basıklık testi ile kontrol etmekte yarar vardır. Bu teste göre çok değişkenli basıklık katsayısı

$\hat{\gamma}_{2p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i^4 = \frac{433{,}38}{30} = 14{,}446$ olup, test istatistiği

$$Z = \frac{\hat{\gamma}_{2p} - p(p+2)}{\sqrt{\frac{8p(p+2)}{n}}} \sim N(0,1)$$

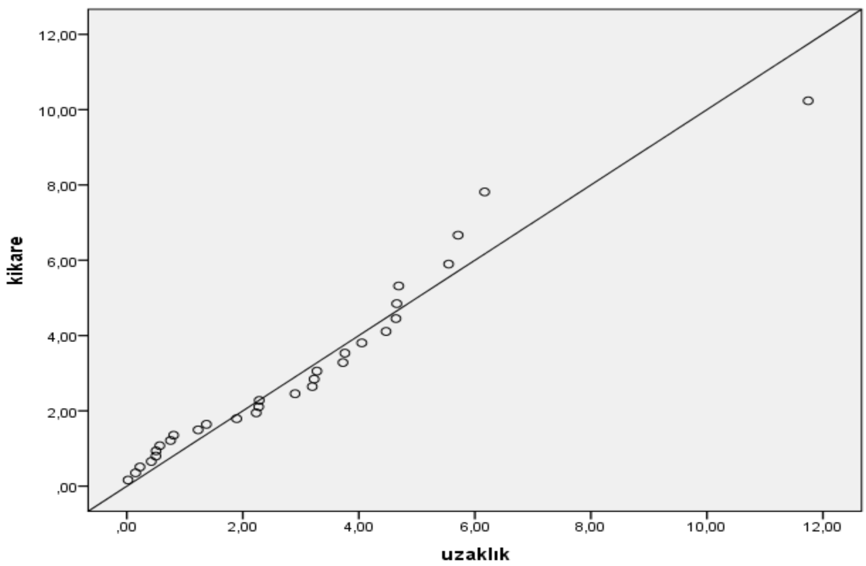
dir. Her bir gözlem için m_i^4 değerleri Tablo 4.10'da verilmiştir. Buna göre, $p = 3$ için test istatistiğinin H_0 hipotezi altında alabileceği değer;

$Z_h = \frac{14{,}446 - 3*5}{\sqrt{\frac{8*3*5}{30}}} = -0{,}28$

olarak bulunur. $p = Pr(Z \leq Z_h) = Pr(Z \leq -0{,}28) = 0{,}5000 - 0{,}1103 = 0{,}3897$ olup, $\alpha = 0{,}05$ iken, $p > \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumludur.

Tablo 4.10 Çok Değişkenli Normal Dağılıma Uyumluluk Testi İşlem Tablosu

Birim	m_i^2	$m_{(i)}^2$	P_i	χ_i^2	m_i^4
1,00	1,37287	,02	,02	,16	,00
2,00	3,72508	,15	,05	,35	,02
3,00	4,05120	,23	,08	,51	,05
4,00	3,75882	,42	,12	,66	,18
5,00	,50393	,50	,15	,80	,25
6,00	5,71060	,50	,18	,94	,25
7,00	3,19736	,57	,22	1,07	,32
8,00	4,46881	,75	,25	1,21	,57
9,00	5,54783	,81	,28	1,35	,65
10,00	4,68648	1,23	,32	1,50	1,51
11,00	11,74621	1,37	,35	1,64	1,88
12,00	4,65354	1,89	,38	1,79	3,59
13,00	1,89382	2,23	,42	1,95	4,98
14,00	6,16840	2,27	,45	2,11	5,17
15,00	3,22931	2,28	,48	2,28	5,21
16,00	,50143	2,90	,52	2,46	8,41
17,00	2,23084	3,20	,55	2,64	10,22
18,00	4,63911	3,23	,58	2,84	10,43
19,00	3,27629	3,28	,62	3,05	10,73
20,00	,02157	3,73	,65	3,28	13,88
21,00	2,90074	3,76	,68	3,53	14,13
22,00	1,22929	4,05	,72	3,80	16,41
23,00	,75403	4,47	,75	4,11	19,97
24,00	,42233	4,64	,78	4,45	21,52
25,00	,56785	4,65	,82	4,85	21,66
26,00	,80652	4,69	,85	5,32	21,96
27,00	,15130	5,55	,88	5,90	30,78
28,00	,22689	5,71	,92	6,67	32,61
29,00	2,27458	6,17	,95	7,81	38,05
30,00	2,28298	11,75	,98	10,24	137,97



Grafik 4.3 Genç yedek 1 takımına seçilenler için$\left(\boldsymbol{m}_{(i)}^{2}, \boldsymbol{\chi}_{i}^{2}\right)$ nokta ikilileri serpme diyagramı

(3) <u>Genç ana kadro takımına seçilenler için:</u>

Test edilecek hipotezler

H_0: Genç ana kadro takımına seçilenlere ait çok değişkenli örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumludur.

H_1: Genç ana kadro takımına seçilenlere ait çok değişkenli örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumlu değildir.

Önce grafik yöntem için birimler için her bir birimin grup ortalamasına olan Kare Mahalanobis uzaklıklarını hesaplanır. Bu uzaklıklar ve diğer bilgiler Tablo 4.11 de ve $i = 1, 2, \ldots, 30$ için $\left(\boldsymbol{m}_{(i)}^{2}, \boldsymbol{\chi}_{i}^{2}\right)$ ikililerine ait saçılım grafiği ise Grafik 4.4 ile verildi. Grafik 4.4'e göre noktaların saçılımı genellikle doğruya oldukça yakın bir dağılım göstermektedir, sadece bir kaç noktanın doğrudan biraz sapma gösterdiği görülmektedir. Bu durumda H_0 hipotezinin kabul edilmesi noktasında az da olsa bir kuşku vardır. Bu kuşkuyu giderebilmek için Mardia'nın çok değişkenli basıklık testi ile kontrol etmekte yarar vardır. Be teste göre çok değişkenli basıklık katsayısı

$\hat{\gamma}_{2p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i^4 = \frac{430{,}06}{30} = 14{,}335$ olup, test istatistiği

$$Z = \frac{\hat{\gamma}_{2p} - p(p+2)}{\sqrt{\frac{8p(p+2)}{n}}} \sim N(0{,}1)$$

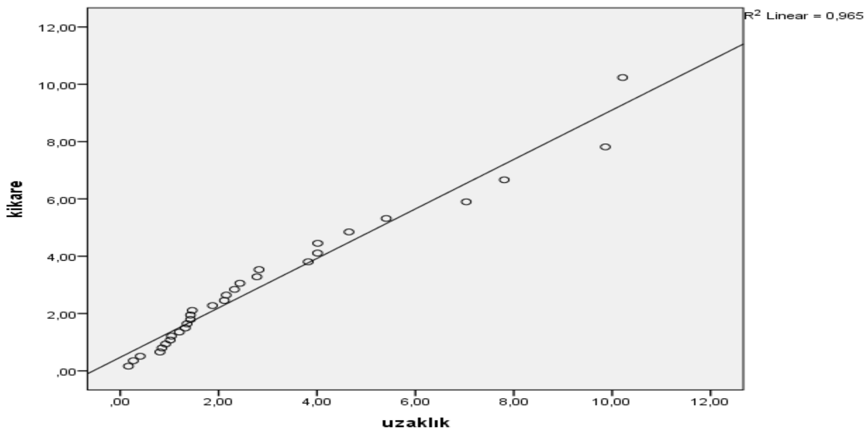
dir. Her bir gözlem için m_i^4 değerleri Tablo 4.11'de verilmiştir. Buna göre, $p = 3$ için test istatistiğinin H_0 hipotezi altında alabileceği değer;

$Z_h = \frac{14{,}335-3*5}{\sqrt{\frac{8*3*5}{30}}} = -0{,}33$

olarak bulunur. $p = Pr(Z \le Z_h) = Pr(Z \le -0{,}33) = 0{,}5000 - 0{,}1293 = 0{,}3707$ olup, $\alpha = 0{,}05$ iken, $p > \alpha$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez ve böylece örneklemin dağılımı, $N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma\right)$ dağılımı ile uyumludur.

Tablo 4.11 Çok Değişkenli Normal Dağılıma Uyumluluk Testi İşlem Tablosu

Birim	m_i^2	$m_{(i)}^2$	P_i	χ_i^2	m_i^4
1,00	2,77669	,17	,02	,16	,03
2,00	5,40673	,27	,05	,35	,12
3,00	1,04099	,41	,08	,51	,26
4,00	2,11643	,81	,12	,66	,43
5,00	2,15585	,85	,15	,80	,64
6,00	4,01068	,92	,18	,94	,88
7,00	1,87585	1,02	,22	1,07	1,15
8,00	,40792	1,04	,25	1,21	1,47
9,00	1,42792	1,20	,28	1,35	1,83
10,00	4,01431	1,32	,32	1,50	2,24
11,00	,80664	1,36	,35	1,64	2,69
12,00	4,64962	1,43	,38	1,79	3,21
13,00	,26698	1,43	,42	1,95	3,79
14,00	3,82094	1,46	,45	2,11	4,45
15,00	1,46326	1,88	,48	2,28	5,19
16,00	2,82274	2,12	,52	2,46	6,03
17,00	1,42713	2,16	,55	2,64	6,99
18,00	7,80685	2,32	,58	2,84	8,08
19,00	1,35888	2,43	,62	3,05	9,33
20,00	10,21316	2,78	,65	3,28	10,78
21,00	1,01589	2,82	,68	3,53	12,47
22,00	9,86295	3,82	,72	3,80	14,48
23,00	,84833	4,01	,75	4,11	16,88
24,00	1,32248	4,01	,78	4,45	19,81
25,00	1,20112	4,65	,82	4,85	23,50
26,00	2,43248	5,41	,85	5,32	28,27
27,00	,92256	7,03	,88	5,90	34,79
28,00	2,32361	7,81	,92	6,67	44,44
29,00	,16689	9,86	,95	7,81	61,07
30,00	7,03411	10,21	,98	10,24	104,77



Grafik 4.4 Genç ana kadro takımına seçilenler için$\left(m_{(i)}^2, \chi_i^2\right)$ nokta ikilileri serpme diyagramı

<u>Soru:2</u> Bağımlı değişken kategorilerine göre örneklem gruplarına ait dağılımların homojen kovaryans matrisli olup olmadığını gösteriniz?

<u>Çözüm:</u> Değişkenler vektörü $\underline{X}' = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]$ ve grup sayısı $g = 3$ dür. Birinci grup: **(1) Milli takıma giremeyenler** olup, ilgili değişkenler bakımından dağılımı $\underline{X}_1 \sim N_3\left(\underline{\mu}_1\,,\ \Sigma_1\right)$ ve ikinci grup: **(2) Genç yedek 1 takımına seçilenler** olup bunların ilgili değişkenlere göre dağılımı $\underline{X}_2 \sim N_3\left(\underline{\mu}_2\,,\ \Sigma_2\right)$ ve üçüncü grup **(3) Genç ana kadro takımına seçilenler** olup bunların ilgili değişkenlere göre dağılımı $\underline{X}_3 \sim N_3\left(\underline{\mu}_3\,,\ \Sigma_3\right)$ dür. Grupların varyans-kovaryans matrisleri yönünden homojenliğini incelemede test edilecek hipotezler:

H_0: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma$

H_1: $\exists \Sigma_k$ diğerlerinden farklıdır

SPSS Çözümü: Bağımlı Değişkenler ve faktör (gruplama değişkeni) tanımlandıktan sonra veriler girilir. **Analyze > General Linear Model > Multıvariate** yolu izlenerek açılan ekranda ilgili yerlere değişken atamaları yapılır (Bağımlı değişkenler **Dependent Variables** işlem kutusuna, faktör Fixed factor(s) işlem kutusuna). **Options** seçeneğinden **Homogeneity Tests** > **Continue** > **Ok.**

Box's Test of Equality of Covariance Matrices[a]

Box's M	16,338	$\alpha = 0{,}05$ ve $P = 0{,}214$ olup $P > \alpha$
F	1,293	olduğundan H_0 hipotezi ret edilemez.
df1	12	Buna göre bağımlı değişken
df2	36680,538	kategorilerine ait örneklem gruplarına
Sig.	,214	ait dağılımlar homojen kovaryans matrislidir.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 4,116 & -0,394 & 0,096 \\ -0,394 & 10,668 & -0,479 \\ 0,096 & -0,479 & 0,217 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 3,611 & 0,005 & 0,038 \\ 0,005 & 9,645 & 0,254 \\ 0,038 & 0,254 & 0,226 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 3,036 & -0,338 & -0,248 \\ -0,338 & 3,955 & -0,246 \\ -0,248 & -0,246 & 0,269 \end{bmatrix}$$

$$S_{wg} = \frac{\sum_{k=1}^{g}(n_k-1)S_k}{\sum_{k=1}^{g}(n_k-1)} = \frac{1}{3}\left[S_1 + S_2 + S_3\right] = \begin{bmatrix} 3,588 & -0,242 & -0,038 \\ -0,242 & 8,089 & -0,157 \\ -0,038 & -0,157 & 0,237 \end{bmatrix}$$

Soru:3 Değişkenlerin ayırım gücünün önemli olup olmadığına %5 önem seviyesinde karar veriniz?

Çözüm: Değişkenlerin ayırım gücü için test edilecek hipotezler;

H_0 : *Bağımsız değişkenler grupları ayırmada önemsizdir*

H_1 : *Bağımsız değişkenler grupları ayırmada önemlidir*

şeklinde kurulurken, test istatistiği Wilks'in Lambda istatistiğine bağlı olarak; ya $g = 3$ ve $p = 3$ olması sebebiyle

$$F = \left(\frac{N-p-2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right) \sim F_{2p;2(N-p-2)}$$

ya da

$$L = -\left[N - 1 - \frac{p+g}{2}\right] ln(\Lambda) \sim \chi^2_{p(g-1)}$$

istatistiklerinden birisi kullanılabilir. Burada $\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|}$ olup, SPSS çözümünden yararlanarak

Between-Subjects SSCP Matrix

			X11	X21	X31
Hypothesis	Intercept	X11	5264,883	22636,336	2162,062
		X21	22636,336	97324,802	9295,775
		X31	2162,062	9295,775	887,866
	grup	X11	450,891	-309,553	48,197
		X21	-309,553	267,423	-23,304
		X31	48,197	-23,304	6,896
Error		X11	312,139	-21,120	-3,306
		X21	-21,120	703,775	-13,677
		X31	-3,306	-13,677	20,650

Based on Type III Sum of Squares

$$W = \begin{bmatrix} 312,14 & -21,12 & -3,31 \\ -21,12 & 703,78 & -13,68 \\ -3,31 & -13,68 & 20,65 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 450,89 & -309,55 & 48,20 \\ -309,55 & 267,42 & -23,30 \\ 48,20 & -23,30 & 6,90 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece,

$$B + W = \begin{bmatrix} 763,03 & -330,67 & 44,89 \\ -330,67 & 971,20 & -36,98 \\ 44,89 & -36,98 & 27,55 \end{bmatrix}$$ bulunur. Buradan $|W| = 4459,067$ ve $|B + W| = 1,55X10^7$ olması sebebiyle

$\Lambda = \frac{4459,067}{1,55x10^7} = 0,288$ ve böylece;

$F = \frac{90-3-2}{3}\left(\frac{1-\sqrt{0,288}}{\sqrt{0,288}}\right) = 24,49$ veya $L = -\left[90 - 1 - \frac{343}{2}\right] ln(0,288) = 107,137$ bulunur.

$\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer; $F_{2p;2(N-p-2);\alpha} = F_{6;170;005} = 2,15$ ve $\chi^2_{p(g-1);\alpha} = \chi^2_{6;0,05} = 12,592$ dir. Sonuç olarak; 24,49 > 2,15 veya 107,37 > 12,592 olduğundan H_0 hipotezi ret edilir ve böylece değişkenlerin ayırım gücü önemlidir. Yani söz konusu bağımsız değişkenler ile spor dalları arasında ayırım yapılabilir.

Soru:4 Grupları ayırmada kullanılabilecek olan ayırma fonksiyonlarının sayısını ve anlamlı boyut (ayırıcı fonksiyon) sayısını belirleyiniz?

Çözüm: Bağımsız değişken sayısı $p = 3$ ve grup sayısı $g = 3$ olduğundan mümkün olan ayırma fonksiyonlarının sayısı $r = Enk(g-1, p) = Enk(2,3) = 2$ dir. Anlamlı boyut sayısı ise önemli olan ayırıma fonksiyonlarının sayısı olacağından, bu ayırma fonksiyonlarının önemliliği araştırılmalıdır. Bu araştırma her bir ayırma fonksiyonu için ayrı ayrı önemlilik testi uygulanarak yapılabilir. Ayırma fonksiyonunun önemliliği, $W^{-1}B$ matrisinin özdeğerlerinin önemliliği ile ölçülmektedir. Soru.3'de elde edilen W ve B matrisleri yardımı ile:

$$W^{-1}B = \begin{bmatrix} 1,4455 & -0,9807 & 0,1566 \\ -0,3511 & 0,3298 & -0,0217 \\ 2,3329 & -1,0671 & 0,3446 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisin özdeğerleri ise $|W^{-1}B - \lambda I| = 0$ polinomunun kökleri olarak; $\lambda_1 = 1,9362$; $\lambda_2 = 0,1837$ ve $\lambda_3 = 4,68 * 10^{-7} \cong 0$ dır. Burada üçüncü özdeğer sıfıra çok yakın olduğundan ihmal edilerek sadece ilk iki özdeğer değerlendirilir. Bu özdeğerlerden birincisi birinci ayırma fonksiyonunun önemliliğini ölçmede kullanılırken, ikincisi de ikinci ayırma fonksiyonunun önemliliğini ölçmede kullanılır. Çünkü birinci ayırma fonksiyonu gruplar arasında toplam ayırıcılığı en fazla açıklama özelliğine sahip olmalıdır. $\lambda_1 > \lambda_2$ özelliği gereğince toplam ayırıcılığı açıklamada en etkili özdeğer büyük olan özdeğer olacaktır. Buna göre birinci ayırma fonksiyonunun göreli önemliliği, $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1,9362}{1,9362+0,1837} = 0,9133$ ve böylece birinci kanonik ayırma fonksiyonu gruplar arası toplam ayırıcılığın %91,33 ünü açıklamaktadır. İkinci ayırma fonksiyonunun göreli önemliliği ise, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{0,1837}{1,9362+0,1837} = 0,0866$ olup, buna göre ikinci kanonik ayırma fonksiyonu gruplar arası toplam ayırıcılığın %8,66 sını açıklamaktadır.

Anlamlı boyut sayısını belirlemek için bu ayırma fonksiyonlarının önemliliği test edilmelidir. Birinci ayırma fonksiyonunun önemliliği için test edilecek hipotezler;

H_0 : $Ayırma\ fonksiyonuları$ $önemsizdir$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$

H_1 : $Birinci\ ayırma\ fonksiyonu$ $önemlidir$ $\qquad (\lambda_1 > 0)$

Test istatistiği: $V = \left[N - 1 - \frac{p+g}{2}\right]\left[\sum_{j=m+1}^{r} ln\left(1 + \lambda_j\right)\right] \sim \chi^2_{(p-m)(g-m-1)}$

$N = \sum_{k=1}^{g} n_k = n_1 + n_2 + n_3 = 90,\ p = 3, g = 3,\ \lambda_1 = 1,9362;\ \lambda_2 = 0,1837$ ve $m = 0$ (önemli olan ayırma fonksiyonu sayısı)

$V = \left(90 - 1 - \frac{3+3}{2}\right)[ln(1 + 1,9362) + ln(1 + 0,1837)]$=107,14

Karar: $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer; $\chi^2_{(p-m)(g-m-1);\alpha} = \chi^2_{6;0,05} = 12,592$ olup,

$V = 107,14 > 12,592 = \chi^2_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Böylece birinci ayırıcı fonksiyonun önemli olduğuna karar verilir.

İkinci ayırma fonksiyonunun önemliliği için test edilecek hipotezler;

H_0 : $Geriye\ kalan\ ayırma\ fonksiyonu$ $önemsizdir$ $(\lambda_2 = 0)$

H_1 : $İkinci\ ayırma\ fonksiyonu$ $önemlidir$ $\qquad (\lambda_2 > 0)$

Test istatistiği: $V = \left[N - 1 - \frac{p+g}{2}\right]\left[\sum_{j=m+1}^{r} ln\left(1 + \lambda_j\right)\right] \sim \chi^2_{(p-m)(g-m-1)}$ olup, bu aşamada $m = 1$ dir.

$V = \left(90 - 1 - \frac{3+3}{2}\right)\left[\sum_{j=2}^{2} ln\left(1 + \lambda_j\right)\right]$=$86 * ln(1 + 0,1837) = 14,5$

Karar: $\alpha = 0,05$ önem seviyesinde kritik değer; $\chi^2_{(p-m)(g-m-1);\alpha} = \chi^2_{(2*1);0,05} = 5,991$ olup,

$V = 14,5 > 5,991 = \chi^2_t$ olduğundan H_0 hipotezi ret edilir. Böylece ikinci ayırıcı fonksiyonun da önemli olduğuna karar verilir.

Sonuç olarak anlamlı boyut ya da önemli ayırma fonksiyonu sayısı $m = 2$ dir.

4.3.2) Standartlaştırılmamış Fisher Ayırma Fonksiyonu Katsayıları ve Hesaplanması

Standartlaştırılmamış Fisher ayırma fonksiyonu katsayıları (ya da sadece ayırma fonksiyonu katsayıları), her bir bağımsız değişkenin, bağımlı değişkenin sınıflanmasına olan bireysel katkısını yansıtan kısmi katsayılardır (ağırlıklardır) ve sınıflandırma işlemini yapmak amacıyla kullanılırlar. Kanonik fonksiyonlardan farklı olarak Fisher yaklaşımında p tane değişken kapsayan g tane grubun her biri için bir adet ayırma fonksiyonu elde edilir. Her bir gözlemin g sayıdaki ayırma fonksiyonunda yerine konması ile ilgili gözlem için g tane ayırma skoru elde edilir ve ilgili gözlem, ayırma skoru en büyük olan gruba (sınıfa) atanır. Bu g tane ayırma fonksiyonlarından p tane değişken için standartlaştırılmamış j.nci Fisher ayırma fonksiyonu:

$$C_j = c_{j0+}c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \cdots + c_{jp}x_p \quad , j = 1,2, \dots , g \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $i.nci$ birim için $j.$ nci Fisher ayırma fonksiyonu skoru ise;

$$C_{ji} = c_{j0+}c_{j1}x_{1i} + c_{j2}x_{2i} + \cdots + c_{jp}x_{pi} \quad , j = 1,2, \dots , g; i = 1,2, \dots , n \tag{4.17}$$

eşitliği ile bulunur. Eşitlik (1.34) ile verilen Fisher ayırma fonksiyonu için katsayıların nasıl hesaplanacağını belirleyelim. Öncelikle Fisher yaklaşımında, gözlemleri gruplara sınıflandırmak için grup sayısı kadar sınıflandırma denklemi geliştirilebileceğini belirtelim. Geliştirilen bu sınıflandırma denklemlerinde her gruba ilişkin veriler (ya da yeni bir gözlem verisi) yerine konur ve gözlemlere ait sınıflandırma skorları elde edilir. Gözlemler, elde edilen en yüksek sınıflandırma skoruna sahip olduğu gruba atanır Eşitlik (4.16) da verilen Fisher ayırım fonksiyonu, j.nci grup için:

$$C_j = c_{j0} + \sum_{k=1}^{p} c_{jk}x_k \quad , j = 1,2, \dots , g \tag{4.18}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada j.nci Fisher ayırma fonksiyonu katsayılar vektörü:

$\underline{C}_j = \begin{bmatrix} c_{j1} & c_{j2} & \dots & c_{jp} \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\underline{C}_j = S_{wg}^{-1}\ \underline{M}_j \quad , \quad j = 1,2, \dots , g \tag{4.19}$$

eşitliği ile hesaplanır. Bu eşitlikte $j = 1,2, \dots , g$ için $\underline{M}'_j = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 & \overline{X}_2 & \dots & \overline{X}_p \end{bmatrix}$ j.nci gruba ait örnek ortalama vektörü ve S_{Wg}: ortak grup içi varyans-kovaryans matrisidir. j.nci grup için Fisher ayırım fonksiyonuna ait sabit terim ise;

$$c_{j0} = -\frac{1}{2}\ \underline{C}'_j\underline{M}_j \quad ,, \quad j = 1,2, \dots , g \tag{4.20}$$

ile elde edilir.

Eğer gruplara ait örnek hacimleri birbirine eşitse, yani $n_1 = n_2 = \cdots = n_g$ ise Fisher ayırım fonksiyonu gruplara göre Eşitlik (4.18)'de verildiği gibidir. Eğer $\exists n_j$ farklı ise Fisher ayırma fonksiyonu, önsel olasılıkların örnek hacimlerine (grup büyüklüklerine) göre ayarlanarak yeniden düzenlenir. Bu düzenleme ayırma fonksiyonlarına grup büyüklükleri için düzeltme yapan bir terimin $\left[ln\left(\frac{n_j}{n}\right)\right]$ eklenmesi şeklinde yapılır. Bu takdirde j.nci grup için Fisher ayırım fonksiyonu:

$$C_j = c_{j0} + \sum_{k=1}^{p} c_{jk}x_k + ln\left(\frac{n_j}{n}\right) \quad , j = 1,2, \dots , g \tag{4.21}$$

olur. Burada $n = \sum_{j=1}^{g} n_j$ dir.

Soru:5 a) Standartlaştırılmamış Fisher doğrusal ayırma fonksiyonu katsayılarını hesaplayınız?

b) Fisher doğrusal ayırma fonksiyonlarını bulunuz?

c) Her bir birim için Fisher doğrusal ayırma skorlarını bulunuz ve atama gruplarını belirleyiniz?

Çözüm: **a)** Sporcuları gruplara (Milli takımlara giremeyenler, Genç yedek-1 ve Genç ana kadro) göre sınıflandırmak için grup sayış $(g = 3)$ kadar sınıflandırma fonksiyonu (standartlaştırılmamış Fisher doğrusal ayırma fonksiyonu) kurulabilir. Bu ayırma fonksiyonlarının katsayıları j.nci fonksiyon için Eşitlik (4.19) ile bulunur. Birinci grup (milli takımlara giremeyenler, $j = 1$) için ayırma fonksiyonu katsayıları;

$\underline{C}_1 = S_{wg}^{-1} M_1$ olup, burada $S_{wg} = \frac{W}{N-k} = \begin{bmatrix} 3,588 & -0,242 & -0,038 \\ -0,242 & 8,089 & -0,157 \\ -0,038 & -0,157 & 0,237 \end{bmatrix}$ ve $M_1 = \begin{bmatrix} 10,37 \\ 31,58 \\ 3,53 \end{bmatrix}$ (birinci grup için örnek ortalama vektörü) şeklindedir. Böylece;

$$\underline{C}_1 = S_{wg}^{-1} M_1 = \begin{bmatrix} 0,280 & 0,009 & 0,051 \\ 0,009 & 0,126 & 0,085 \\ 0,051 & 0,085 & 4,277 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10,37 \\ 31,58 \\ 3,53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,380 \\ 4,361 \\ 18,312 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

İkinci grup (Genç Yedek-1, $j = 2$) için ayırma fonksiyonu katsayıları, ikinci gruba ait örnek ortalama vektörü $M_2 = \begin{bmatrix} 7,68 \\ 31,76 \\ 2,95 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\underline{C}_2 = S_{wg}^{-1} M_2 = \begin{bmatrix} 0,280 & 0,009 & 0,051 \\ 0,009 & 0,126 & 0,085 \\ 0,051 & 0,085 & 4,277 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7,68 \\ 31,76 \\ 2,95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,599 \\ 4,309 \\ 15,689 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Üçüncü grup (Genç Ana Kadro, $j = 3$) için ayırma fonksiyonu katsayıları, üçüncü gruba ait örnek ortalama vektörü $M_3 = \begin{bmatrix} 4,89 \\ 35,32 \\ 2,94 \end{bmatrix}$ olmak üzere;

$$\underline{C}_3 = S_{wg}^{-1} M_3 = \begin{bmatrix} 0,280 & 0,009 & 0,051 \\ 0,009 & 0,126 & 0,085 \\ 0,051 & 0,085 & 4,277 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,89 \\ 35,32 \\ 2,94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,851 \\ 4,729 \\ 15,826 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

c) Fisher doğrusal ayırma (sınıflandırma) fonksiyonları j.nci grup için Eşitlik (4.16) gereğince

$C_j = c_{j0} + \sum_{k=1}^{p} c_{jk} X_k$ olup, burada c_{j0}: sabit terim ve $c_{jk} \epsilon \underline{C}_j$, $(j = 1,2, \dots, g; g = 3)$ dir. Sabit terim $c_{j0} = -\frac{1}{2} \underline{C}'_j M_j$ ile hesaplanır. Ayrına gruplardaki gözlem sayıları eşit olduğundan ayırma fonksiyonuna $ln\left(\frac{n_j}{n}\right)$ düzeltme teriminin eklenmesine gerek yoktur.

$j = 1$ (Milli takımlaragiremeyenler) için Fisher doğrusal ayırma fonksiyonu:

Sabit terim $c_{10} = -\frac{1}{2}\underline{C}'_1 M_1 = -\frac{1}{2}[3,380 \quad 4,361 \quad 18,312]\begin{bmatrix}10,37\\31,58\\3,53\end{bmatrix} = -118,721$ olmak üzere;

$C_1 = c_{10} + \sum_{k=1}^{3} c_{1k}X_k = -118,721 + 3,380X_1 + 4,361X_2 + 18,312X_3$ olarak bulunur.

$j = 2$ (Genç yedek-1) için Fisher doğrusal ayırma fonksiyonu:

Sabit terim $c_{20} = -\frac{1}{2}\underline{C}'_2 M_2 = -\frac{1}{2}[2,599 \quad 4,309 \quad 15,689]\begin{bmatrix}7,68\\31,76\\2,95\end{bmatrix} = -101,519$ olmak üzere;

$C_2 = c_{20} + \sum_{k=1}^{3} c_{2k}X_k = -101,519 + 2,599X_1 + 4,309X_2 + 15,659X_3$ olarak bulunur.

$j = 3$ (Genç Ana Kadro) için Fisher doğrusal ayırma fonksiyonu:

Sabit terim $c_{30} = -\frac{1}{2}\underline{C}'_3 M_3 = -\frac{1}{2}[1,851 \quad 4,729 \quad 15,826]\begin{bmatrix}4,89\\35,32\\2,94\end{bmatrix} = -111,331$ olmak üzere;

$C_3 = c_{30} + \sum_{k=1}^{3} c_{3k}X_k = -111,331 + 1,851X_1 + 4,729X_2 + 15,826X_3$ olarak bulunur.

c) $i.nci$ birim için $j.$ nci Fisher ayırma fonksiyonu skoru Eşitlik (4.17) gereğince;

$$C_{ji} = c_{j0+}c_{j1}x_{1i} + c_{j2}x_{2i} + \cdots + c_{jp}x_{pi} \ , j = 1,2, \dots, g; i = 1,2, \dots, n$$

ile hesaplanır. Her bir birimin (sporcunun) gruplar (takımlar) için bulunan Fisher ayırma fonksiyonu skorları hesaplanır ve ilgili birim (sporcu) en yüksek sınıflandırma skoruna sahip gruba sınıflandırılır. Örneğin; Milli takımlara giremeyenler grubundaki (birinci grup) ilk sporcunun (birinci gözlem vektörü $X'_{11} = [7,23 \quad 28,0 \quad 4,08]$) için sınıflandırma, Fisher'in doğrusal ayırma fonksiyonları kullanılarak şu şekilde yapılır: Bu sporcunun üç ayırma fonksiyonuna ait skorları bulunur

$C_{11} = -118,721 + 3,380X_1 + 4,361X_2 + 18,312X_3$= -118,721 + 3,38(7,23) + 4,361(28) + 18,312(4,08) = **102,54**

$C_{21} = -101,519 + 2,599X_1 + 4,309X_2 + 15,659X_3$= -101,519 + 2,599(7,23) + 4,309(28) + 15,659(4,08) = 101,93

$C_{31} = -111,331 + 1,851X_1 + 4,729X_2 + 15,826X_3$ = -111,311 + 1,851(7,23) + 4,729(28) + 15,826(4,08) = 99,03

Böylece **milli takıma girmeyenler** grubundaki birinci sporcu en yüksek sınıflandırma skoruna sahip olduğu **milli takıma girmeyenler** grubuna atanır.

Şimdi de veri kümesinde olmayan bir gözlemin sınıflandırmasını ele alalım. Bu gözlem için de aynı yol izlenir. Bu sporcu (gözlem) 14 yaşında yıldız takımında iken vücut yağ yüzdesi $x_1 =$

4,0 (%4), squat sıçrama yüksekliği $x_2 = 34$ cm ve kuvvet indeksi $x_3 = 3{,}32$ olsun. Bu sporcunun sınıflama fonksiyonu skorları:

$C_1 = -118{,}721 + 3{,}380X_1 + 4{,}361X_2 + 18{,}312X_3$ = -118,721 + 3,38(4) + 4,361(34) + 18,312(3,32) = 103,86

$C_2 = -101{,}519 + 2{,}599X_1 + 4{,}309X_2 + 15{,}659X_3$ = -101,519 + 2,599(4) + 4,309(34) + 15,659(3,32) = 107,47

$C_3 = -111{,}331 + 1{,}851X_1 + 4{,}729X_2 + 15{,}826X_3$ = -111,331 + 1,851(4) + 4,729(34) + 15,826(3,32) = **109,40**

olarak bulunur. Bu sonuçlara göre bu sporcunun 4-6 yıl sonra üçüncü grup Fisher sınıflama fonksiyonu en yüksek olduğundan, Genç Ana Kadro takımında (üçüncü grupta) oynayabileceği kesindir.

Benzer şekilde verilen örnekleme ait tüm birimler için Fisher sınıflama fonksiyon skorları ve atanma grupları Tablo 4.12'de verildi. Tablo 4.12'de koyu renkli işaretli gözlemler olması gerekenden farklı gruba atanan gözlemlerdir. Buna göre; Milli takımlara giremeyenler grubundaki 8.nci, 11.nci gözlemler geliştirilen fonksiyonlar yardımıyla yapılan hesaplamada Genç Ana Kadro grubuna sınıflandırılırken, 16.ncı ve 25.nci gözlemler ise Genç Yedek1 grubuna sınıflandırılmıştır. Genç Yedek 1 grubundaki 3.ncü, 10.ncu, 15.nci ve 29.ncu gözlemler Genç Ana Kadro grubuna sınıflandırılırken, 6.ncı, 9.ncu, 11.nci, 13.ncü, 21.ci ve 30.ncu gözlemler milli takımlara giremeyenler grubuna sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde Genç Ana Kadro grubundaki 2.ci, 10.ncu, 14.ncü ve 16.ncı gözlemler Genç Yedek 1 grubuna sınıflandırılmıştır. Böylece ayırma fonksiyonları yardımı ile Grup 1'de olan 30 sporcudan 2'si Grup 2 ye, 2'si de Grup 3'e yanlışlıkla atanmıştır. Benzer şekilde Grup 2 de olan 30 sporcudan 6'sı Grup 1'e ve 4'ü de Grup 3'e yanlışlıkla atanırken, Grup 3'de olan 30 sporcudan 4'ü Grup 2'ye yanlışlıkla atanmıştır.

Tablo 1.19 Fisher Doğrusal Ayırma Fonksiyonu Skorları ve Atama (A) Grupları

Giremeyenler (Grup 1)			A	Genç Yedek 1 (Grup 2)			A	Genç Ana Kadro (Grup 3)			A
C_1	C_2	C_3		C_1	C_2	C_3		C_1	C_2	C_3	
102,54	101,86	99,03	1	83,27	87,20	85,82	2	110,29	112,03	112,78	3
130,69	130,14	129,52	1	100,17	103,60	103,04	2	**122,78**	**123,04**	**122,39**	2
159,82	153,18	148,99	1	**121,20**	**123,59**	**125,46**	3	103,37	106,47	106,70	3
115,06	112,61	109,04	1	75,82	80,71	80,55	2	93,00	98,80	101,78	3
108,40	105,90	100,11	1	90,10	93,01	91,25	2	106,00	111,24	114,30	3
147,04	141,72	135,57	1	**142,16**	**139,89**	**138,83**	1	94,49	101,09	104,10	3
126,79	126,55	125,24	1	99,91	100,04	95,45	2	120,41	122,38	124,08	3
120,36	**122,14**	**122,33**	3	72,95	77,26	76,28	2	100,09	104,77	106,78	3
132,06	131,57	130,64	1	**137,41**	**134,60**	**131,85**	1	109,73	111,73	111,97	3
126,14	123,97	120,25	1	**112,82**	**115,33**	**117,22**	3	**99,29**	**102,62**	**101,80**	2
123,14	**123,67**	**123,75**	3	**83,93**	**82,54**	**74,17**	1	108,38	112,34	114,19	3
121,43	118,55	113,74	1	63,68	69,22	68,01	2	83,90	88,82	89,15	3
107,03	105,36	101,21	1	**115,67**	**114,83**	**111,60**	1	100,35	104,56	106,33	3
100,19	98,18	90,85	1	100,93	103,56	101,54	2	**98,03**	**100,43**	**99,26**	2
129,06	122,32	113,79	1	**112,04**	**114,69**	**114,97**	3	118,01	120,40	122,58	3
97,54	**99,66**	**98,12**	2	106,01	106,88	105,19	2	**101,00**	**103,75**	**102,96**	2
113,06	110,54	105,81	1	81,93	85,37	82,75	2	98,36	103,10	104,39	3
120,27	118,42	115,20	1	89,42	90,27	87,20	2	120,86	125,52	131,51	3
111,32	109,85	105,41	1	70,56	73,45	69,15	2	101,50	106,13	109,22	3
130,66	127,87	125,48	1	100,16	101,96	100,26	2	136,13	136,71	137,67	3
101,34	100,71	96,54	1	**114,00**	**113,36**	**111,24**	1	95,12	99,84	101,60	3
121,41	117,64	111,73	1	80,64	83,66	81,32	2	112,52	114,55	117,47	3
92,88	91,28	85,11	1	108,92	110,68	110,42	2	97,64	101,76	103,26	3
95,13	94,08	89,20	1	106,62	108,08	107,17	2	111,01	115,48	119,01	3
99,16	**99,94**	**96,09**	2	90,01	92,31	89,68	2	94,74	99,45	101,27	3
128,88	126,35	122,74	1	102,21	103,35	101,70	2	116,59	118,91	121,38	3
128,10	125,05	121,13	1	102,24	104,05	102,51	2	102,14	107,24	110,47	3
109,44	108,21	103,91	1	98,43	100,58	98,90	2	97,31	103,12	106,89	3
134,49	130,78	126,79	1	**118,04**	**119,82**	**120,11**	3	108,27	111,89	114,16	3
128,42	127,41	125,60	1	**110,18**	**109,98**	**107,87**	1	110,41	116,28	120,13	3