Sayısal Türev

Eşit aralıklarla artan bir fonksiyonun İleri yön sonlu farlar eşitliği

$$Y_p = Y_0 + \frac{p}{1!}\Delta Y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + \dots\dots\dots$$

Bu eşitlikte $p = \frac{x - x_0}{h}$ **şeklinde hesaplanmıştır ve** $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{h}$ **yazılabilir. Bu durumda yukarıdaki eşitlik;**

$$Y^c_{p(x)} = \frac{1}{h}\Delta Y + \frac{(2p-1)}{2h}\Delta^2 Y + \frac{p(3p^2 - 6p + 2)}{6h}\Delta^3 Y_0 + \dots\dots\dots$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki denklemde türevi aranan nokta $x=x_0$ ise bu durumda eşitlik;

$$Y^{c}_{p\,(xi)} = \frac{1}{h}\left(\Delta Y - \frac{1}{2}\Delta^{2}Y + \frac{1}{3}\Delta^{3}Y - \frac{1}{4}\Delta^{4}Y + ...\right)$$

Fonksiyon değerleri biliniyorsa;

1. **derece türev**

$$Y'_{(xi)} = \frac{1}{h}\left(Y_{i+1} - Y_{i}\right)$$ **İleri yön Sonlu Farklar için**

$$Y'_{(xi)} = \frac{1}{h}\left(Y_{i} - Y_{i-1}\right)$$ **Geri yön Sonlu Farklar için**

$$Y'_{(xi)} = \frac{1}{h}\left(\frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2}\right)$$ **Merkezi Sonlu Farklar için**

2. derece türev

$$Y'_{(xi)} = \frac{1}{h^2}\left(Y_{i+2} - 2*Y_{i+1} + Y_i\right)$$

İleri yön Sonlu Farklar için

$$Y'_{(xi)} = \frac{1}{h^2}\left(Y_i - 2Y_{i-1} + Y_{i-2}\right)$$

Geri yön Sonlu Farklar için

$$Y'_{(xi)} = \frac{1}{h^2}\left(Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}\right)$$

Merkezi Sonlu Farklar için

Örnek:

Sayısal İntegral

Eşit aralıklarla artan bir fonksiyonun İleri yön sonlu farklar eşitliği

$$Y_p = Y_0 + \frac{p}{1!}\Delta Y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + ...$$

Yazılır. Burada $p = \frac{x - x_0}{h}$ **ve** $dp = \frac{dx}{h}$ **yazılabilir. Nokta sayısı n kullanılarak sayısal integral eşitlikleri türetilir.**

N=1 için; $\int_{x0}^{x1} f(x)dx = h\frac{Y_{x0} + Y_{x1}}{2}$

N=2 için; $\int_{x0}^{x2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(Y_{x0} + 4 * Y_{x1} + Y_{x2}\right)$

N=3 için; $\int_{x0}^{x3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(Y_{x0} + 3 * Y_{x1} + 3 * Y_{x2} + Y_{x3}\right)$

Bu eşitliklere Newton-Cotes eşitlikleri denir.

Trapez Kuralı

Newton-Cotes eşitlikleri ile [x_0, x_1] aralığındaki fonksiyonun lineer olduğu düşünülerek çözüm yapılması durumudur.

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{Y_0 + Y_1}{2} + h\frac{Y_1 + Y_2}{2} + ... + h\frac{Y_{n-1} + Y_n}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(Y_0 + 2 * Y_1 + 2 * Y_2 + ... + 2 * Y_{n-1} + Y_n\right)$$

Örnek:

Simpson 1/3 Kuralı

Newton-Cotes eşitlikleri n=2 ile elde edilen eşitlikler kullanılarak çözüm yapılır.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(Y_0 + 4*Y_1 + Y_2) + \frac{h}{3}(Y_2 + 4*Y_3 + Y_4) + ...$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(Y_0 + 4*Y_1 + 2*Y_2 + 4*Y_3 + 2*Y_4 + ... + 4*Y_{n-1} + Y_n\right)$$

Bu yöntemde nokta sayısı tek olmalıdır.

Örnek:

Simpson 3/8 Kuralı

Newton-Cotes eşitlikleri n=3 ile elde edilen eşitlikler kullanılarak çözüm yapılır.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(Y_0 + 3*Y_1 + 3*Y_2 + Y_3) + \frac{3h}{8}(Y_3 + 3*Y_4 + 3*Y_5 + Y_6) + ...$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(Y_0 + 3*Y_1 + 3*Y_2 + 2*Y_3 + 3*Y_4 + 3*Y_5 + 2*Y_6 + ... + 3*Y_{n-1} + Y_n)$$

Örnek: