

1. SAYILAR

Sayılar rakamda denilen işaretlerle belli büyüklükleri gösteren ifadelerdir. Günümüzde hesaplama işlemleri için arap harfleri de denilen 10'luk sayı sistemleri ile yapılmaktadır.

10'luk sayı sisteminde sayılar çeşitli şekillerde sınıflandırılabilirler.

- Tek sayılar : 1,3,5,7,.....
- Çift sayılar : 2,4,6,8,.....
- Pozitif sayılar : +2,+5,+12,.....
- Negatif sayılar : -3,-5,-11,-25,.....
- Tam-kesirli sayılar,
- Reel-imaginel sayılar,
- Rasyonel-irrasyonel sayılar v.s.

10'luk sayı sisteminde çok büyük ve çok küçük sayıların üstel fonksiyonlarla gösterilmesi daha pratik ve kolaydır. 10^3 , 10^{-5} v.b.

SAYI SİSTEMLERİ

Sayılar belli bir tabana göre gösterilirler. Herhangi bir B tabanlı sayı sistemi

$$(S_B) = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0, K_1 K_2 K_3 \dots K_{m-1} K_m$$

şeklinde gösterilir Burada T_i tamsayı kısmındaki basamakları, K_j kesir kısmındaki basamakları gösterir ve

$$0 \leq T_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$K_j \leq B-1 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

şeklindedir. B tabanlı sayı sistemindeki sayının değeri aşağıdaki eşitlikle bulunur.

$$(S)_B = \sum_{i=0}^n T_i B^i + \sum_{j=1}^m K_j B^{-j}$$

B Tabanlı Sayının Özellikleri

- En küçük rakam = 0
- En büyük rakam = B-1
- Rakam sayısı = B
- k basamağına yazılabilecek en büyük sayı = $B^k - 1$
- k basamağına yazılabilecek değişik sayıların sayısı = B^k

- **10'luk (Desimal) Sayı Sistemi**

10'luk sayı sisteminde bir sayının yazılışı ve değerinin hesabı şu şekildedir.

$$(S)_{10} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0 , K_1 K_2 K_3 \dots K_{m-1} K_m$$

$$0 \leq T_i \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

$$K_j \leq 10-1=9 \quad j = 1,2,3,\dots,m$$

$$(S)_{10} = \sum_{i=0}^n T_i 10^i + \sum_{j=1}^m K_j 10^{-j}$$

10 Tabanlı Sayının Özellikleri

- En küçük rakam = 0
- En büyük rakam = 10-1=9
- Rakam sayısı = 10 Rakamlar : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- k basamağına yazılabilecek en büyük sayı = 10^k-1
- k basamağına yazılabilecek değişik sayıların sayısı = 10^k

ÖRNEK :

$$(1365.27)_{10} = 1*10^{+3}+3*10^{+2}+6*10^{+1}+5*10^{+0}+2*10^{-1}+7*10^{-2}$$

$$(1365.27)_{10} = 1000 + 300 + 60 + 5 + 0.2 + 0.07 = 1365.27$$

- **2 Tabanlı (Binary) Sayı Sistemi**

2 tabanlı sayı sisteminde bir sayının yazılışı ve değerinin hesabı şu şekildedir.

$$(S)_2 = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0, K_1 K_2 K_3 \dots K_{m-1} K_m$$

$$0 \leq T_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$K_j \leq 2-1=1 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$(S)_2 = \sum_{i=0}^n T_i 2^i + \sum_{j=1}^m K_j 2^{-j}$$

2 Tabanlı Sayının Özellikleri

- En küçük rakam = 0
- En büyük rakam = 2-1=1
- Rakam sayısı = 2 Rakamlar : 0,1
- k basamağına yazılabilecek en büyük sayı = 2^k-1
- k basamağına yazılabilecek değişik sayıların sayısı = 2^k

ÖRNEK : 2 tabanlı sayı sisteminden 10 tabanlı sayı sistemine dönüşüm

$$(1100101.01101)_2 = (?)_{10}$$

$$(1100101.01101)_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}$$

$$(1100101.01101)_2 = 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 + 0.125 + 0 + 0.03125$$

$$(1100101.01101)_2 = (101.40625)_{10}$$

ÖRNEK : 10 tabanlı sayı sisteminden 2 tabanlı sayı sistemine dönüşüm

$$(101.40625)_{10} = (?)_2$$

Tamsayı Kısmı

Kesirli Sayı Kısmı

Sayı	Bölüm	Kalan	
101	2	1	↑
50	2	0	
25	2	1	
12	2	0	
6	2	0	
3	2	1	
1	2	1	
1			

Sayı	Çarpan	Tamsayı	
0.40625	2	0	↓
0.8125	2	1	
1.625-1	2	1	
1.25-1	2	0	
0.5	2	1	
0			

ÖRNEK : $(11110110.01010001)_2 = (?)_{10}$

$$(11110110.01010001)_2 = 246.3164063$$

2 Tabanlı Sayı Sisteminde Dört İşlem

Toplama	Çıkarma	Çarpma	Bölme
1+1 = 0 (elde 1)	1-1 =0	1*1=1	1:1=1
1+0= 1	1-0=1	1*0=0	1:0=0
0+1=1	0-1=0 (sağdan ödünç)	0*1=0	0:1=0
0+0=0	0-0=0	0*0=0	0:0=0

ÖRNEK :

$\begin{array}{r} 101 \\ + 111 \\ \hline 1100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1011 \\ - 101 \\ \hline 0110 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000 \\ - 101 \\ \hline 0011 \end{array}$	$\begin{array}{r} 101 \\ \times 110 \\ \hline 000 \\ 101 \\ 101 \\ \hline 11110 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 100011 & 101 \\ - 101 & 111 \\ \hline 0111 \\ - 101 & \\ \hline 0101 \\ - 101 & \\ \hline 0000 \end{array}$
--	---	---	--	---

- **16 Tabanlı Sayı Sistemi**

16 tabanlı sayı sisteminde bir sayının yazılışı ve değerinin hesabı şu şekildedir.

$$(S)_{16} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0 , K_1 K_2 K_3 \dots K_{m-1} K_m$$

$$0 \leq T_i \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

$$K_j \leq 16-1=F (15) \quad j = 1,2,3,\dots,m$$

$$(S)_{16} = \sum_{i=0}^n T_i 16^i + \sum_{j=1}^m K_j 16^{-j}$$

16 Tabanlı Sayının Özellikleri

- En küçük rakam = 0
- En büyük rakam = 16-1=F (15)
- Rakam sayısı = 16 Rakamlar : 0,1,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
- k basamağına yazılabilecek en büyük sayı = 16^k-1
- k basamağına yazılabilecek değişik sayıların sayısı = 16^k

ÖRNEK : 16 tabanlı sistemden 10 tabanlı sisteme dönüşüm

$$(3B7.4)_{16} = (?)_{10}$$

$$(3B7.4)_{16} = 3 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1} = 768 + 176 + 7 + 0,25 = 951,25$$

ÖRNEK : 10 tabanlı sistemden 16 tabanlı sisteme dönüşüm

$$(951.25)_{10} = (?)_{16}$$

Sayı	Bölüm	Kalan	Sayı	Çarpan	Tamsayı
951	16	7	0.25	16	4
59	16	B (11)	4-4		
3	16	3			
3					

- **8 Tabanlı Sayı Sistemi**

8 tabanlı sayı sisteminde bir sayının yazılışı ve değerinin hesabı şu şekildedir.

$$(S)_8 = T_n T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_0, K_1 K_2 K_3 \dots K_{m-1} K_m$$

$$0 \leq T_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$K_j \leq 8-1=7 \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$(S)_8 = \sum_{i=0}^n T_i 8^i + \sum_{j=1}^m K_j 8^{-j}$$

8 Tabanlı Sayının Özellikleri

- En küçük rakam = 0
- En büyük rakam = 8-1=7
- Rakam sayısı = 8 Rakamlar : 0,1,3,4,5,6,7,
- k basamağına yazılabilecek en büyük sayı = 8^k-1
- k basamağına yazılabilecek değişik sayıların sayısı = 8^k

ÖRNEK : 8 tabanlı sistemden 10 tabanlı sisteme dönüşüm

$$(1712.02)_8 = (?)_{10}$$

$$(1712.02)_8 = 1 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 0 \cdot 8^{-1} + 2 \cdot 8^{-2} = 512 + 448 + 8 + 2 + 0 + 0.03125$$

$$(1712.02)_8 = 970.03125$$

ÖRNEK : 10 tabanlı sistemden 8 tabanlı sisteme dönüşüm

$$(970.03125)_{10} = (?)_8$$

Sayı	Bölüm	Kalan	Sayı	Çarpan	Tamsayı
970	8	2	0.03125	8	0
121	8	1	0.25	8	2
15	8	7	2-2		
1	8	1			
1					

Sayıların Yuvarlatılma Kuralları

Yapılan bir işin veya hesaba göre sayıların ondalık kısmının belli basamağa kadar yuvarlatılması gerekebilir. Sayıların yuvarlatılmasında genel kurallar şu şekildedir.

- İstenilen son basamağın sağındaki rakam 5'den küçükse sayı istenen basamağa kadar aynen alınır, istenmeyen basamaklar atılır,
- İstenilen son basamağın sağındaki rakam 5'den büyükse sayı istenen basamak bir artırılarak alınır, istenmeyen basamaklar atılır,
- İstenilen son basamağın sağındaki rakam 5 ise, sayı istenen basamağa kadar çift sayı olacak şekilde alınır, istenmeyen basamaklar atılır,
- Bir defa yuvarlatılmış sayı tekrar yuvarlatılacaksa orijinal değere geri dönülerek yuvarlatılma yapılır.

ÖRNEK :

16.763	iki basamağa yuvarlatılırsa	16.76
16.767	iki basamağa yuvarlatılırsa	16.77
16.765	iki basamağa yuvarlatılırsa	16.76
16.755	iki basamağa yuvarlatılırsa	16.76
16.7654	üç basamağa yuvarlatılırsa	16.765
16.765	iki basamağa yuvarlatılırsa	16.76
16.7654	iki basamağa yuvarlatılırsa	16.77
0,345001	iki basamağa yuvarlatılırsa	0.35

Hesaplama Hataları

Hesaplama hataları sayısal matematikte sayıların ve hesaplama sonuçlarının doğruluğunu araştırır. Hesaplama hataları ile yanlış hesaplama yada yanlış varsayımlar belirlenemez.

Bir hesabın doğruluğu hesaba giren sayı değerlerinin doğruluğuna bağlıdır ve sayının virgülden sonraki basamak sayısını artırmakla artmaz. Hesaba giren büyüklüklerin doğruluğu ile hesaplamanın doğruluğu uyumlu olmalıdır yani m. birimindeki sayılarla hesap yaparak mm. biriminde doğruluk beklenemez.

1.3.1. Sayılarda Anlamli Basamak

Bir sayının duyarlılığı belirtilmemişse, sayının son basamağı son basamak biriminin yarısı kadar hatalı olabilir ve bu nedenle son basamağa kuşku basamak veya kuşku rakam denir. Örneğin 216.84 sayısı 216.35 yada 216.45 olabilir. Bu nedenle bu sayının sonundaki 4 sayısı kuşku basamaktır.

Anlamli basamak sayısı; sayının soldan sıfırdan farklı ilk rakamından başlayarak sağa doğru sayılan rakamların sayısı ile hesaplanır.

ÖRNEK :

0.0275 3 anlamlı basamak

0.22892 5 anlamlı basamak

215.714 6 anlamlı basamak

6500.0 5 anlamlı basamak

2.0815 5 anlamlı basamak

Anlamlı basamak sayısı; çarpma ve bölme işlemlerinde çok önemlidir çünkü, sonuçta elde edilen sayının anlamlı basamak sayısı en azından çarpma ve bölmeye giren sayıların en küçük anlamlı basamağı kadar olması gereklidir.

ÖRNEK :

$$4.9178 * 2.03 = 9.98$$

$$67.81 * 10^3 = 4598 * 10^6$$

$$71.2 * 0.21289 = 151.6$$

$$456.212 : 2.17 = 210.26$$

$$0.65968 : 12 = 0.0550$$

$$2.738 : 0.78 = 3.51$$

1.3.2. Sayılarda Mutlak ve Bağıl Hata

Mutlak hata bir değerin yaklaşık değeri ile kesin değeri arasındaki farkın mutlak değeridir. Bir X sayısının kesin değeri \bar{X} ise gerçek ve mutlak hata aşağıdaki eşitliklerden hesaplanır.

$$\varepsilon = \bar{X} - X \quad \text{gerçek hata} \quad ;$$

$$\varepsilon = |\bar{X} - X| \quad \text{mutlak hata}$$

Bağıl hata ise mutlak hatanın X yaklaşık değerine bölünmesiyle elde edilen değerdir.

$$\delta = \frac{|\varepsilon|}{|X|} \quad \text{Bağıl Hata}$$

1.3.3. Sayısal Çözümlemede Hata Kaynakları

- **Yöntem Hataları:** Hesaplama da kullanılan yöntemin kesin değil, yaklaşık yöntem olmasından kaynaklanan hatalardır. İteratif çözüm ve seri açılımlarıyla yapılan çözümlerde bu tip hatalar mevcuttur.
-
- **Veri Hataları :** Hesaplamalarda kullanılan veriler çeşitli hataları da içermektedirler. Dolayısıyla sonuçta hesaplanan büyüklüklerin de bu hataları içermesi kaçınılmazdır. Bu hatalar yok edilemez fakat büyüklükleri hesaplanabilir.
-
- **Hesap (Yuvarlatma) Hataları :** Bir sayının $(n+1)$. Basamağındaki değeri n . Basamağa yuvarlatılırken bir miktar değer farklılığı oluşur. Hesaplama araçları kullanılırken kullanılan hesaplama aracının kapasitesine göre sayı yuvarlatılabilir. Bu durumlarda yuvarlatma hatası ortaya çıkar.