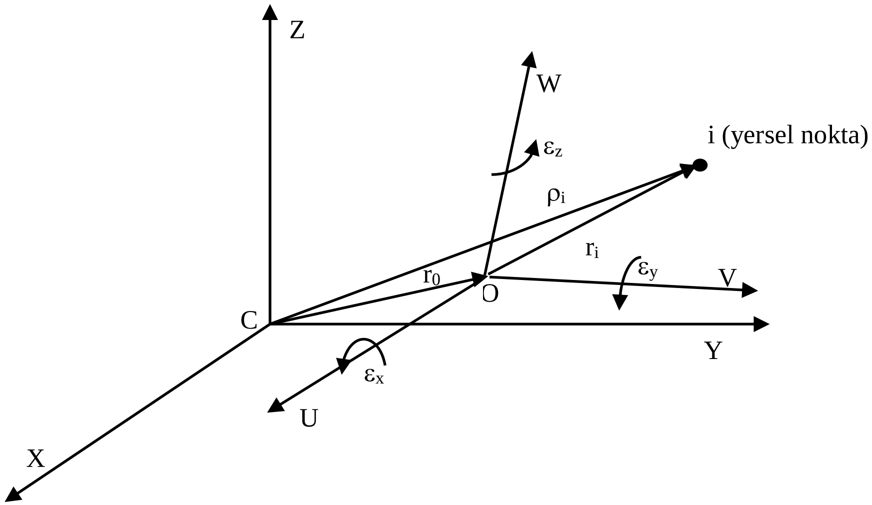
3 BOYUTLU BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ

- **Bursa-Wolf Modeli**

Bursa-Wolf modeli, iki koordinat sistemi arasındaki ilişkiyi benzerlik dönüşümü ile tanımlar. Bu ilişkinin tanımlanması için üç öteleme $[X_0,Y_0,Z_0]$, üç dönüklük $(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z)$ ve bir ölçek faktörü (κ) parametreleri gereklidir.



İki sistem arasındaki dönüşüm eşitliğinin fonksiyonel modeli şu şekilde yazılır.

$$(\underline{\rho}_i) = (\underline{r}_0) + (1+\kappa)\, R\, (\underline{r}_i) \qquad (24)$$

Burada $(\underline{\rho}_i)=[X_i,Y_i,Z_i]$, $(\underline{r}_i)=[U_i,V_i,W_i]$ dik koordinat sistemlerini, $R=R_1(\varepsilon_x).R_2(\varepsilon_y).R_3(\varepsilon_z)$ dönüklük matrisini ve $(\underline{r}_0)=[X_0,Y_0,Z_0]$ öteleme parametrelerini göstermektedir. $R_1(\varepsilon_x)$, $R_2(\varepsilon_y)$, $R_3(\varepsilon_z)$ dönüklük matrisleri,

$$R_1(\varepsilon_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varepsilon_x & \mathrm{Sin}\varepsilon_x \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varepsilon_x & \mathrm{Cos}\varepsilon_x \end{bmatrix}$$

$$R_2(\varepsilon_y) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\varepsilon_y & 0 & -\mathrm{Sin}\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varepsilon_y & 0 & \mathrm{Cos}\varepsilon_y \end{bmatrix}$$

$$R_3(\varepsilon_z) = \begin{bmatrix} Cos\varepsilon_z & Sin\varepsilon_z & 0 \\ -Sin\varepsilon_z & Cos\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılırsa çarpımları sonucu oluşan R dönüklük matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} Cos\varepsilon_y Cos\varepsilon_z & Cos\varepsilon_x Cos\varepsilon_y Sin\varepsilon_z + Sin\varepsilon_x Sin\varepsilon_y & Sin\varepsilon_x Cos\varepsilon_y Sin\varepsilon_z - Cos\varepsilon_x Sin\varepsilon_y \\ -Sin\varepsilon_z & Cos\varepsilon_x Cos\varepsilon_z & Sin\varepsilon_x Cos\varepsilon_z \\ Sin\varepsilon_y Cos\varepsilon_z & Cos\varepsilon_x Sin\varepsilon_y Sin\varepsilon_z - Sin\varepsilon_x Cos\varepsilon_y & Sin\varepsilon_x Sin\varepsilon_y Sin\varepsilon_z + Cos\varepsilon_x Cos\varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (25)$$

olarak elde edilir. Jeodezik çalışmalarda kullanılan koordinat sistemleri yaklaşık olarak paralel olan sistemler oldukları için dönüklük açıları çok küçük açılardır. Bu nedenle Cosε=1, Sinε=ε ve kabulleri yapılıp elde edilen (25) eşitliği (24) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + (1+\kappa) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} \tag{26}$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitliklerden En Küçük Kareler Yöntemine göre çözüm,

$\underline{V} = \underline{A}\underline{X} - \underline{\ell}$ $\quad\quad$ $\underline{P}$ $\quad\quad$ Matematik Model

$$\underline{A}^T \underline{P}\underline{A}\underline{X} - \underline{A}^T \underline{P}\underline{\ell} = 0$$
$$\underline{X} = \left(\underline{A}^T \underline{P}\underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{P}\underline{\ell}$$

eşitlikleri yardımıyla yapılır.

ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT SİSTEMLERİ ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLER

1. İki Koordinat sistemi arasında sadece dönüklük varsa;

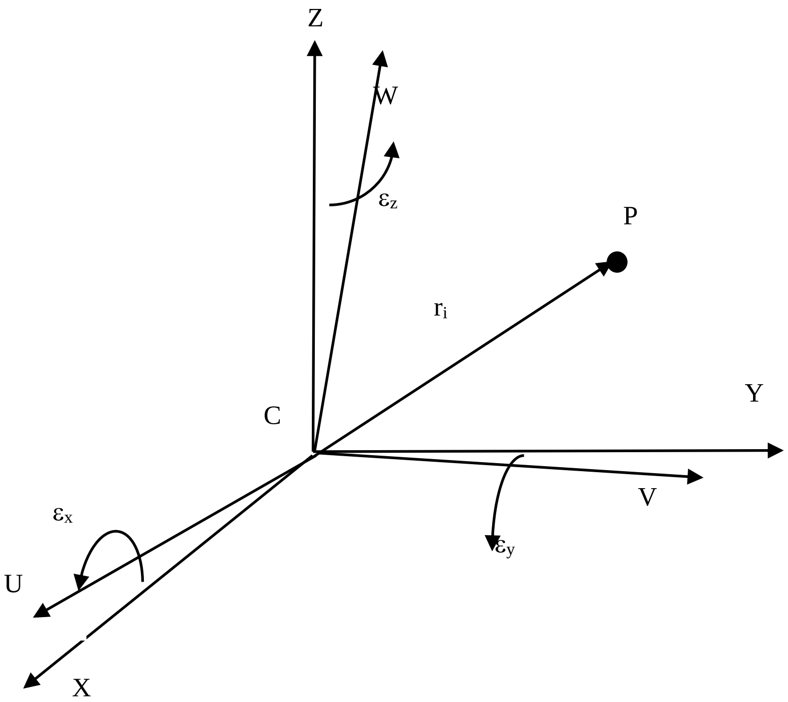
$$R_1(\varepsilon_x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{Cos}\varepsilon_x & \operatorname{Sin}\varepsilon_x\\ 0 & -\operatorname{Sin}\varepsilon_x & \operatorname{Cos}\varepsilon_x\end{bmatrix} R_2(\varepsilon_y)=\begin{bmatrix}\operatorname{Cos}\varepsilon_y & 0 & -\operatorname{Sin}\varepsilon_y\\ 0 & 1 & 0\\ \operatorname{Sin}\varepsilon_y & 0 & \operatorname{Cos}\varepsilon_y\end{bmatrix} R_3(\varepsilon_z)=\begin{bmatrix}\operatorname{Cos}\varepsilon_z & \operatorname{Sin}\varepsilon_z & 0\\ -\operatorname{Sin}\varepsilon_z & \operatorname{Cos}\varepsilon_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılırsa çarpımları sonucu oluşan R dönüklük matrisi,

$$R=\begin{bmatrix}\operatorname{Cos}\varepsilon_y\operatorname{Cos}\varepsilon_z & \operatorname{Cos}\varepsilon_x\operatorname{Cos}\varepsilon_y\operatorname{Sin}\varepsilon_z+\operatorname{Sin}\varepsilon_x\operatorname{Sin}\varepsilon_y & \operatorname{Sin}\varepsilon_x\operatorname{Cos}\varepsilon_y\operatorname{Sin}\varepsilon_z-\operatorname{Cos}\varepsilon_x\operatorname{Sin}\varepsilon_y\\ -\operatorname{Sin}\varepsilon_z & \operatorname{Cos}\varepsilon_x\operatorname{Cos}\varepsilon_z & \operatorname{Sin}\varepsilon_x\operatorname{Cos}\varepsilon_z\\ \operatorname{Sin}\varepsilon_y\operatorname{Cos}\varepsilon_z & \operatorname{Cos}\varepsilon_x\operatorname{Sin}\varepsilon_y\operatorname{Sin}\varepsilon_z-\operatorname{Sin}\varepsilon_x\operatorname{Cos}\varepsilon_y & \operatorname{Sin}\varepsilon_x\operatorname{Sin}\varepsilon_y\operatorname{Sin}\varepsilon_z+\operatorname{Cos}\varepsilon_x\operatorname{Cos}\varepsilon_y\end{bmatrix}$$

Cosε=1, Sinε=ε kabulleri yapılırsa

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$



2. İki Koordinat sistemi arasında sadece dönüklük ve ölçek katsayısı varsa;

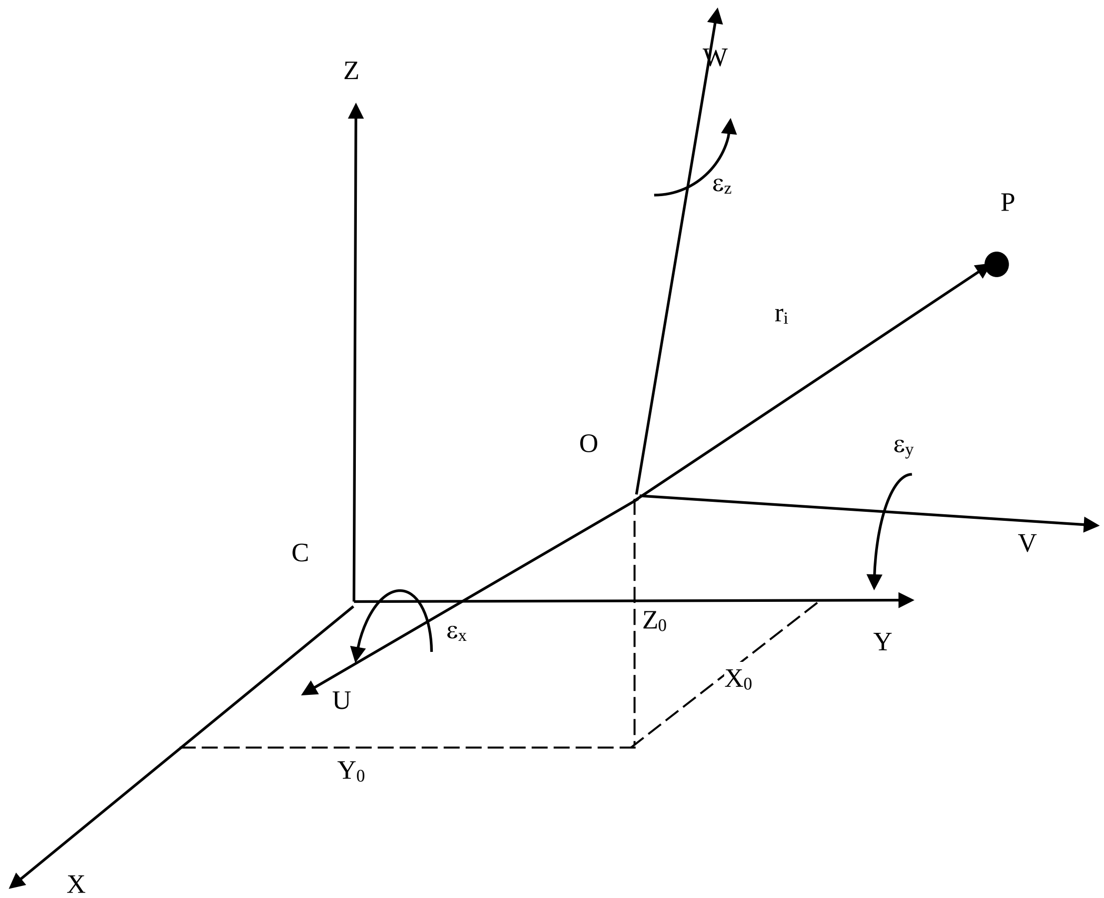
$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = (1+\kappa) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$

3. İki Koordinat sistemi arasında sadece dönüklük, ölçek katsayısı ve öteleme varsa;

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = (1+\kappa) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir.



Bu eşitliklerden En Küçük Kareler Yöntemine göre çözüm,

$\underline{V} = \underline{A}\underline{X} - \underline{\ell}$ $\quad\quad$ $\underline{P}$ $\quad$ Matematik Model

$$\underline{A}^T \underline{P}\underline{A}\underline{X} - \underline{A}^T \underline{P}\underline{\ell} = 0$$

$$\underline{X} = \left(\underline{A}^T \underline{P}\underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{P}\underline{\ell}$$

eşitlikleri yardımıyla yapılır.