## 3. PREDİKSİYON, KESTİRİM (ENTERPOLASYON-EKSTRAPOLASYON)

Verilen $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$,…., $(x_n,y_n)$ değerlerinden yararlanarak herhangi bir $x_i$ değeri için olması gereken $y_i$ değerinin hesaplanması işlemine prediksiyon denir. $x_i$ değeri verilen x değerleri arasında ise işleme enterpolasyon, dışında ise ekstrapolasyon denir. Böyle bir işlem için bilinmeyen bir fonksiyon, x değerleri ve kullanılan enterpolasyon fonksiyonu yardımıyla basit bir şekilde tanımlanmaya çalışılır. Enterpolasyon işlemi enterpolasyon için seçilen fonksiyona göre doğrusal, polinomsal, üçgen v.b. enterpolasyon olarak ayrılabilir.

- **Doğrusal Enterpolasyon :** Verilen x,y değerleri arasında doğrusal bir ilişki varsa enterpolasyon işlemi,

$$\frac{x_p - x_i}{y_p - y_i} = \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \Rightarrow y_p = y_i + \left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right)(x_p - x_i)$$ eşitliğiyle yapılır.

**Örnek :**

| i | x | y |
|---|---|---|
| **1** | 3,000 | 5,000 |
| **2** | 14,000 | 8,000 |
| **3** | 8,000 | 6,364 |

$$y_3 = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x_3 - x_1)$$

**Örnek :** $f_{(x)}=e^x$ fonksiyonunun x=0.2 için y=1.221 x=0.3 için y=1.350 ise x=0.26 için değeri nedir?

$$y_3 = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x_3 - x_1)$$

| | | |
|---|---|---|
| **1** | 0,200 | 1,221 |
| **2** | 0,300 | 1,350 |
| **3** | 0,260 | 1,298 |

- **Polinomsal Enterpolasyon :** Verilen x,y değerleri arasında polinomsal bir ilişki olduğunun düşünülmesi durumunda polinomun derecesine göre verilerle çözüm yapılır.

**Örnek :**

| i | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 3,000 | 5,000 |
| 2 | 4,000 | 2,000 |
| 3 | 1,000 | 3,000 |
| 4 | 2,000 | |

2.derece polinom $ax^2+bx+c=y$ şeklindedir. Veriler bu formülde uygulanırsa,

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 9a + 3b + c \\ 2 = 16a + 4b + c \\ 3 = a + b + c \end{array}\right\} \begin{array}{r} a = -1.333 \\ b = 6.333 \\ c = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y = -1.333x^2 + 6.333x - 2 \\ x = 2 \text{ için } y = 5.334 \end{array}$$

**Örnek :**

| i | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 1,000 | -2,000 |
| 2 | 2,000 | 2,000 |
| 3 | 3,000 | 14,000 |
| 4 | 4,000 | |

$$\left.\begin{array}{l} -2 = a + b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ 14 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -8 \\ c = 2 \end{array}$$

$$y = 4x^2 - 8x + 2$$

$$x = 4 \text{ için } y = 34$$

- **Langrange Enterpolasyonu :** Verilen x,y değerleri ile yazılacak Langrange enterpolasyon formül aşağıdaki şekildedir.

$$y = \sum_{i=1}^{n} L_{i(x)}.y_i \quad L_{i(x)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)........(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})......(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)........(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})......(x_i - x_n)}$$

**Örnek :**

| i | x | y |
|---|---|---|
| **1** | 3,000 | 5,000 |
| **2** | 4,000 | 2,000 |
| **3** | 1,000 | 3,000 |
| **4** | 2,000 | 5,334 |

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{(x-4)(x-1)}{(3-4)(3-1)} = -\frac{1}{2}\left(x^2-5x+4\right) \\ L_2 &= \frac{(x-3)(x-1)}{(4-3)(4-1)} = \frac{1}{3}\left(x^2-4x+3\right) \\ L_3 &= \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}\left(x^2-7x+12\right) \end{aligned}\right\}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i L_{i(x)} = -1.333x^2 + 6.333x - 2 \Rightarrow$$

$x = 2$ için $y = 5.334$

**Örnek :**

| i | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 5,000 | 3,000 |
| 2 | 8,000 | 1,000 |
| 3 | 9,000 | 5,000 |
| 4 | 4,000 | 18,335 |

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{(x-8)(x-9)}{(5-8)(5-9)} = \frac{1}{12}\left(x^2 - 17x + 72\right) \\ L_2 &= \frac{(x-5)(x-9)}{(8-5)(8-9)} = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 14x + 45\right) \\ L_3 &= \frac{(x-5)(x-8)}{(9-5)(9-8)} = \frac{1}{4}\left(x^2 - 13x + 40\right) \end{aligned}\right\} y = 1.667x^2 - 24.338x + 89.015 \Rightarrow x = 4 \text{ için } y = 18.335$$

- **Üçgen Enterpolasyon :** Bu enterpolasyon iki yada daha fazla değişken grubu içerir. Verilen x,y,z değerlerine göre bir diğer noktanın x,y değerine karşılık gelen z değerini bulmak için üç noktadan geçen düzlem denklemi yazılır. Bu denklem z = ax+by+c şeklindedir.

| i | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **1** | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ |
| **2** | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
| **3** | $x_3$ | $y_3$ | $z_3$ |
| **P** | $x_p$ | $y_p$ | $z_p$=? |

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= ax_1 + by_1 + c \\ z_2 &= ax_2 + by_2 + c \\ z_3 &= ax_3 + by_3 + c \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \\ (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix}$$

$$\det A = x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)$$

$$a = \frac{1}{\det A}\left[(y_2 - y_3)z_1 + (y_3 - y_1)z_2 + (y_1 - y_2)z_3\right]$$

$$b = \frac{1}{\det A}\left[(x_3 - x_2)z_1 + (x_1 - x_3)z_2 + (x_2 - x_1)z_3\right]$$

$$c = \frac{1}{\det A}\left[(x_2 y_3 - x_3 y_2)z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_3\right]$$

$z_p = ax_p + by_p + c$ eşitliğiyle çözüm yapılır.

**Örnek :**

| i | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **1** | 3,000 | 5,000 | 6,000 |
| **2** | 2,000 | 1,000 | 0,000 |
| **3** | 5,000 | 2,000 | 1,000 |
| **4** | 4,000 | 3,000 | 2,725 |

det A= 3*(1-2)-2*(5-2)+5*(5-1)=11

$$a = \frac{1}{11}\left[(1-2)6 + (2-5)0 + (5-4)1\right] = -0.182$$

$$b = \frac{1}{11}\left[(5-3)6 + (3-5)0 + (2-3)1\right] = 1.545$$

$$c = \frac{1}{11}\left[(4-5)6 + (25-6)0 + (3-10)1\right] = -1.182$$

z = -0.182x+1.545y-1.182 ise x = 4 ve y = 3 için z = 2.725

- **Dörtgen (bilineer) Enterpolasyon :** Bir P noktasının yakınındaki dört noktanın xşyşz değerleri biliniyorsa P noktasının x,y değerine karşılık gelen z değerini bulmak için dört noktadan geçen bilineer yüzey denklemi yazılır. Bu denklem z=ax+by+cxy+d şeklindedir.

| i | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **1** | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ |
| **2** | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
| **3** | $x_3$ | $y_3$ | $z_3$ |
| **4** | $x_4$ | $y_4$ | $z_4$ |
| **P** | $x_p$ | $y_p$ | $z_p$=? |

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= ax_1 + by_1 + cx_1y_1 + d \\ z_2 &= ax_2 + by_2 + cx_2y_2 + d \\ z_3 &= ax_3 + by_3 + cx_3y_3 + d \\ z_4 &= ax_3 + by_3 + cx_4y_4 + d \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_1y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4y_4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

a, b, c, d bulunur. $z_p = ax_p + by_p + cx_py_p + d$ eşitliğiyle çözüm yapılır.

**Örnek :**

| i | x | y | z |
|---|---|---|---|
| **1** | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| **2** | 2,000 | 5,000 | 2,000 |
| **3** | 3,000 | 6,000 | 2,000 |
| **4** | 4,000 | 1,000 | 1,000 |
| **P** | 2,000 | 3,000 | 1,500 |

$a+b+c+d = 1$

$2a+5b+10c+d = 2$

$3a+6b+18c+d = 2$

$4a+b+4c+d =1$

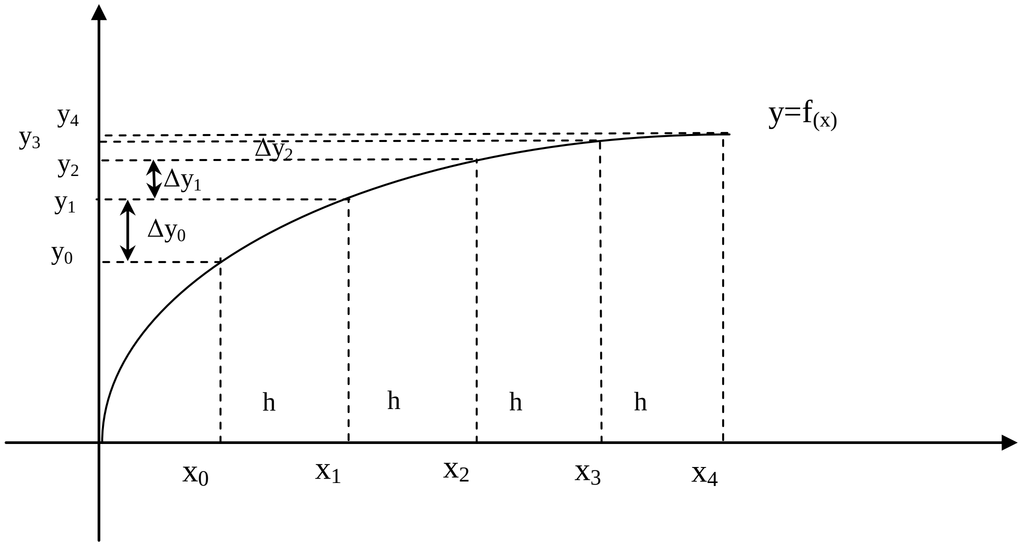
$a = 0.05$ $b = 0.35$ $c = 0.05$ $d = 0.65$

$z = 0.05x+0.35y—0.05xy+0.65$ ise $x = 2$ ve $y = 3$ için $z = 1.5$

## 4. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ VE SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ENTERPOLASYON

Belli noktalarda belirlenmiş olan bir fonksiyonun bilinmeyen noktalarındaki değerinin hesabı için sonlu farklar yöntemi kullanılabilir. Belli bir aralıkta verilen $f_{(x)}$ fonksiyonunun h basamaklı ileri, geri ve merkezi sonlu farklar yöntemine göre çözümleri oluşturulan bir katsayılar tablosu yardımıyla yapılabilmektedir.

### 1. İleri Yön Sonlu Farklar Yöntemi ve Enterpolasyon:



$$
\left.
\begin{array}{l}
\Delta Y_0 = Y_1 - Y_0 \\
\Delta Y_1 = Y_2 - Y_1 \\
. \\
. \\
\Delta Y_m = Y_{m+1} - Y_m
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\Delta^2 Y_0 = \Delta(\Delta Y_0) = \Delta(Y_1 - Y_0) = \Delta Y_1 - \Delta Y_0 = Y_2 - Y_1 - (Y_1 - Y_0) = Y_2 - 2Y_1 + Y_0 \\
\Delta^3 Y_0 = \Delta(\Delta^2 Y_0) = \Delta(Y_2 - 2Y_1 + Y_0) = Y_3 - 3Y_2 + 3Y_1 - Y_0 \\
. \\
. \\
\Delta^n Y_0 = \Delta(\Delta^{n-1} Y_0) = \Delta^{n-1} Y_1 - \Delta^{n-1} Y_0
\end{array}
$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{h} \cong \frac{\Delta y}{h}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cong \frac{\Delta^2 y}{h^2}$$

**Örnek :** $y_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤5 aralığı için ileri yön sonlu farklar tablosunu hesaplayınız.

| **X** | **Y** | **$\Delta Y$** | **$\Delta^2 Y$** | **$\Delta^3 Y$** | **$\Delta^4 Y$** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 | 7 | 26 | 30 | 0 |
| **1** | 1 | 33 | 56 | 30 | 0 |
| **2** | 34 | 89 | 86 | 30 | |
| **3** | 123 | 175 | 116 | | |
| **4** | 298 | 291 | | | |
| **5** | 589 | | | | |

Sabit terimler çıktı. Denklemin derecesi 3'dür.

- **İleri Yön Sonlu Farklar Yöntemi İle Enterpolasyon (Gregory-Newton Enterpolasyon Bağıntıları)**

$$
\left.
\begin{array}{l}
\Delta Y_0 = Y_1 - Y_0 \\
\Delta Y_1 = Y_2 - Y_1 \\
\Delta Y_2 = Y_3 - Y_2 \\
. \\
\Delta Y_m = Y_{m+1} - Y_m
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
Y_1 = Y_0 + \Delta Y_0 = (1+\Delta)Y_0 \\
Y_2 = Y_1 + \Delta Y_1 = (1+\Delta)Y_1 = (1+\Delta)^2 Y_0 \\
Y_3 = Y_2 + \Delta Y_2 = (1+\Delta)Y_2 = (1+\Delta)^3 Y_0 \\
\\
Y_{m+1} = Y_m + \Delta Y_m = (1+\Delta)Y_m = (1+\Delta)^{m+1} Y_0
\end{array}
$$

$$Y_p = (1+\Delta)^p Y_0 \qquad 0 \le |p| \le 1$$

$$Y_p = Y_0 + \frac{p}{1!}\Delta Y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + .........$$

**Örnek :** $y_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤5 aralığı için ileri yön sonlu farklar tablosundan x=0.3 ise y'yi

hesaplayınız.

| X | Y | ΔY | $\Delta^2$Y | $\Delta^3$Y | $\Delta^4$Y |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 $=Y_0$ | 7 $=\Delta Y_0$ | 26$=\Delta^2 Y_0$ | 30 $=\Delta^3 Y_0$ | 0 $=\Delta^4 Y_0$ |
| **1** | 1 | 33 | 56 | 30 | 0 |
| **2** | 34 | 89 | 86 | 30 | |
| **3** | 123 | 175 | 116 | | |
| **4** | 298 | 291 | | | |
| **5** | 589 | | | | |

$$p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.3 - 0}{1} = 0.3$$

$$Y_p = Y_0 + \frac{p}{1!}\Delta Y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}\Delta^4 Y_0$$

$$Y_p = -6 + 0.3 * 7 + \frac{0.3}{2} * (-0.7) * 26 + \frac{0.3}{6} * (-0.7) * (-1.7) * 30 + \frac{0.3}{24} * (-0.7) * (-1.7) * (-2.7) * 0$$

$$Y_p = -4.845$$

**Örnek :** $y_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤5 aralığı için ileri yön sonlu farklar tablosundan x=0.8 ise y'yi hesaplayınız.

| X | Y | ΔY | $\Delta^2$Y | $\Delta^3$Y | $\Delta^4$Y |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 | 7 | 26 | 30 | 0 |
| **1** | 1 $=Y_0$ | 33$=\Delta Y_0$ | 56$=\Delta^2 Y_0$ | 30 $=\Delta^3 Y_0$ | 0 $=\Delta^4 Y_0$ |
| **2** | 34 | 89 | 86 | 30 | |
| **3** | 123 | 175 | 116 | | |
| **4** | 298 | 291 | | | |
| **5** | 589 | | | | |

$$p = \frac{0.8 - 1}{h} = -0.2$$

$$Y_p = Y_0 + \frac{p}{1!}\Delta Y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 Y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}\Delta^4 Y_0$$

$$Y_p = 1 + (-0.2)*33 + \frac{(-0.2)}{2}*(-1.2)*56 + \frac{(-0.2)}{6}*(-1.2)*(-2.2)*30 + \frac{(-0.2)}{24}*(-1.2)*(-2.2)*(-3.2)*0$$

$$Y_p = -1.52$$

**Örnek :** $y_{(x)} = x^3 - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤6 aralığı için ileri yön sonlu farklar tablosundan x=0.3 ve x=1.8 ise y'yi hesaplayınız.

| **X** | **Y** | **ΔY** | **$\Delta^2$Y** | **$\Delta^3$Y** | **$\Delta^4$Y** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 | 1 | 6 | 6 | 0 |
| **1** | -5 | 7 | 12 | 6 | 0 |
| **2** | 2 | 19 | 18 | 6 | 0 |
| **3** | 21 | 37 | 24 | 6 | |
| **4** | 58 | 61 | 30 | | |
| **5** | 119 | 91 | | | |
| **6** | 210 | | | | |

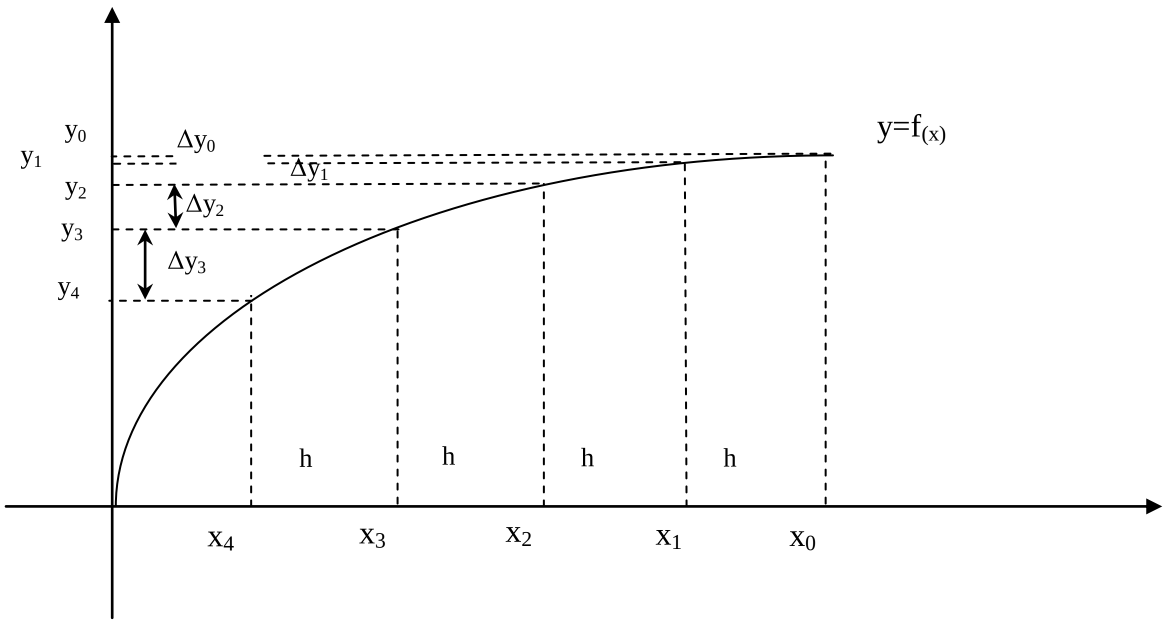
$$p = \frac{0.3 - 0}{h} = 0.3$$

$$Y_p = -5.973$$

$$p = \frac{1.8 - 2}{h} = -0.2$$

$$Y_p = -0.168$$

- **Geri Yön Sonlu Farklar Yöntemi :**




$$\left.\begin{aligned}
&\nabla Y_0 = Y_1 - Y_0\\
&\nabla Y_1 = Y_2 - Y_1\\
&.\\
&.\\
&\nabla Y_m = Y_{m+1} - Y_m
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&\nabla^2 Y_0 = \nabla(\nabla Y_0) = \nabla(Y_1 - Y_0) = \nabla Y_1 - \nabla Y_0 = Y_2 - Y_1 - (Y_1 - Y_0) = Y_2 - 2Y_1 + Y_0\\
&\nabla^3 Y_0 = \nabla(\nabla^2 Y_0) = \nabla(Y_2 - 2Y_1 + Y_0) = Y_3 - 3Y_2 + 3Y_1 - Y_0\\
&.\\
&.\\
&\nabla^n Y_0 = \nabla(\nabla^{n-1} Y_0) = \nabla^{n-1} Y_1 - \nabla^{n-1} Y_0
\end{aligned}$$

**Örnek :** $y_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤5 aralığı için geri yön sonlu farklar tablosunu hesaplayınız.

| X | Y | $\nabla Y$ | $\nabla^2 Y$ | $\nabla^3 Y$ | $\nabla^4 Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 | | | | |
| **1** | 1 | 7 | | | |
| **2** | 34 | 33 | 26 | | |
| **3** | 123 | 89 | 56 | 30 | |
| **4** | 298 | 175 | 86 | 30 | 0 |
| **5** | 589 | 291 | 116 | 30 | 0 |

- **Geri Yön Sonlu Farklar Yöntemi İle Enterpolasyon (Gregory-Newton Enterpolasyon Bağıntıları)**

$$Y_p = (1-\nabla)^{-p} Y_0 \qquad 0 \le |p| \le 1$$

$$Y_p = Y_0 + \frac{p}{1!}\nabla Y_0 + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 Y_0 + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\nabla^3 Y_0 + .........$$

**Örnek :** $y_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤5 aralığı için geri yön sonlu farklar tablosundan x=4.3 ise y'yi hesaplayınız.

| X | Y | ▼Y | ▼²Y | ▼³Y | ▼⁴Y |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 | | | | |
| **1** | 1 | 7 | | | |
| **2** | 34 | 33 | 26 | | |
| **3** | 123 | 89 | 56 | 30 | |
| **4** | 298 | 175 | 86 | 30 | 0 |
| **5** | 589 | 291 | 116 | 30 | 0 |

$$p = \frac{4.3 - 4}{h} = 0.3$$

$$Y_p = Y_0 + \frac{p}{1!}\nabla Y_0 + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 Y_0 + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\Delta^3 Y_0 + \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{4!}\Delta^4 Y_0$$

$$Y_p = 298 + (0.3)*175 + \frac{0.3*1.3}{2}*86 + \frac{0.3*1.3*2.3}{6}*30 + \frac{0.3*1.3*2.3*3.3}{24}*0$$

$$Y_p = 371.755$$

**Örnek :** $y_{(x)} = x^3 - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤6 aralığı için geri yön sonlu farklar tablosundan x=5.4 ve x=4.5 ise y'yi hesaplayınız.

| **X** | **Y** | **ΔY** | **$\Delta^2$Y** | **$\Delta^3$Y** | **$\Delta^4$Y** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 | | | | |
| **1** | -5 | 1 | | | |
| **2** | 2 | 7 | 6 | | |
| **3** | 21 | 19 | 12 | 6 | |
| **4** | 58 | 37 | 18 | 6 | 0 |
| **5** | 119 | 61 | 24 | 6 | 0 |
| **6** | 210 | 91 | 30 | 6 | 0 |

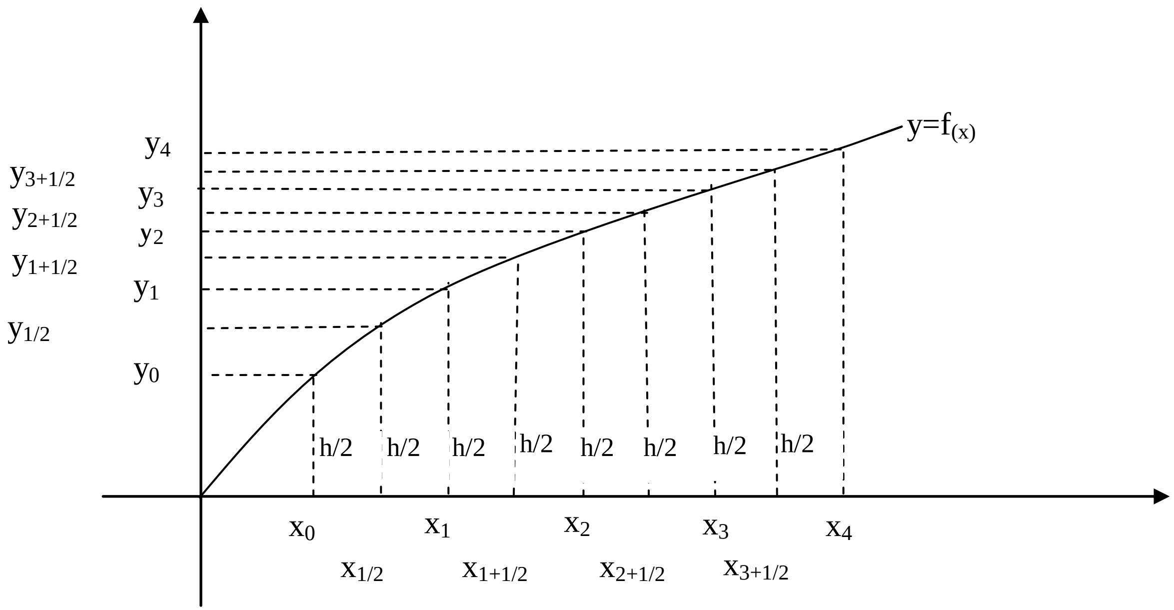
$$p = \frac{5.4 - 5}{h} = 0.4$$

$$Y_p = 151.464$$

$$p = \frac{4.5 - 5}{h} = -0.5$$

$$Y_p = 85.125$$

- **Merkezi Sonlu Farklar Yöntemi :**




$$
\left.
\begin{array}{l}
\delta Y_0 = Y_1 - Y_0 \\
\delta Y_1 = Y_2 - Y_1 \\
. \\
. \\
\delta Y_m = Y_{m+1} - Y_m
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\delta^2 Y_0 = \delta(\delta Y_0) = \delta(Y_1 - Y_0) = \delta Y_1 - \delta Y_0 = Y_2 - Y_1 - (Y_1 - Y_0) = Y_2 - 2Y_1 + Y_0 \\
\delta^3 Y_0 = \delta(\delta^2 Y_0) = \delta(Y_2 - 2Y_1 + Y_0) = Y_3 - 3Y_2 + 3Y_1 - Y_0 \\
. \\
. \\
\delta^n Y_0 = \delta(\delta^{n-1} Y_0) = \delta^{n-1} Y_1 - \delta^{n-1} Y_0
\end{array}
$$

**Örnek :** $y_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤5 aralığı için ileri yön sonlu farklar tablosunu hesaplayınız.

| **X** | **Y** | **ΔY** | **$\Delta^2$Y** | **$\Delta^3$Y** | **$\Delta^4$Y** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -6 | | | | |
| | | 7 | | | |
| 1 | 1 | | 26 | | |
| | | 33 | | 30 | |
| 2 | 34 | | 56 | | 0 |
| | | 89 | | 30 | |
| 3 | 123 | | 86 | | 0 |
| | | 175 | | 30 | |
| 4 | 298 | | 116 | | |
| | | 291 | | | |
| 5 | 589 | | | | |

- **Merkezi Sonlu Farklar Yöntemi İle Enterpolasyon (Bessel Bağıntısı)**

$$Y_p = \left(\frac{Y_0 + Y_1}{2}\right) + \frac{(p - 0.5)}{1!}\delta Y_{1/2} + \frac{p(p-1)}{2!}\left(\frac{\delta^2 Y_0 + \delta^2 Y_1}{2}\right) + \frac{p(p-0.5)(p-1)}{3!}\delta^3 Y_{1/2} + \dots\dots\dots$$

**Örnek :** $y_{(x)} = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤5 aralığı için geri yön sonlu farklar tablosundan x=2.3 ise y'yi hesaplayınız.

| X | Y | ΔY | $\Delta^2Y$ | $\Delta^3Y$ | $\Delta^4Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -6 | | | | |
| | | 7 | | | |
| 1 | 1 | | 26 | | |
| | | 33 | | 30 | |
| 2 | 34 | | 56 | | 0 |
| | | 89 | | 30 | |
| 3 | 123 | | 86 | | 0 |
| | | 175 | | 30 | |
| 4 | 298 | | 116 | | |
| | | 291 | | | |
| 5 | 589 | | | | |

$$p = \frac{2.3 - 2}{h} = 0.3$$

$$Y_p = \left(\frac{Y_0 + Y_1}{2}\right) + \frac{(p - 0.5)}{1!}\delta Y_{1/2} + \frac{p(p-1)}{2!}\left(\frac{\delta^2 Y_0 + \delta^2 Y_1}{2}\right) + \frac{p(p-0.5)(p-1)}{3!}\delta^3 Y_{1/2}$$

$$Y_p = \left(\frac{34+123}{2}\right) + \frac{(0.3-0.5)}{1} * 89 + \frac{0.3*(-0.7)}{2} * \left(\frac{56+86}{2}\right) + \frac{0.3*(-0.2)*(-0.7)}{6} * 30$$

$$Y_p = 53.455$$

**Örnek :** $y_{(x)} = x^3 - 6$ fonksiyonunun h=1 ve 0≤x≤6 aralığı için geri yön sonlu farklar tablosundan x=3.6 ve x=4.2 ise y'yi hesaplayınız.

| X | Y | ΔY | $\Delta^2$Y | $\Delta^3$Y | $\Delta^4$Y |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | -6 | | | | |
| **1** | -5 | 1 | | | |
| **2** | 2 | 7 | 6 | | |
| **3** | 21 | 19 | 12 | 6 | |
| **4** | 58 | 37 | 18 | 6 | 0 |
| **5** | 119 | 61 | 24 | 6 | 0 |
| **6** | 210 | 91 | 30 | 6 | 0 |

$$p = \frac{3.6-4}{h} = 0.6$$

$$Y_p = 40.656$$

$$p = \frac{4.2-4}{h} = 0.2$$

$$Y_p = 68.088$$