

**ÖRNEK:** Biyoistatistik yaz okulu sırasında, kursiyerlerin kısa yoldan öğrenmelerini sağlayacak öğretim yöntemi ile dersin veriliş süresinin iki farklı değişken ( $X_1$ :sınavı bitirme süresi(SÜ) ve  $X_2$ : teste verilen doğru cevap yüzdesi(DY)) üzerine etkileri inceleniyor. Öğretim yöntemi için iki düzey,  $A_1$ : pasif yöntem(Anlatmaya dayalı öğretim yöntemi) ve  $A_2$ : aktif yöntem (Öğrencinin çalışmasına dayalı öğretim yöntemi) özel olarak, dersin veriliş süresi için üç düzey;  $C_1$ : 6 hafta süre ile günde 2 saatlik kurs,  $C_2$ : 4 hafta süre ile günde 3 saatlik kurs,  $C_3$ : 3 hafta süre ile günde 4 saatlik kurs şeklinde özel olarak seçiliyor. Bu amaçla öğrenciler rastgele 6 gruba ayrılarak her gruba "değişik öğretim yöntemi-değişik süre" seviyelerinde kurs veriliyor. Kurs sonunda bir sınav yapılarak öğrencilerin sınavı bitirme süreleri ve teste verdikleri doğru cevap yüzdeleri aşağıdaki gibi ölçülüyor. Buna göre:

- Problemin çözümü için uygun istatistiksel analizi nedenlerini açıklayarak belirleyiniz?
- Bu analiz kapsamında uygun modeli ifade ediniz ve ana etkiler için model parametrelerini tahmin ediniz?
- $(C_2, A_2)$  deneme kombinasyonuna ait etkileşim parametresini ve bu deneme kombinasyonunda 3. Gözlemin hatasını tahmin ediniz?
- Etkileşim etkisinin önemli olup olmadığına karar veriniz?
- Öğretim yöntemi etkisinin önemli olup olmadığına karar veriniz?
- Dersin veriliş süresi etkisinin önemli olup olmadığına karar veriniz?
- Etkisi önemli olan etkiler niçin hangi düzeyler bakımından hangi değişkene göre farklılık olduğunu araştırınız?

| Öğretim Yöntemi | Dersin Veriliş Süresi |    |    |    |    |    |
|-----------------|-----------------------|----|----|----|----|----|
|                 | C1                    |    | C2 |    | C3 |    |
|                 | SÜ                    | DY | SÜ | DY | SÜ | DY |
| A1              | 36                    | 26 | 46 | 17 | 26 | 14 |
|                 | 34                    | 22 | 34 | 21 | 31 | 14 |
|                 | 28                    | 21 | 31 | 17 | 30 | 16 |
|                 | 34                    | 23 | 31 | 18 | 34 | 16 |
|                 | 34                    | 21 | 36 | 23 | 30 | 13 |
|                 | 29                    | 19 | 26 | 19 | 27 | 13 |
|                 | 48                    | 25 | 35 | 16 | 21 | 12 |
|                 | 28                    | 20 | 33 | 19 | 31 | 15 |
|                 | 34                    | 21 | 23 | 15 | 37 | 14 |
|                 | 38                    | 20 | 30 | 14 | 29 | 14 |
|                 |                       |    |    |    |    |    |
|                 |                       |    |    |    |    |    |
|                 |                       |    |    |    |    |    |
|                 |                       |    |    |    |    |    |
| A2              | 42                    | 25 | 32 | 18 | 28 | 11 |
|                 | 47                    | 24 | 39 | 19 | 28 | 10 |
|                 | 51                    | 29 | 37 | 17 | 25 | 10 |
|                 | 35                    | 25 | 31 | 17 | 22 | 12 |
|                 | 37                    | 26 | 36 | 19 | 27 | 11 |
|                 | 44                    | 28 | 32 | 19 | 25 | 12 |
|                 | 44                    | 25 | 31 | 17 | 33 | 14 |
|                 | 49                    | 24 | 41 | 21 | 31 | 13 |
|                 | 43                    | 24 | 36 | 18 | 28 | 12 |
|                 | 36                    | 26 | 40 | 20 | 23 | 11 |
|                 |                       |    |    |    |    |    |
|                 |                       |    |    |    |    |    |
|                 |                       |    |    |    |    |    |
|                 |                       |    |    |    |    |    |

Gözetim:

a)

\* Bağımlı değişkenler:  $X_1$ : Dersin bitiş süresi  $\rightarrow$  Süreleri  
 $X_2$ : Değerlendirme yöntemi  $\rightarrow$  Özetleri }  $\Delta = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$

\* Bağımsız değişkenler (Faktörler):

I. Faktör: Dersin verili süresi  $\rightarrow$  Süreleri

Faktör düzeyleri  $(g=3)$   $\left\{ \begin{array}{l} A_1: 6 hafta süreyle günde 2 saat \\ A_2: 4 hafta süreyle günde 3 saat \\ A_3: 3 hafta süreyle günde 4 saat \end{array} \right.$

II. Faktör: Öğretim yöntemi  $\rightarrow$  Süreleri

Faktör düzeyleri  $(b=2)$   $\left\{ \begin{array}{l} A_1: Pratiklere dayalı öğretim \\ A_2: Görsel öğretime dayalı öğretim \end{array} \right.$

Uygun İstatistiksel Analiz:

Gök değişkenli 2 faktör varyans analizi!

b) Model denklemleri;

Tüm derleme kombinasyonlarının sayısı  $g \times b = 3 \times 2 = 6$  vardır.

I.-inci faktörün k.-inci ve II.-inci faktörün l.-inci düzeyinde

c.-inci gözlem için modellemiştir;

$$\Delta_{kll} = \begin{bmatrix} x_{1kll} \\ x_{2kll} \end{bmatrix} = \mu_{..} + \alpha_k + \beta_l + (\alpha\beta)_{kl} + \epsilon_{kll} \quad \begin{array}{l} k=1,2,3 \\ l=1,2 \\ c=1,2,\dots,10 \end{array}$$

$(g=3, b=2, n=10)$

$\alpha_k = \mu_{k.} - \mu_{..}$   $\rightarrow$  kelon ortalamaları

$\beta_l = \mu_{.l} - \mu_{..}$

$(\alpha\beta)_{kl} = \mu_{kl.} - \mu_{k.} - \mu_{.l} + \mu_{..}$



Modelin ana etki parametreleri  $\alpha_k = \mu_{k.} - \mu_{..}$ ,  $k=1,2,3$  ve  $\beta_l = \mu_{.l} - \mu_{..}$ ,  $l=1,2$  dir. Tahmin edicileri ise;  $\hat{\alpha}_k = \bar{X}_{k.} - \bar{X}_{..}$ ,  $k=1,2,3$  ve  $\hat{\beta}_l = \bar{X}_{.l} - \bar{X}_{..}$  dir. Bunlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| Parametre   | Tahmini   | Parametre  | Tahmini  |
|-------------|---|------------|--|
| $\mu_{..}$  | $\bar{X}_{..} = \begin{bmatrix} 33,6167 \\ 18,25 \end{bmatrix}$   | $\alpha_1$ | $\hat{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 4,9333 \\ 5,45 \end{bmatrix}$    |
| $\mu_{1.}$  | $\bar{X}_{1.} = \begin{bmatrix} 38,55 \\ 23,70 \end{bmatrix}$     | $\alpha_2$ | $\hat{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0,3833 \\ -0,05 \end{bmatrix}$   |
| $\mu_{2.}$  | $\bar{X}_{2.} = \begin{bmatrix} 34,00 \\ 18,20 \end{bmatrix}$     | $\alpha_3$ | $\hat{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -5,3167 \\ -5,40 \end{bmatrix}$  |
| $\mu_{.3.}$ | $\bar{X}_{3.} = \begin{bmatrix} 28,30 \\ 12,85 \end{bmatrix}$     | $\beta_1$  | $\hat{\beta}_1 = \begin{bmatrix} -1,4834 \\ -0,3167 \end{bmatrix}$ |
| $\mu_{.1}$  | $\bar{X}_{.1} = \begin{bmatrix} 32,1333 \\ 17,9333 \end{bmatrix}$ | $\beta_2$  | $\hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1,4833 \\ 0,3167 \end{bmatrix}$   |
| $\mu_{.2}$  | $\bar{X}_{.2} = \begin{bmatrix} 35,10 \\ 18,5667 \end{bmatrix}$   |            |  |

bulunur.

c)  $(C_2, A_2)$  deneme kombinasyonuna ait etkileşim parametresine tahmini;

$$(\alpha\beta)_{22} = \mu_{22} - \mu_{2.} - \mu_{.2} + \mu_{..} \Rightarrow (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{22} = \bar{X}_{22} - \bar{X}_{2.} - \bar{X}_{.2} + \bar{X}_{..}$$

$$\Rightarrow (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{22} = \begin{bmatrix} 35,5 \\ 18,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 34,0 \\ 18,20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 35,10 \\ 18,5667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 33,6167 \\ 18,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0167 \\ -0,0167 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca bu deneme kombinasyonunda 3. gözlemin hata tahmini  $E_{223} \rightarrow \hat{E}_{223} = X_{223} - \bar{X}_{22} = \begin{bmatrix} 37 \\ 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 35,5 \\ 18,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1,5 \end{bmatrix}$  bulunur.

Hipotezler:

i)  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \rightarrow$  (örneğin verilerin sürelerinin dağılımlarının eşit olması)

$H_1: \exists \mu_k$  diğerlerinden farklıdır.

ii)  $H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2}$

$H_1: \mu_{.1} \neq \mu_{.2}$

iii)  $H_0: \mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{12} = \mu_{22} = \mu_{32}$

$H_1: \exists \mu_{kl}$  diğerlerinden farklıdır.

Test istatistiği;

$$\chi_1 = - \left[ gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2} \right] \ln \Lambda_1 \sim \chi_{p(g-1)}^2$$

$$\Lambda_1 = \frac{|H|}{|F_1+H|}, \quad F_1 = \sum_{k=1}^g b_n (\bar{X}_{k.} - \bar{X}_{..}) (\bar{X}_{k.} - \bar{X}_{..})'$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1055,032 & 1111,55 \\ 1111,55 & 1177,30 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \sum_{l=1}^b g^n (\bar{X}_{.l} - \bar{X}_{..}) (\bar{X}_{.l} - \bar{X}_{..})'$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 132,02 & 28,187 \\ 28,187 & 6,018 \end{bmatrix}$$

$$F_{12} = \sum_{k=1}^g \sum_{l=1}^b n (\bar{X}_{kl} - \bar{X}_{k.} - \bar{X}_{.l} + \bar{X}_{..}) (\bar{X}_{kl} - \bar{X}_{k.} - \bar{X}_{.l} + \bar{X}_{..})'$$

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 307,895 & 174,772 \\ 174,772 & 99,232 \end{bmatrix}$$

(5)

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^p (X_{ijk} - \bar{X}_{..})(X_{ijk} - \bar{X}_{..})'$$

$$T = \begin{bmatrix} 2828,05 & 1525,71 \\ 1525,71 & 1467,25 \end{bmatrix}$$

$$T = F_1 + F_2 + E_{12} + H$$

$$H = \begin{bmatrix} 1333,1 & 211,2 \\ 211,2 & 184,7 \end{bmatrix}$$

$$* \Lambda_1 = \frac{|H|}{|F_1 + H|} = \frac{201618,13}{1502970,946} = 0,1341$$

$$L_1 = - \left[ 3 \times 2 \times 9 - \frac{2+1-2}{2} \right] \ln(0,1341) = 107,49$$

$\alpha = 0,05$  için

$$\chi^2_{p(g-1); \alpha} = \chi^2_{4; 0,05} = 9,49$$

$\Rightarrow H_0$  red edilir.

Yani dersin veriliş süresi, sınavın bitiş süresi ile devamların doğruluk yüzdeleri arasında etkilidir.

$$* L_2 = - \left[ gb(n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2} \right] \ln \Lambda_2 \sim \chi^2_{p(b-1)}$$

$$\Lambda_2 = \frac{|H|}{|F_2 + H|} = \frac{201618,13}{222118,323} = 0,9077$$

$$L_2 = - \left[ 3 \cdot 2 \cdot 9 - \frac{2+1-1}{2} \right] \ln(0,9077) = 5,13$$

(6)

(13)

$\alpha = 0.05$  için

$$\chi^2_{p(b-1); \alpha} = \chi^2_{2; 0.05} = 5.99$$

$\Rightarrow H_0$  kabul edilir.

Yani, öğretim yöntemi, sınavın bitiş süresi ile cevapların doğruluk yüzdesi üzerinde etkilidir.

$$* \chi^2_E = - \left[ gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)(b-1)}{2} \right] \ln \Lambda_E \sim \chi^2_{p(b-1)(g-1)}$$

$$\Lambda_E = \frac{|H|}{|E_{12+H}|} = \frac{201618,13}{316956,6076} = 0,6361$$

$$\chi^2_E = - \left[ 3 \cdot 2 \cdot 9 - \frac{2+1-(2-1)}{2} \right] \ln(0,6361) = 24,2$$

$\alpha = 0.05$  için

$$\chi^2_{p(g-1)(b-1); \alpha} = \chi^2_{4; 0.05} = 9.49$$

$\Rightarrow H_0$  red edilir.

Yani, etkileşim, sınavın bitiş süresi ile cevapların doğruluk yüzdesi üzerinde etkilidir. Etkileşim önemlidir.

Faktörler, bağımlı değişkenleri birbirine bağlı olarak etkilemektedir.

I. faktör dersin verilmiş süresi önemli bulunduğu için bu faktöre göre hangi gruplar arasında ve hangi değişken bakımından farklılık bulunduğu araştırılabilir.

Öğretim yöntemi (II. faktör) önemli olmadığı için A'ları karşılaştırmıyoruz.

(7)



2. faktör için; 2 düzey  $k \neq t = 1, 2$  olmak üzere j-inci düzeylere göre karşılaştırma yapılarak olurdu;

$$H_0: \mu_{jk.} - \mu_{jt.} = 0 \quad k \neq t = 1, 2, 3$$

$$H_1: \mu_{jk.} - \mu_{jt.} \neq 0 \quad j = 1, 2$$

Güçüm analizi;

$$P \left[ (\bar{X}_{jk.} - \bar{X}_{jt.}) - t_{\alpha/2, g(b(n-1))} \cdot \frac{s}{\sqrt{g(b(n-1))}} \leq \mu_{jk.} - \mu_{jt.} \leq (\bar{X}_{jk.} - \bar{X}_{jt.}) + \dots \right] = 1 - \alpha$$

Toplam karşılaştırma sayısı;

$$P \binom{9}{2} = 2 \binom{3}{2} = 6$$

i)  $B_1$  ve  $B_2$  düzeyleri  $X_1$ 'e göre;

$$\left( \frac{g(b(n-1))}{P(g(b(n-1)))} \right) = 54$$

$$(k=1, t=2, j=1)$$

$$H_0: \mu_{11.} - \mu_{12.} = 0$$

$$H_1: \mu_{11.} - \mu_{12.} \neq 0$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 38,55 \\ 23,70 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} 34,00 \\ 18,20 \end{bmatrix} \quad \bar{X}_3 = \begin{bmatrix} 28,30 \\ 12,85 \end{bmatrix}$$

$$P \left[ (38,55 - 34,00) - \overset{2,74}{t_{0,025, 54}} \cdot \sqrt{\frac{1333,1 \cdot 2}{54 \cdot 20}} \leq \mu_{11.} - \mu_{12.} \leq (38,55 - 34,00) + \dots \right] = 0,95$$

$$P \left[ 0,245 \leq \mu_{11.} - \mu_{12.} \leq 8,855 \right] = 0,95 \Rightarrow H_0 \text{ red edilirdi.}$$

ii)  $B_1$  ve  $B_3$  düzeyleri  $X_1$ 'e göre;

$$(k=1, t=3, j=1)$$

$$H_0: \mu_{11.} - \mu_{13.} = 0$$

$$H_1: \mu_{11.} - \mu_{13.} \neq 0$$

$$P \left[ (38,55 - 28,30) - 2,74 \sqrt{\frac{1333,1 \cdot 2}{54 \cdot 20}} \leq \mu_{11.} - \mu_{13.} \leq (38,55 - 28,30) + \dots \right] = 0,95$$

(8)



$$P[5,365 \leq \mu_{11} - \mu_{12} \leq 14,555] = 0,95$$

çii)  $B_2$  ve  $B_3$  düzeyleri  $X_1$ 'e göre;

$$(k=2, t=3, j=1)$$

$$H_0: \mu_{12} - \mu_{13} = 0$$

$$H_1: \mu_{12} - \mu_{13} \neq 0$$

$$P[1,395 \leq \mu_{12} - \mu_{13} \leq 10,005] = 0,95$$

çiv)  $B_1$  ve  $B_2$  düzeyleri  $X_2$ 'e göre;

$$(k=1, t=2, j=2)$$

$$H_0: \mu_{21} - \mu_{22} = 0$$

$$H_1: \mu_{21} - \mu_{22} \neq 0$$

$$P[3,896 \leq \mu_{21} - \mu_{22} \leq 7,102] = 0,95$$

v)  $B_1$  ve  $B_3$  düzeyleri  $X_2$ 'e göre;

$$(k=1, t=3, j=2)$$

$$H_0: \mu_{21} - \mu_{23} = 0$$

$$H_1: \mu_{21} - \mu_{23} \neq 0$$

$$P[3,248 \leq \mu_{21} - \mu_{23} \leq 12,452] = 0,95$$

vi)  $B_2$  ve  $B_3$  düzeyleri  $X_2$ 'e göre;

$$(k=2, t=3, j=2)$$

$$H_0: \mu_{22} - \mu_{23} = 0$$

$$H_1: \mu_{22} - \mu_{23} \neq 0$$

$$P[3,748 \leq \mu_{22} - \mu_{23} \leq 6,952] = 0,95$$

(9)