

Matrisin Tersinin Hesabı Yöntemleri

- **Kramer Kuralı :** A matrisinin tersi $A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$ şeklinde hesaplanır. Bu yöntem fazla hesap gerektirdiği için 2

ve 3 boyutlu matrislerin tersinin hesabında kullanılır.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1, \text{ Adj } A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = 1 \cdot (-48) + 2 \cdot 42 + 3 \cdot (-3) = 27$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Kof } A = \begin{bmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

• **Gauss-Jordan Yöntemine Göre :** Bu yöntemde tersi alınacak A matrisinin yanına birim matris yazılır ve yapılan işlemlerle A matrisi birim matris yapılmaya çalışılır. A matrisi birim matris olduğunda diğer matris A^{-1} matrisidir.

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0.429 & -0.429 & 0.143 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.429 & -0.429 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0 & 0.571 & -0.429 & 0.143 & 1 & 0 \\ 0 & -0.429 & 0.571 & 0.143 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.429 & -0.429 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.751 & 0.250 & 1.751 & 0 \\ 0 & -0.429 & 0.571 & 0.143 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.429 & -0.429 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.751 & 0.250 & 1.751 & 0 \\ 0 & 0 & 0.249 & 0.250 & 0.751 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.429 & -0.429 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.751 & 0.250 & 1.751 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3.016 & 4.016 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.429 & 0 & 0.572 & 1.294 & 1.723 \\ 0 & 1 & 0 & 1.001 & 4.016 & 3.016 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3.016 & 4.016 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.001 & 3.017 & 3.019 \\ 0 & 1 & 0 & 1.001 & 4.016 & 3.016 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3.016 & 4.016 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

II. Yol

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7x - 3y - 3z = 1 \\ -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}, \quad \left. \begin{array}{l} 7x - 3y - 3z = 0 \\ -x + y = 1 \\ -x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{array}, \quad \left. \begin{array}{l} 7x - 3y - 3z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -x + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

• **Cholesky Yöntemi** : Bu yöntemle pozitif tanımlı simetrik matrislerin tersi alınabilmektedir. Çözüm için A matrisi birbirinin transpozesi olan B matrisine ayrılır.

$$A = B^T B$$

$$A^{-1} = B^{-1} (B^T)^{-1} = B^{-1} (B^{-1})^T$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = b_{11}^2 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = b_{11} \cdot b_{12} \Rightarrow b_{12} = a_{12} / b_{11}, \dots, b_{1n} = a_{1n} / b_{11} \left\} b_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\left. \begin{aligned} a_{22} &= b_{12}^2 + b_{22}^2 \Rightarrow b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{12}^2}, \dots, \\ a_{nn} &= \sqrt{a_{nn} - b_{1n}^2 - b_{2n}^2 - \dots - b_{(n-1)n}^2} \end{aligned} \right\} b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}^2} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\left. \begin{aligned} a_{23} &= b_{12} \cdot b_{13} + b_{22} \cdot b_{23} \Rightarrow b_{23} = (a_{23} - b_{12} \cdot b_{13}) / b_{22}, \dots, \\ b_{(n-1)n} &= (a_{(n-1)n} - b_{1(n-1)} \cdot b_{1n} - \dots - b_{(n-2)(n-1)} \cdot b_{(n-1)n}) / b_{(n-1)(n-1)} \end{aligned} \right\} b_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} \cdot b_{kj} \right) / b_{ii} \quad \begin{aligned} i &= 2, 3, \dots, n-1 \\ j &= i+1, i+2, \dots, n \end{aligned}$$

$T=B^{-1}$ hesaplanır ve $A^{-1}=B^{-1}(B^{-1})^T$ matrisi hesaplanır.

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow b_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2, \quad b_{12} = a_{12} / b_{11} = 3, \quad b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{12}^2} = 4$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B \cdot T = E \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.375 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = B^{-1} (B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0.39 & -0.09 \\ -0.09 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 12 & -4 \\ 8 & 5 & 11 & -4 \\ 12 & 11 & 70 & -31 \\ -4 & -4 & -31 & 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_{11} = 4 & b_{22} = 1 & b_{33} = 6 & b_{44} = 7 \\ b_{12} = 2 & b_{23} = 5 & b_{34} = -3 \\ b_{13} = 3 & b_{24} = -2 \\ b_{14} = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ 0 & 0 & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} t_{11} = 0.25 & t_{22} = 1 & t_{33} = 0.167 & t_{44} = 0.143 \\ t_{12} = -0.5 & t_{23} = -0.833 & t_{34} = 0.071 \\ t_{13} = 0.292 & t_{24} = -0.071 \\ t_{14} = 0.018 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.398 & -0.744 & 0.050 & 0.002 \\ -0.744 & 1.699 & -0.144 & -0.010 \\ 0.050 & -0.144 & 0.033 & 0.010 \\ 0.002 & -0.010 & 0.010 & 0.020 \end{bmatrix}$$

- Direk Yöntemle Ters Matris Hesabı:

Her köşegen k elemanı için; köşegenin satır ve sütunu dışındaki elemanlar için;

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{kj}}{a_{kk}} \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$$

k. köşegenin satır ve sütunundaki elemanlar için;

$$a_{kk} = -\frac{1}{a_{kk}} ;$$

$$a_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{kk}}; \quad i= 1,2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$$

$$a_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad j= 1,2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$$

Yazılır ve her köşegen için bu işlem tekrarlanırsa ters matrisin ters işaretlisi elde edilir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini direk yöntemle bulunuz.

K=1

köşegen eleman için; $a_{11} = -\frac{1}{a_{11}} = -\frac{1}{2} = -0.5$

k'nın satır ve sütunundaki elemanlar için; $a_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{5}{2} = -2.5$

$$a_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

k'nın satır ve sütununda olmayan elemanlar için; $a_{22} = a_{22} - \frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}} = 8 - \frac{3 \cdot 5}{2} = 0.5$

k=1 için sonuç; $A = \begin{bmatrix} -0.5 & -2.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ olur.

K=2

köşegen eleman için; $a_{22} = -\frac{1}{0.5} = -2$

k'nın satır ve sütunundaki elemanlar için; $a_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{-2.5}{0.5} = 5$

$$a_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{-1.5}{0.5} = 3$$

k'nın satır ve sütununda olmayan elemanlar için; $a_{11} = a_{11} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{22}} = -0.5 - \frac{-2.5 \cdot -1.5}{0.5} = -8$

k=2 için sonuç; $A = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ve $A^{-1} = -\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ olur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini direk yöntemle bulunuz.

K=1

köşegen eleman için; $a_{11} = -\frac{1}{a_{kk}} = -\frac{1}{7} = -0.143$

k'nın satır ve sütunundaki elemanlar için; $a_{12} = 0.429$ $a_{13} = 0.429$
 $a_{21} = 0.143$ $a_{31} = 0.143$

k'nın satır ve sütununda olmayan elemanlar için; $a_{22} = a_{22} - \frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}} = 0.571$; $a_{23} = a_{23} - \frac{a_{21} \cdot a_{13}}{a_{11}} = -0.429$
 $a_{32} = a_{32} - \frac{a_{31} \cdot a_{12}}{a_{11}} = -0.429$; $a_{33} = a_{33} - \frac{a_{31} \cdot a_{13}}{a_{11}} = 0.571$

k=1 için sonuç; $A = \begin{bmatrix} -0.143 & 0.429 & 0.429 \\ 0.143 & 0.571 & -0.429 \\ 0.143 & -0.429 & 0.571 \end{bmatrix}$ olur.

K=2

köşegen eleman için; $a_{22} = -\frac{1}{a_{22}} = -1.751$

k'nın satır ve sütunundaki elemanlar için; $a_{12} = -0.751$ $a_{32} = 0.751$
 $a_{21} = -0.250$ $a_{23} = 0.751$

k'nın satır ve sütununda olmayan elemanlar için; $a_{11} = a_{11} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{22}} = -0.250$; $a_{13} = a_{13} - \frac{a_{12} \cdot a_{23}}{a_{22}} = 0.751$

$$a_{31} = a_{31} - \frac{a_{32} * a_{21}}{a_{22}} = 0.250 ; a_{33} = a_{33} - \frac{a_{32} * a_{23}}{a_{22}} = 0.249$$

k=2 için sonuç; $A = \begin{bmatrix} -0.250 & -0.751 & 0.751 \\ -0.250 & -1.751 & 0.751 \\ 0.250 & 0.751 & 0.249 \end{bmatrix}$

K=3

köşegen eleman için; $a_{33} = -\frac{1}{a_{33}} = -4.016$

k'nın satır ve sütunundaki elemanlar için; $a_{13} = -3.016$ $a_{23} = -3.016$
 $a_{31} = -1.004$ $a_{32} = -3.016$

k'nın satır ve sütununda olmayan elemanlar için; $a_{11} = a_{11} - \frac{a_{13} * a_{31}}{a_{33}} = -1.004$; $a_{12} = a_{12} - \frac{a_{13} * a_{32}}{a_{33}} = -3.016$

$$a_{21} = a_{21} - \frac{a_{23} * a_{31}}{a_{33}} = -1.004 ; a_{22} = a_{22} - \frac{a_{23} * a_{32}}{a_{33}} = -4.016$$

k=3 için sonuç; $A = \begin{bmatrix} -1.004 & -3.016 & -3.016 \\ -1.004 & -4.016 & -3.016 \\ -1.004 & -3.016 & -4.016 \end{bmatrix} A^{-1} = -\begin{bmatrix} -1.004 & -3.016 & -3.016 \\ -1.004 & -4.016 & -3.016 \\ -1.004 & -3.016 & -4.016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.004 & 3.016 & 3.016 \\ 1.004 & 4.016 & 3.016 \\ 1.004 & 3.016 & 4.016 \end{bmatrix}$

- Gauss Yöntemi İle Ters Matris Hesabı: A matrisi Köşegeni 1 olan alt üçgen matris C ve üst üçgen matris B'nin çarpımı olacak şekilde iki matrise ayrılırsa;

$$A = C * B; A^{-1} = (C * B)^{-1} = B^{-1} * C^{-1} \text{ olur}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ c_{12} & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \dots, a_{1n} = b_{1n}$$

$$a_{21} = c_{21} * b_{11} \text{ ise } c_{21} = a_{21} / b_{11} \dots\dots\dots$$

$$T = B^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdot & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdot & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & t_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = C^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ c_{12} & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ s_{12} & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{1n} & s_{2n} & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = T * S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & -0.5 \\ 5 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -1.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$