II.2.2 Örnek Temel Bileşenleri

$\underline{\boldsymbol{X}}' = [X_1 X_2 \ \dots \ X_p]: p \times 1$ boyutlu rastgele değişkenleri vektörünün oluşturduğu kitle için kitle ortalama vektörü $E(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\boldsymbol{\mu}}: p \times 1$, kitle varyans-kovaryans matrisi $Cov(\underline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{\Sigma} : p \times p$ ve kitle korelasyon matrisi $Kor(\underline{\boldsymbol{X}}) = cov(\underline{\boldsymbol{Z}}) = \boldsymbol{\rho} : p \times p$ olsun. $X_j, (j = \overline{1, p})$ değişkenlerinin aynı türden (veya farklı türden) ölçüm birimlerine sahip olduğunu ve $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin (veya $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin) de bilinmiyor olduğunu kabul edelim. Bu durumda TB'leri elde edebilmek için öncelikle bu kitleden n birimlik bir rastgele örnek çekilerek bilinmeyen kitle parametreleri en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak bu örnek yardımıyla tahmin edilir. Örnek birimleri $\underline{\boldsymbol{X}}_1, \underline{\boldsymbol{X}}_2, \dots, \underline{\boldsymbol{X}}_n$ gözlem vektörleri olmak üzere Bölüm 1'de belirtildiği üzere; $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\overline{\underline{\boldsymbol{X}}}$ örnek ortalama vektörü, $\boldsymbol{\Sigma}$ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\boldsymbol{S}$ örnek varyans-kovaryans matrisi ve $\boldsymbol{\rho}$ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\boldsymbol{R}$ örnek korelasyon matrisidir. Başlangıç sistemine ait $X_k, (k = \overline{1, p})$ değişkenleri aynı türden ölçüm birimlerine sahipse, TB'ler $\boldsymbol{S}$ örnek varyans-kovaryans matrisine ait bilgi kullanılarak elde edilir. Başlangıç sistemine ait $X_k, (k = \overline{1, p})$ değişkenleri farklı türden ölçüm birimlerine sahipse, bu takdirde TB'ler $\boldsymbol{R}$ örnek korelasyon matrisine ait bilgi kullanılarak elde edilir.

Kabul edelim ki TB'lerin elde edilmesinde $\mathbf{S}$ matrisine ait bilgiler kullanılacak olsun. Bu durumda elde edilecek olan TB'ler başlangıç sistemine ait ve birbirleri ile ilişkili olan $X_k, (k = \overline{1, p})$ değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları olacaktır. TB'lerin elde edilmesinde kitle varyans-kovaryans matrisinin kullanıldığı durumda izlenen yol kullanılarak örnekleme ait TB'ler de elde edilebilir. Buna göre $j = 1, 2, \dots, p$ için $(\hat{\lambda}_j, \ \underline{\hat{a}}_j)$ ikilileri $\mathbf{S}$ matrisine ait özdeğer-özvektör ikilileri olmak üzere j-nci TB;

$$Y_j = \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \underline{\boldsymbol{X}} = \hat{a}_{j1} X_1 + \hat{a}_{j2} X_2 + \cdots + \hat{a}_{jp} X_p \qquad (2.29)$$

olarak elde edilir. Öyle ki $j = 1, 2, \dots, p$ için j-nci TB'nin varyansı;

$$\widehat{Var(Y_j)} = \widehat{Var(\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \underline{\boldsymbol{X}})} = \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \widehat{Var(\underline{X})} \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_j = \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \boldsymbol{S} \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_j \qquad (2.30)$$

olur. $\boldsymbol{S}$ matrisinin özdeğerler ve özvektörler matrisleri sırasıyla, $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} = Köş[\hat{\lambda}_1, \ \hat{\lambda}_2, \ \dots, \ \hat{\lambda}_p]$ ve $\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_1 \\ \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_2 \\ \vdots \\ \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_p \end{bmatrix}$ olmak üzere, $\boldsymbol{S}$ matrisinin spektral ayrışımının $\boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{A}}' \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} \widehat{\boldsymbol{A}}$ olduğu ve $\widehat{\boldsymbol{A}}$ matrisinin ortogonal olduğu dikkate alındığında $\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\boldsymbol{A}} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\boldsymbol{A}}$ yazılabilir. Böylece $j = 1, 2, \dots, p$ için $\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\boldsymbol{S} = \hat{\lambda}_j\, \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j$ olduğu Eşitlik (2.30)'da kullanılırsa, j-nci TB'nin varyansının;

$$\widehat{Var(Y_j)} = \hat{\lambda}_j\, \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_j = \hat{\lambda}_j \tag{2.31}$$

olduğu görülür. Ayrıca $j \neq t = 1, 2, \dots, p$ için j-nci ve t-nci TB'lerin kovaryansı;

$$\widehat{Cov(Y_j, Y_t)} = \widehat{Cov(\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\underline{\boldsymbol{X}}, \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_t\underline{\boldsymbol{X}})} = \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\widehat{Cov(\underline{\boldsymbol{X}})}\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_t = \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\mathbf{S}\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_t, j \neq t = 1, 2, \dots, p \tag{2.32}$$

olup, $\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\boldsymbol{S} = \hat{\lambda}_j\, \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j$ eşitliği ve $\widehat{\boldsymbol{A}}$ matrisinin ortogonal olduğu dikkate alındığında $Cov(Y_j, Y_t) = \hat{\lambda}_j\, \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_t = 0$ elde edilir. Çünkü $\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_j \perp \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_t$ olduğundan $\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_t = 0$ dır, yani $\boldsymbol{S}$ örnek varyans kovaryans matrisine ait bilgi kullanılarak başlangıç değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları olarak elde edilen örnek TB'leri ilişkisizdir. Bu TB'lerin varyans-kovaryans matrisi ise

$$\mathbf{S}_{\underline{\boldsymbol{Y}}} = Cov(\underline{\boldsymbol{Y}}) = \widehat{Cov(\widehat{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{X}})} = \widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{Cov(\underline{\boldsymbol{X}})}\widehat{\boldsymbol{A}}' = \widehat{\boldsymbol{A}}\mathbf{S}\widehat{\boldsymbol{A}}' = \widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}' = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{2.33}$$

olacaktır. Böylece $j = 1, 2, \dots, p$ için $s^2_{Y_j} = Var(Y_j) = \hat{\lambda}_j$ elde edilir.

Şimdi de TB'lerin elde edilmesinde **R** örnek korelasyon matrisine ait bilgiler kullanılacak olsun. Bu durumda elde edilecek olan TB'ler standart değişkenler sistemine ait ve birbirleri ile ilişkili olan $Z_k, (k = \overline{1, p})$ değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları olacaktır. TB'lerin elde edilmesinde kitle korelasyon matrisinin kullanıldığı durumda izlenen yol kullanılarak örnekleme ait TB'ler örnek korelasyon matrisinden de elde edilebilir. Buna göre $j = 1, 2, \dots, p$ için $(\hat{\lambda}_j,\ \underline{\hat{a}}_j)$ ikilileri **R** matrisine ait özdeğer-özvektör ikilileri olmak üzere j-nci TB;

$$Y_j = \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\underline{\boldsymbol{Z}} = \hat{a}_{j1}Z_1 + \hat{a}_{j2}Z_2 + \cdots + \hat{a}_{jp}Z_p \tag{2.34}$$

olarak elde edilir. Öyle ki $j = 1, 2, \dots, p$ için j-nci TB'nin varyansı;

$$Var(Y_j) = Var(\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\underline{\boldsymbol{Z}}) = \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\widehat{Var(\underline{\boldsymbol{Z}})}\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_j = \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\boldsymbol{R}\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}_j \tag{2.35}$$

olur. $\boldsymbol{R}$ matrisinin özdeğerler ve özvektörler matrisleri sırasıyla, $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} = K\ddot{o}ş[\hat{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2,\ \dots,\ \hat{\lambda}_p]$

ve $\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_1 \\ \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_2 \\ \vdots \\ \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_p \end{bmatrix}$ olmak üzere, $\boldsymbol{R}$ matrisinin spektral ayrışımının $\boldsymbol{R}=\widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\boldsymbol{A}}$ olduğu ve $\widehat{\boldsymbol{A}}$ matrisinin

ortogonal olduğu dikkate alındığında $\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{R} = \widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\boldsymbol{A}} = \widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\boldsymbol{A}}$ yazılabilir. Böylece $j = 1, 2, \dots, p$ için $\underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\boldsymbol{R} = \hat{\lambda}_j\, \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j$ olduğu Eşitlik (2.35)'de kullanılırsa, j-nci TB'nin varyansının;

$$Var(\,Y_j) = \hat{\lambda}_j\, \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_j = \hat{\lambda}_j \tag{2.36}$$

olduğu görülür. Ayrıca $j \neq t = 1,2,\dots,p$ için j-nci ve t-nci TB'lerin kovaryansı;

$$Cov(Y_j\,, Y_t) = \widehat{Cov(\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \underline{\boldsymbol{Z}}\,, \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_t \underline{\boldsymbol{Z}})} = \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \widehat{Cov(\underline{\boldsymbol{Z}})} \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_t = \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \mathbf{R} \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_t\,, j \neq t = 1,2,\dots,p \tag{2.37}$$

olup, $\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \boldsymbol{R} = \hat{\lambda}_j\, \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j$ eşitliği ve $\hat{\boldsymbol{A}}$ matrisinin ortogonal olduğu dikkate alındığında $Cov(Y_j\,, Y_t) = \hat{\lambda}_j\, \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_t = 0$ elde edilir. Çünkü $\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_j \perp \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_t$ olduğundan $\underline{\hat{\boldsymbol{a}}}'_j \underline{\hat{\boldsymbol{a}}}_t = 0$ dır, yani $\boldsymbol{R}$ örnek varyans kovaryans matrisine ait bilgi kullanılarak standart değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları olarak elde edilen örnek TB'leri de ilişkisizdir. Bu TB'lerin varyans-kovaryans matrisi ise yine

$$\mathbf{S}_{\underline{Y}} = Cov(\underline{\boldsymbol{Y}}) = \widehat{Cov(\hat{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{Z}})} = \hat{\boldsymbol{A}} \widehat{Cov(\underline{\boldsymbol{Z}})} \hat{\boldsymbol{A}}' = \hat{\boldsymbol{A}} \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{A}}' = \hat{\boldsymbol{A}} \hat{\boldsymbol{A}}' \hat{\boldsymbol{\Lambda}} \hat{\boldsymbol{A}} \hat{\boldsymbol{A}}' = \hat{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{2.38}$$

olacaktır. Böylece $j = 1,2,\dots,p$ için $s^2_{Y_j} = Var(Y_j) = \hat{\lambda}_j$ elde edilir.

<u>**Teorem:1**</u> Başlangıç değişkenler sistemine veya standart değişkenler sistemine ait toplam varyans, TB'lerin varyanslarının toplamına eşittir.

<u>**İspat**</u> **i) Başlangıç değişkenler sistemi için:**

Başlangıç değişkenler sistemi $\underline{\boldsymbol{X}} : p \times 1$değişkenler vektörü ile gösterilsin ve $Cov(\underline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{\Sigma} : p \times p$ olsun. <u>Eğer **Σ** matrisi biliniyorsa</u> başlangıç sistemine ait toplam varyans;

$\sigma^2_{Top.} = \text{İ}z(\boldsymbol{\Sigma}) = \sum_{k=1}^{p} \sigma^2_{kk}$ …..(i)

dir. $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin özdeğerler ve özvektörler matrisleri sırası ile $\boldsymbol{\Lambda}$ ve $\boldsymbol{A}$ olmak üzere, spektral ayrışımı $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A}$ olduğunu biliyoruz. $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinden elde edilen TB'ler $j = 1,2,\dots,p$ için $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j \underline{\boldsymbol{X}}$ olup, varyansı Eşitlik (2.20) gereğince $Var(Y_j) = \lambda_j$ dir. Böylece TB'lerin varyanslarının toplamı;

$\sum_{j=1}^{p} Var(Y_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p$ …..(ii)

olur. Diğer taraftan;

$\sigma^2_{Top.} = \text{İ}z(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{İ}z(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A})$

$= \text{İ}z(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A}\boldsymbol{A}')$ [Çarpılabilir $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri için $\text{İz}(\boldsymbol{AB}) = \text{İ}z(\boldsymbol{BA})$ olduğundan]

$=\text{İ}z(\boldsymbol{\Lambda})$, ($\boldsymbol{A}$ ortogonal matris olduğundan $\mathbf{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{I_p}$ dir)

$= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$, ($\boldsymbol{\Lambda} = \text{Köş}[\lambda_1\,, \lambda_2\,, \dots\,, \lambda_p]$ olduğundan)….. (iii) yazılabilir. (i), (ii) ve (iii) dikkate alındığında;

$\sigma^2_{Top.} = \sum_{k=1}^{p} \sigma^2_{kk} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{p}} \lambda_j = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{p}} Var(Y_j)$ elde edilir.

<u>Eğer **Σ** matrisi bilinmiyorsa</u> başlangıç sistemine ait toplam varyansın tahmini;

$\hat{\sigma}^2_{Top.} = \text{İ}z(\mathbf{S}) = \sum_{k=1}^{p} s^2_{kk}$ ….(iv)

dir. $\mathbf{S}$ matrisinin özdeğerler ve özvektörler matrisleri sırası ile $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$ ve $\widehat{\boldsymbol{A}}$ olmak üzere, spektral ayrışımı $\mathbf{S} = \widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\mathbf{\Lambda}}\widehat{\mathbf{A}}$ olduğunu biliyoruz. $\mathbf{S}$ matrisinden elde edilen TB'ler $j = 1, 2, \dots, p$ için $Y_j = \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j\underline{\boldsymbol{X}}$ olup, varyansı Eşitlik (2.31) gereğince $Var(Y_j) = \hat{\lambda}_j$ dir. Böylece TB'lerin varyanslarının toplamı;

$\sum_{j=1}^{p} Var(Y_j) = \sum_{j=1}^{p} \hat{\lambda}_j = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \cdots + \hat{\lambda}_p$ …..(v)

olur. Diğer taraftan;

$\hat{\sigma}^2_{Top.} = \text{İ}z(\mathbf{S}) = \text{İ}z\widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\mathbf{\Lambda}}\widehat{\mathbf{A}}$

$= \text{İ}z(\widehat{\mathbf{\Lambda}}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}')$ [Çarpılabilir $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri için $\text{İ}z(\boldsymbol{AB}) = \text{İ}z(\boldsymbol{BA})$ olduğundan]

$= \text{İ}z(\widehat{\mathbf{\Lambda}})$, ($\widehat{\boldsymbol{A}}$ ortogonal matris olduğundan $\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{I_p}$ dir)

$= \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{p}} \hat{\lambda}_j$, ($\widehat{\mathbf{\Lambda}}$ = Köş$[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p]$ olduğundan)….. (vi)

yazılabilir. (iv), (v) ve (vi) dikkate alındığında;

$\hat{\sigma}^2_{Top.} = \sum_{k=1}^{p} s^2_{kk} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{p}} \hat{\lambda}_j = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{p}} Var(Y_j)$ elde edilir.

ii) Standart değişkenler sistemi için:

Standart değişkenler sistemi $\underline{\boldsymbol{Z}} : p \times 1$ değişkenler vektörü ile gösterilsin ve $Cov(\underline{\boldsymbol{Z}}) = Kor(\underline{X}) = \boldsymbol{\rho} : p \times p$ olsun. <u>Eğer **ρ** matrisi biliniyorsa</u> standart değişkenler sistemine ait toplam varyans;

$\sigma^2_{Top.} = \text{İ}z(\boldsymbol{\rho}) = p$ …..(vii)

dir. $\boldsymbol{\rho}$ matrisinin özdeğerler ve özvektörler matrisleri sırası ile $\mathbf{\Lambda}$ ve $\boldsymbol{A}$ olmak üzere, spektral ayrışımı $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{A}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{A}$ olduğunu biliyoruz. $\boldsymbol{\rho}$ matrisinden elde edilen TB'ler $j = 1, 2, \dots, p$ için $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{Z}}$ olup, varyansı Eşitlik (2.26) gereğince $Var(Y_j) = \lambda_j$ dir. Böylece TB'lerin varyanslarının toplamı;

$\sum_{j=1}^{p} Var(Y_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p$ …..(viii)

olur. Diğer taraftan;

$\sigma_{Top.}^2 = \dot{I}z(\boldsymbol{\rho}) = \dot{I}z(\boldsymbol{A'\Lambda A})$

$= \dot{I}z(\boldsymbol{\Lambda A A'})$ [Çarpılabilir $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri için $\dot{I}z(\boldsymbol{AB}) = \dot{I}z(\boldsymbol{BA})$ olduğundan]

$=\dot{I}z(\boldsymbol{\Lambda})$, ($\boldsymbol{A}$ ortogonal matris olduğundan $\boldsymbol{AA'} = \boldsymbol{I_p}$ dir)

$= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$, ($\boldsymbol{\Lambda}$ = Köş$[\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_p]$ olduğundan)….. (ix)

yazılabilir. (vii), (viii) ve (ix) dikkate alındığında;

$\sigma_{Top.}^2 = p = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} Var(Y_j)$ elde edilir.

<u>Eğer $\boldsymbol{\rho}$ matrisi bilinmiyorsa</u> standart değişkenler sistemine ait toplam varyansın tahmini;

$\hat{\sigma}_{Top.}^2 = \dot{I}z(\mathbf{R}) = p$ ….(x)

dir. $\mathbf{R}$ matrisinin özdeğerler ve özvektörler matrisleri sırası ile $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ ve $\widehat{\boldsymbol{A}}$ olmak üzere, spektral ayrışımı $\mathbf{R} = \widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\mathbf{A}}$ olduğunu biliyoruz. $\mathbf{R}$ matrisinden elde edilen TB'ler $j = 1, 2, \ldots, p$ için $Y_j = \underline{\widehat{\boldsymbol{a}}}'_j \underline{\boldsymbol{Z}}$ olup, varyansı Eşitlik (2.36) gereğince $Var(Y_j) = \hat{\lambda}_j$ dir. Böylece TB'lerin varyanslarının toplamı;

$\sum_{j=1}^{p} Var(Y_j) = \sum_{j=1}^{p} \hat{\lambda}_j = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \cdots + \hat{\lambda}_p$ …..(xi)

olur. Diğer taraftan;

$\hat{\sigma}_{Top.}^2 = \dot{I}z(\mathbf{R}) = \dot{I}z\widehat{\boldsymbol{A}}'\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\mathbf{A}}$

$= \dot{I}z(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}')$ [Çarpılabilir $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri için $\dot{I}z(\boldsymbol{AB}) = \dot{I}z(\boldsymbol{BA})$ olduğundan]

$=\dot{I}z(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}})$, ($\widehat{\boldsymbol{A}}$ ortogonal matris olduğundan $\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{I_p}$ dir)

$= \sum_{j=1}^{p} \hat{\lambda}_j$, ($\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}$ = Köş$[\hat{\lambda}_1 , \hat{\lambda}_2 , \ldots , \hat{\lambda}_p]$ olduğundan)….. (xii)

yazılabilir. (x), (xi) ve (xii) dikkate alındığında;

$\hat{\sigma}_{Top.}^2 = p = \sum_{j=1}^{p} \hat{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{p} Var(Y_j)$ elde edilir.

TB'ler elde edildikten sonra her bir TB'nin başlangıç sistemine ait toplam varyansı hangi oranda açıkladığı ile ilgilenebileceğimiz gibi ilk k tane TB'nin toplam varyansı açıklama oranı ile de ilgilenebiliriz. Son durum önemli TB sayısına karar vermede bir kriter olarak da kullanılabilir.

j-nci TB'nin toplam varyansı açıklama oranı ($j = 1, 2, \dots, p$) için;

$$V.A.O\left(Y_j\right) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{\dot{\mathrm{I}}z(\boldsymbol{\Sigma})} & , \ \boldsymbol{\Sigma} \text{ matrisi kullanılmış ise} \\ \dfrac{\hat{\lambda}_j}{\dot{\mathrm{I}}z(\mathbf{S})} & , \ \mathbf{S} \text{ matrisi kullanılmış ise} \\ \dfrac{\lambda_j}{\dot{\mathrm{I}}z(\boldsymbol{\rho})} & , \ \boldsymbol{\rho} \text{ matrisi kullanılmış ise} \\ \dfrac{\hat{\lambda}_j}{\dot{\mathrm{I}}z(\mathbf{R})} & , \ \mathbf{R} \text{ matrisi kullanılmış ise} \end{cases} \tag{2.39}$$

eşitliği ile verilir. $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p \geq 0$ sıralaması gereğince, toplam varyansı en fazla açıklayan 1-nciTB (Y_1) ve en az açıklayan ise p-nci TB $\left(Y_p\right)$ olacaktır.

Diğer taraftan ilk k tane TB'nin toplam varyansı açıklama oranı ise;

$$V.A.O\left(Y_1, Y_2, \dots, Y_k\right) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k}{\dot{\mathrm{I}}z(\boldsymbol{\Sigma})} & , \ \boldsymbol{\Sigma} \text{ matrisi kullanılmış ise} \\ \dfrac{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \cdots + \hat{\lambda}_k}{\dot{\mathrm{I}}z(\mathbf{S})} & , \ \mathbf{S} \text{ matrisi kullanılmış ise} \\ \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k}{\dot{\mathrm{I}}z(\boldsymbol{\rho})} & , \ \boldsymbol{\rho} \text{ matrisi kullanılmış ise} \\ \dfrac{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \cdots + \hat{\lambda}_k}{\dot{\mathrm{I}}z(\mathbf{R})} & , \ \mathbf{R} \text{ matrisi kullanılmış ise} \end{cases} \tag{2.39}$$

eşitliği ile elde edilir. Eğer p değeri büyük olduğunda, ilk k tane temel bileşen için bu varyans açıklama oranı %80 veya daha büyük elde edilirse, o zaman fazla bilgi kaybı olmadan bu TBler orijinal p tane değişkenin oluşturduğu başlangıç sistemi yerine kullanılabilir. Böylece başlangıçta birbiri ile ilişkili olan p tane değişkeninin oluşturduğu sistem, TBA ile birbiri ile ilişkisiz k tane ($k < p$) TB'nin oluşturduğu bir sisteme indirgenmiş olur.

Şimdi $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisi kullanılarak elde edilmiş olan $Y_j = \underline{\boldsymbol{a}}'_j\underline{\boldsymbol{X}} = a_{j1}X_1 + a_{j2}X_2 + \cdots + a_{jp}X_p$,$j = 1, 2, \dots, k, (k < p)$ TB'nini ele alalım. Her bir TB, $X_t, t = 1, 2, \dots, p$ değişkenlerinin doğrusal fonksiyonu olduğundan, Y_j TB'i ile X_t değişkeni ilişkilidir. Burada a_{jt} katsayısı X_t değişkeninin Y_j TB'i üzerindeki ağırlığını ya da önemini ifade eder. a_{jt} katsayısı mutlak değerce en büyük olan değişkenin j-nci TB üzerindeki önemi diğerlerinden daha fazladır. Diğer bir ifadeyle bu değişken j-nci TB'nin varyansına $\left(\lambda_j\right)$ en fazla katkıyı yapmaktadır. j-nci TB ile t-nci değişken (X_t) arasındaki ilişkinin ölçüsü (yani korelasyonu):

$$r_{Y_j,X_t} = \frac{\sqrt{\lambda_j} * a_{jt}}{\sigma_t} \quad ,j = 1,2,\dots,k;\ t = 1,2,\dots,g \tag{2.40}$$

ile verilir. Benzer şekilde TB'ler $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{\rho}$ veya $\boldsymbol{R}$ matrisi ile elde edildiğinde TB'ler (Y_j) ile başlangıç değişkenleri (X_t) ya da standart değişkenler (Z_t) arasındaki ilişkiler Eşitlik (2.40)'a benzer şekilde gösterilebilir. Eğer TB'lerin elde edilmesinde $\boldsymbol{S}$ matrisi kullanılmış ise (Y_j) ile TB'ni ile X_t değişkeni arasındaki korelasyon;

$$r_{Y_j,X_t} = \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_j} * \hat{a}_{jt}}{s_t} \quad ,j = 1,2,\dots,k;\ t = 1,2,\dots,g \tag{2.41}$$

eşitliği ile; eğer TB'lerin elde edilmesinde $\boldsymbol{\rho}$ matrisi kullanılmış ise (Y_j) ile TB'ni ile Z_t standart değişkeni arasındaki korelasyon;

$$r_{Y_j,Z_t} = \sqrt{\lambda_j} * a_{jt} \quad ,j = 1,2,\dots,k;\ t = 1,2,\dots,g \tag{2.42}$$

eşitliği ile; eğer TB'lerin elde edilmesinde $\boldsymbol{R}$ matrisi kullanılmış ise (Y_j) ile TB'ni ile Z_t standart değişkeni arasındaki korelasyon;

$$r_{Y_j,Z_t} = \sqrt{\hat{\lambda}_j} * \hat{a}_{jt} \quad ,j = 1,2,\dots,k;\ t = 1,2,\dots,g \tag{2.43}$$

eşitliği ile elde edilir.

Diğer taraftan elde edilen TB'ler kullanılarak, başlangıç sistemindeki her bir örnek birimi için bir TB skoru bulunabilir. $i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere i-nci örnek birimi $\underline{X}_i$ gözlem vektörü olup, bu gözlem vektörü için:

1.TB skoru $y_{1i} = \underline{a}'_1 \underline{X}_i$

2.TB skoru $y_{2i} = \underline{a}'_2 \underline{X}_i$, $i = 1,2,\dots,n$ (2.44)

.

.

k-ncı TB skoru $y_{ki} = \underline{a}'_k \underline{X}_i$

olur. Böylece i-nci gözlem vektörü için TB skorları matris formunda;

$$\underline{Y}_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}'_1 \\ \underline{a}'_2 \\ \vdots \\ \underline{a}'_k \end{bmatrix} \underline{X}_i = A\underline{X}_i \,, i = 1, 2, \dots, n \tag{2.45}$$

şeklinde bir vektör ile ifade edilir. Sonuç olarak başlangıç sistemine ait n birimlik bir örnek, yine n birimlik birTB skor verisine dönüşür. Ancak; başlangıç sistemine ait veri matrisi $p \times n$ boyutlu iken, TB skorları matrisi $k \times n$ boyutlu ve $k < p$ dir.