

- **Müller Yöntemi** : Bu yöntemde $f_{(x)}$ fonksiyonunun köklerini bulmak için verilen x_0 , x_1 ve x_2 değerleri ve hesaplanan $y_0 = f_{(x_0)}$, $y_1 = f_{(x_1)}$ ve $y_2 = f_{(x_2)}$ değerleriyle bu noktalardan $P_{(x)} = ax^2 + bx + c$ ikinci derece polinomu geçirilir. Polinomda x değeri değiştirilerek $P_{(x)}$ polinomunun $y = f_{(x)}$ fonksiyonu ile çakışması sağlanır. Yazılan polinomda a , b , c katsayıları hesaplanır. $P_{(x)} = ax^2 + bx + c$ şekline gelir. $P_{(x)} = 0$ kökünü bulmak için $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ çözümü yapılır. Δx değerinin min. olması için $\pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}$ değerinin min. olması gerekir. min. olan x değeri bulunur ve işleme istenilen mutlak değere ulaşıncaya kadar devam edilir.

Örnek : $f_{(x)} = x^3 - 3.7x^2 + 6.25x - 4.069$ fonksiyonunun $x_0=1$, $x_1=1.25$ ve $x_2=1.5$ değerlerine göre kökü $\varepsilon = 0.005$ için nedir?

$x_{(i)}$	$y=f_{(x)}$
1,000	-0,519
1,250	-0,085
1,500	0,356

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = -0.519 \\ 1.563.a + 1.25.b + c = -0.085 \\ 2.25.a + 1.5.b + c = 0.356 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 0.05 \\ b = 1.625 \\ c = -2.194 \end{array}$$

$0.05 \cdot x^2 + 1.625 \cdot x - 2.194 = 0 \Rightarrow x_1 = 1.298 \quad x_2 = -33.798$ bulunur. Buradan x_1 değeri fonksiyonu min. yapan değerdir.

İşlem $x_0=1.25$, $x_1=1.298$ ve $x_2=1.5$ değerleriyle tekrarlanır.

$x_{(i)}$	$y=f_{(x)}$
1,250	-0,085
1,298	-0,003
1,500	0,356

$$a=0,348$$

$$b=0,806$$

$$c=-1.635$$

$$0348.x^2 + 0,806.x - 1,635 = 0 \Rightarrow x_1 = 1.300 \quad x_2 = -3.615 \quad \varepsilon = 1.298 - 1.300 = -0.002$$

$$X=1.3$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümü

- **Basit İterasyon Yöntemi** : Bu çözümde,

$$\left. \begin{array}{l} f_{1(x,y,z,\dots,u)} = 0 \\ f_{2(x,y,z,\dots,u)} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{u(x,y,z,\dots,u)} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = g_{1(x,y,z,\dots,u)} \\ y = g_{2(x,y,z,\dots,u)} \\ \cdot \\ \cdot \\ u = g_{u(x,y,z,\dots,u)} \end{array}$$

şeklinde yazılır ve x_0, y_0, \dots, u_0 değerleriyle iteratif olarak çözüm yapılır.

Örnek :

$$x^2 + \sin y - 9.2 = 0$$

$\ln x + y + x \cdot y - 1.9 = 0$ fonksiyonlarının $x_0 = 2.5, y_0 = 0$ için $\varepsilon = 0.005$ hata ile kökleri nedir?

$$x = (9.2 - \sin y)^{1/2}$$

$$y = \frac{1.9 - \ln x - y}{x}$$

x_i	y_i	Fark x	Fark y
2,5	0		
3,033	0,261	0,533	0,261
2,990	0,182	-0,043	-0,079
3,003	0,206	0,013	0,024
2,999	0,199	-0,004	-0,007
3,000	0,201	0,001	0,002

- **Newton-Raphson Yöntemi** : Bilinmeyenlerin yaklaşık değerleriyle denklemler Taylor serine açılır ve 2. ve

daha yüksek dereceli terimler ihmal edilerek doğrusallaştırma yapılırsa;

$$\left. \begin{array}{l} f_{1(x,y,z,\dots,u)} = 0 \\ f_{2(x,y,z,\dots,u)} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{u(x,y,z,\dots,u)} = 0 \end{array} \right\} x_0, y_0, \dots, u_0 \text{ ile } \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial x_0} & \frac{\partial f_{1(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial f_{1(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial u_0} \\ \frac{\partial f_{2(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial x_0} & \frac{\partial f_{2(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial f_{2(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial u_0} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_{u(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial x_0} & \frac{\partial f_{u(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial f_{u(x_0,y_0,z_0,\dots,u_0)}}{\partial u_0} \end{bmatrix} = A \quad X = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ \cdot \\ d_u \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f_{1(x_0,y_0,\dots,u_0)} \\ f_{2(x_0,y_0,\dots,u_0)} \\ \cdot \\ f_{u(x_0,y_0,\dots,u_0)} \end{bmatrix}$$

A.X-b=0 eşitliğinden d_x, d_y, \dots, d_u değerleri bulunur. $x=x_0+d_x, y=y_0+d_y, \dots, u=u_0+d_u$ hesaplanır.

Örnek :

$$x^2 - x + y^3 = 0$$

$3xy^2 + \cos y = 0$ eşitliklerinin $x_0 = -0.1$ ve $y_0 = -0.5$ için $\varepsilon = 0.005$ hata ile kökleri nedir?

$$\begin{bmatrix} 2x-1 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy - \sin y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - x + y^3 \\ 3xy^2 + \cos y \end{bmatrix}$$

X	Y	A Matrisi		b Vektörü		
-0,10000	-0,50000	-1,20000	0,75000	0,01500		
		0,75000	0,77943	-0,80258		
		A^{-1} Matrisi		d_x, d_y	X_i	Bağıl Hata
		-0,52038	0,50073	-0,40968	-0,50968	0,80380
		0,50073	0,80117	-0,63549	-1,13549	0,55966
		A Matrisi		b Vektörü		
-0,50968	-1,13549	-2,01937	3,86804	0,69458		
		3,86804	4,37920	1,54979		
		A^{-1} Matrisi		d_x, d_y	X_i	Bağıl Hata
		-0,18396	0,16249	0,12405	-0,38564	-0,32167
		0,16249	0,08483	0,24433	-0,89116	-0,27417
		A Matrisi		b Vektörü		
-0,38564	-0,89116	-1,77127	2,38251	0,17338		
		2,38251	2,83979	0,29028		
		A^{-1} Matrisi		d_x, d_y	X_i	Bağıl Hata
		-0,26524	0,22253	0,01861	-0,36703	-0,05070
		0,22253	0,16544	0,08661	-0,80456	-0,10765
		A Matrisi		b Vektörü		
-0,36703	-0,80456	-1,73406	1,94193	0,01906		
		1,94193	2,49230	0,01932		
		A^{-1} Matrisi		d_x, d_y	X_i	Bağıl Hata
		-0,30796	0,23996	-0,00123	-0,36826	0,00335
		0,23996	0,21427	0,00871	-0,79584	-0,01095
		A Matrisi		b Vektörü		
-0,36826	-0,79584	-1,73653	1,90011	0,00018		
		1,90011	2,47294	0,00006		
		A^{-1} Matrisi		d_x, d_y	X_i	Bağıl Hata
		-0,31284	0,24038	-0,00004	-0,36831	0,00012
		0,24038	0,21968	0,00006	-0,79579	-0,00007

Örnek :

$$x^3+2y^2-3xy^2-2x^2-11x-69=0$$

$-y^3+3x^2y-4xy-11y=0$ eşitliklerinin $x_0=-1.5$ ve $y_0=-2.5$ için $\varepsilon = 0.005$ hata ile kökleri nedir?

$$\begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 - 4x - 11 & 4y - 6xy \\ 6xy - 4 & 3x^2 - 3y^2 - 4x - 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + 2y^2 - 3xy^2 - 2x^2 - 11x - 69 \\ -y^3 + 3x^2y - 4xy - 11y \end{bmatrix}$$

X	Y	A Matrisi		b Vektörü		
-1,50000	-2,50000	-17,00000	-32,50000	19,75000		
		18,50000	-17,00000	-11,25000		
		A ⁻¹ Matrisi		d _x ,d _y	X _i	Bağıl Hata
		-0,01910	0,03651	-0,78784	-2,28784	0,34436
		-0,02078	-0,01910	-0,19559	-2,69559	0,07256
		A Matrisi		b Vektörü		
-2,28784	-2,69559	-7,94463	-47,78486	1,87301		
		33,00250	-7,94463	17,75800		
		A ⁻¹ Matrisi		d _x ,d _y	X _i	Bağıl Hata
		-0,00484	0,02913	0,50830	-1,77954	-0,28564
		-0,02012	-0,00484	-0,12371	-2,81930	0,04388
		A Matrisi		b Vektörü		
-1,77954	-2,81930	-18,22687	-41,37949	3,06342		
		26,10230	-18,22687	-6,56895		
		A ⁻¹ Matrisi		d _x ,d _y	X _i	Bağıl Hata
		-0,01291	0,02930	-0,23200	-2,01154	0,11533
		-0,01848	-0,01291	0,02816	-2,79114	-0,01009
		A Matrisi		b Vektörü		
-2,01154	-2,79114	-14,18635	-44,85145	0,51161		
		29,68689	-14,18635	3,89241		
		A ⁻¹ Matrisi		d _x ,d _y	X _i	Bağıl Hata
		-0,00926	0,02926	0,10916	-1,90237	-0,05738
		-0,01937	-0,00926	-0,04594	-2,83707	0,01619

		A Matrisi		b Vektörü		
-1,9024	-2,8371	-16,68039	-43,73134	0,162161		
		28,38305	-16,68039	-1,652348		
		A ⁻¹ Matrisi		dx,dy	Xi	Bağıl Hata
		-0,010978	0,028781	-0,049336	-1,95171	0,025278
		-0,01868	-0,010978	0,01511	-2,821964	-0,005354
		A Matrisi		b Vektörü		
-1,9517	-2,822	-15,65608	-44,33378	0,029776		
		29,04593	-15,65608	0,7644		
		A ⁻¹ Matrisi		dx,dy	Xi	Bağıl Hata
		-0,010214	0,028923	0,021804	-1,929905	-0,011298
		-0,018949	-0,010214	-0,008372	-2,830335	0,002958
		A Matrisi		b Vektörü		
-1,9299	-2,8303	-16,13917	-44,09502	0,006269		
		28,77368	-16,13917	-0,332769		
		A ⁻¹ Matrisi		dx,dy	Xi	Bağıl Hata
		-0,010554	0,028834	-0,009661	-1,939567	0,004981
		-0,018816	-0,010554	0,003394	-2,826941	-0,001201