

1. KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Matematiğin temel kavramlarından biri olan koordinat sistemleri, n-boyutlu uzayların tanımlanmasında ve incelenmesinde kullanılan analitik ve geometrik kavramlar topluluğudur. Uygulamalı mühendislik bilimlerinin çalışma alanı, yaygın olarak iki ya da üç boyutlu uzayda tanımlandığı için kullanılan koordinat sistemleri de iki ya da üç boyutludur .

Bir noktanın konumu n-boyutlu uzayda sıralı n tane sayı ile belirlenir ve bu sayılara noktanın koordinatları denir. Tanımlı her koordinat sisteminde her sıralı sayı tek bir noktayı gösterir ve (X_1, X_2, \dots, X_n) şeklinde tanımlanır.

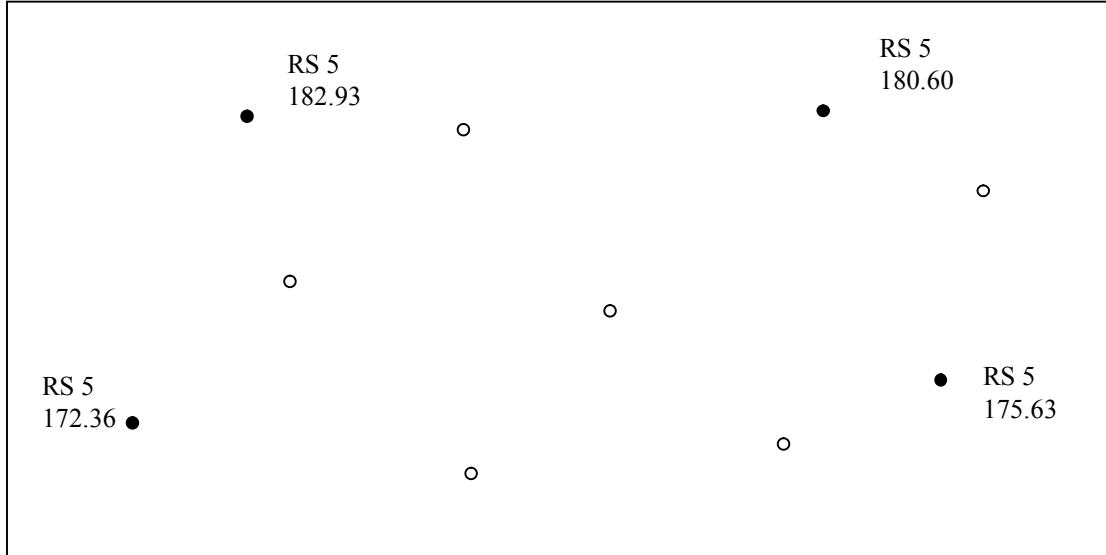
Koordinat sistemleri tek boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu olarak ayrılabilir. Tek boyutlu koordinat sistemlerine örnek olarak sadece yüksekliği ölçülmüş olan bir yükseklik koordinat sistemi, iki boyutlu koordinat sistemine örnek olarak X ve Y koordinatları ölçülmüş olan yersel koordinat sistemleri, 3 boyutlu koordinat sistemine örnek olarak X,Y,Z koordinatları ölçülmüş olan GPS koordinat sistemi verilebilir.

Teknolojik gelişmeler ışığında jeodezik çalışmalarda kullanılan nokta koordinatlarının üç boyutlu belirlenmesi gerekli ve kolay bir işlem olmuştur. Bu nedenle koordinat sistemleri ve nokta koordinatları üç boyutlu olarak tanımlanmaktadır.

Arazi çalışmalarında koordinatı kullanılan ve daha sonraki çalışmalarda kullanılacak noktaların birbirlerine göre konumlarını belirlemek gereklidir. Bu nedenle noktaların belli bir başlangıca (orjine) olan uzaklıkları yada açıları belli eksen yönlerinde ölçülerek sayısal değerler verilir. Orjin noktasının sayısal değeri sıfır alınarak verilen bu değerlere nokta koordinatı denir ve bu şekilde tüm noktaların birbirine göre koordinatları yani konumları belirlenmiş olur. Boyutlarına göre tanımlanmış koordinat sistemleri tek boyutlu (1D), iki boyutlu (2D) ve üç boyutlu (3D) olarak verilebilir.

1.1. Tek Boyutlu Koordinat Sistemleri

Genel jeodezik çalışmalarda yükseklik koordinat sistemleri için kullanılan bir boyuttur. Özellikle nivelman koordinat sistemleri için deniz seviyesinden olan yükseklik ölçülerek elde edilir. Teknolojik yetersizlikler ve uygulama kolaylığı açısından yatay ve düşey ağların ayrı olarak kurulduğu durumda daha çok kurulmuş ve kullanılmıştır. Her nokta için tek bir yükseklik değeri verilerek elde edilir. Eğer bir bölge için yükseklik haritası (eşyükseklik eğrisi haritası) yapılacaksa bir başlangıç noktasına herhangi bir yükseklik değeri verilerek lokal olarak bu harita elde edilebileceği gibi ortalama deniz yüzeyine göre koordinatı belirlenmiş nokta başlangıç noktası olarak kullanılarak da direk çözüm elde edilebilir.

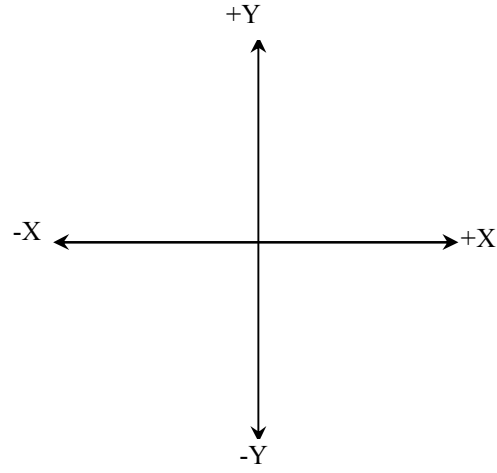


1.1. İki Boyutlu Koordinat Sistemleri

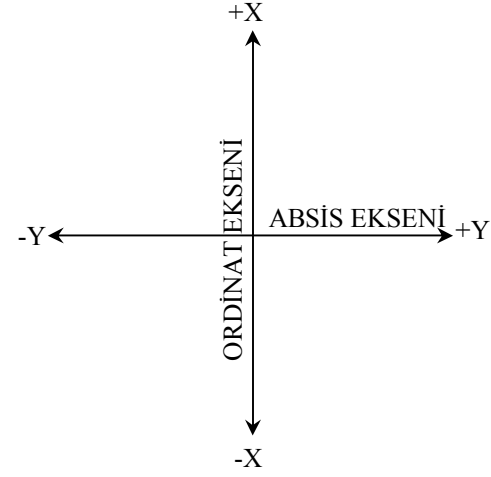
Arazide noktaların birbirine göre durumlarını belirlemek için yatay bir düzlem içerisinde birbirine dik olan iki doğru kullanılır. Bu doğruların oluşturduğu sisteme iki boyulu dik (kartezyen) koordinat sistemi denir.

Matematikte kullanılan koordinat sistemleri sağ-sol doğrultusu X eksenini, yukarı-aşağı doğrultusu Y eksenidir. Haritacılıkta ise bu durum terstir. Ordinat eksenini olarak adlandırılan Y eksenini daima doğu-batı (sağ-sol) yönünü, abris olarak adlandırılan X eksenini de kuzey-güney (yukarı-aşağı) yönünü göstermektedir.

Bunun nedeni, matematikte kullanılan açıların başlangıç yönü +X olup artış yönü saat ibresini tersi yönündedir. Haritacılıkta kullanılan aletlerin tümünde açı daireleri saat ibresi yönündedir. Matematikte kullanılan formüllerin değişmemesi için jeodezik koordinat eksenlerinin yönü değiştirilmiş ve açı başlangıcı olarak da kuzey yön alınmıştır.



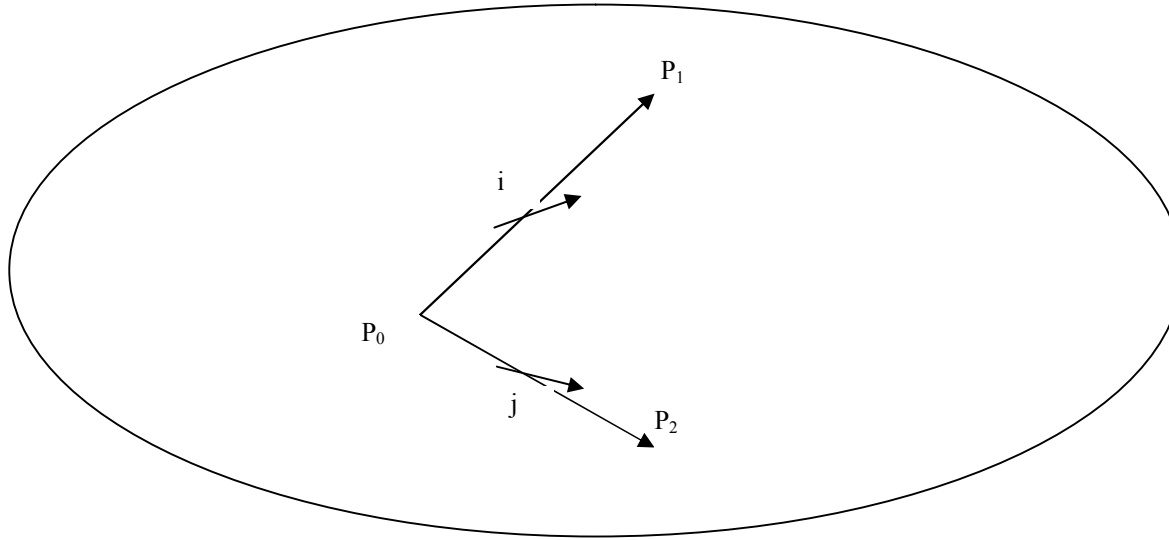
Matematik Koordinat Sistemleri



Jeodezik Koordinat Sistemleri

Yukarıdan da görüldüğü üzere bir koordinat sistemi tanımlanırken koordinat sisteminin başlangıç (orjin) noktası, eksenlerin sayısı ve artı yönü ve eksenler arasındaki açının tanımlanması gereklidir. Jeodezik çalışmalarda genelde dik (kartezyen) koordinat sistemleri tanımlanır ve kullanılır.

İki boyutlu uzayın geometrik yapısına uygun olarak kurulmuş farklı parametrelerle ifade edilen birçok koordinat sistemi tanımlanabilir. İki boyutlu uzayda koordinat sistemi $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ olarak tanımlanan dört noktanın oluşturduğu $\overrightarrow{P_0P_1} = i, \overrightarrow{P_0P_2} = j$ birim vektörlerin tanımladığı iki eksenli bir sistemdir.



Şekil 1. İki boyutlu uzayda koordinat çatısı

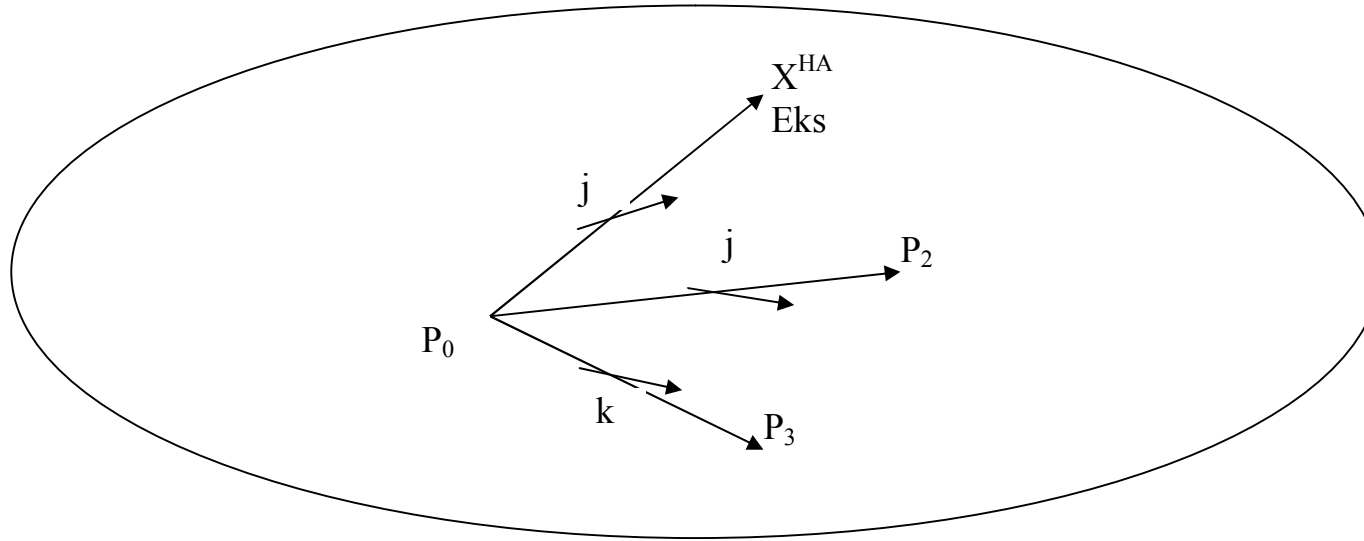
Şekil 1’de gösterilen koordinat çatısında; P_0 sistemin başlangıç (orijin) noktasını, P_1 ve P_2 ise eksenlerini tanımlamaktadır. Bu koordinat çatısında herhangi bir noktanın konumu a_i değerleri skaler büyüklükler olmak üzere,

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^2 a_i \overrightarrow{P_0P_i} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \quad (1)$$

vektörel eşitliğiyle elde edilir. İki boyutlu uzayda herhangi bir noktanın konumunu belirlemek için kullanılan reel sayılar ikilisine noktanın parametreleri yada kısaca noktanın koordinatları denir. Koordinat değerleri her nokta için daima değişik ve tek anlamlı koordinat fonksiyonlarıyla tanımlanırlar. Yani her noktanın koordinat fonksiyonları, koordinat parametrelerinin seçimine bağlı olarak bir sistem içerisinde belirlenir. Bu nedenle (X_1, X_2) şeklinde tanımlanmış koordinatlar daima iki boyutlu uzayda $\{P_0, P_1, P_2\}$ çatısında tanımlanmış bir sisteme göre tanımlanmışlardır.

2.1.1. Üç Boyutlu Koordinat Sistemleri

Üç boyutlu uzayın geometrik yapısına uygun olarak kurulmuş farklı parametrelerle ifade edilen birçok koordinat sistemi tanımlanabilir. Üç boyutlu uzayda koordinat sistemi $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ olarak tanımlanan dört noktanın oluşturduğu $\overrightarrow{P_0P_1} = i, \overrightarrow{P_0P_2} = j, \overrightarrow{P_0P_3} = k$ birim vektörlerin tanımladığı üç eksenli bir sistemdir.



Şekil 1. Üç boyutlu uzayda koordinat çatısı

Şekil 1’de gösterilen koordinat çatısında; P_0 sistemin başlangıç (orijin) noktasını, P_1 , P_2 ve P_3 ise eksenlerini tanımlamaktadır. Bu koordinat çatısında herhangi bir noktanın konumu a_i değerleri skaler büyüklükler olmak üzere,

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^3 a_i \overrightarrow{P_0P_i} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad (1)$$

vektörel eşitliğiyle elde edilir. Üç boyutlu uzayda herhangi bir noktanın konumunu belirlemek için kullanılan reel sayılar üçlüsüne noktanın parametreleri yada kısaca noktanın koordinatları denir. Koordinat değerleri her nokta için daima değişik ve tek anlamlı koordinat fonksiyonlarıyla tanımlanırlar. Yani her noktanın koordinat fonksiyonları, koordinat parametrelerinin seçimine bağlı olarak bir sistem içerisinde belirlenir. Bu nedenle (X_1, X_2, X_3) şeklinde tanımlanmış koordinatlar daima üç boyutlu uzayda $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ çatısında tanımlanmış bir sisteme göre tanımlanmışlardır.

Üç boyutlu koordinat sistemleri koordinat çatılarının geometrik yapısına göre iki gruba ayrılabilirler.

2.1.1.1. Üç Boyutlu Afin Koordinat Sistemleri

Üç boyutlu afin koordinat sisteminin koordinat çatısını oluşturan birim vektörler $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{j}$, $\overrightarrow{P_0P_3} = \vec{k}$ arasındaki ilişki belli bir açı ile tanımlıdır. Bu vektörler birbirine paralel yada dik değildir. Bu özellik sebebiyle koordinat sisteminin eksenleri birbirine göre eğik konumdadır ve eğik çatılı koordinat sistemleri olarak da adlandırılabilirler.

Afin koordinat sisteminde birim vektörlerden oluşan koordinat çatısına göre üç boyutlu uzayda herhangi bir P noktasının konumu (1) eşitliği de dikkate alınarak,

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^3 a_i \overrightarrow{P_0P_i} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

eşitliğiyle elde edilir. Buradaki a_i katsayıları noktanın afin koordinatlarıdır. Afin koordinat sisteminde bir noktanın koordinatları da daima birbirinden farklı ve tek anlamlı koordinat fonksiyonlarıyla tanımlanır ve (X_1, X_2, X_3) şeklinde gösterilir.

2.1.1.2. Üç Boyutlu Ortogonal Koordinat Sistemleri

Üç boyutlu ortogonal koordinat sisteminde koordinat çatısını tanımlayan birim vektörler $\overrightarrow{P_0P_1} = i$, $\overrightarrow{P_0P_2} = j$, $\overrightarrow{P_0P_3} = k$ arasındaki açılar birbirine eşit ve dik (90°) 'dır. Bu özellikten dolayı $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ çatısının birim vektörleri üç boyutlu uzayda P_0 orijin noktasında her zaman ortogonal yapıli koordinat çatısı oluşturmaktadır.

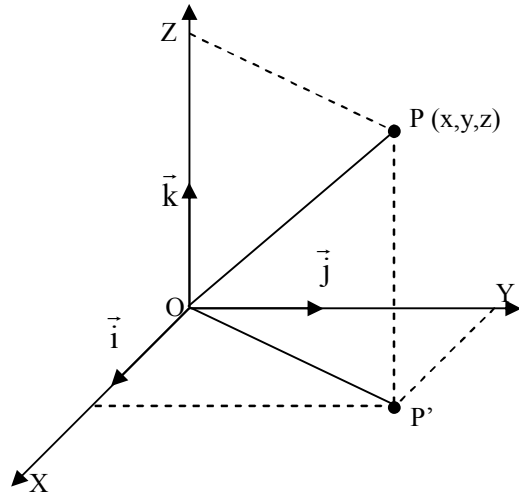
Ortogonal çatının birim vektörlerinden biri diğer iki birim vektörün belirlediği düzleme dik ve bu yüzeyin yüzey normali ile çakışiktır. Bu özelliğe paralel olarak, ortogonal çatının birim vektörlerinin tanımladığı düzlemler birbirine diktir [

Üç boyutlu uzayda bu tür özelliklere sahip ortogonal çatılı koordinat sistemleri geometrik yapılarına göre; kartezyen (doğru eksenli) ve eğrisel (eğri eksenli) koordinat sistemleri gibi farklı iki koordinat sistemi şeklinde ele alınabilirler. Bu sistemlerde farklı koordinat parametreleri kullanılmasıdır, fakat hepsi ortogonal yapıdadır ve birbirine dönüşümü sağlanabilir.

- **Kartezyen Koordinat Sistemleri**

Üç boyutlu uzayda tanımlanan kartezyen koordinat sistemi basit olması nedeniyle oldukça fazla uygulama alanı bulmuştur. Bu koordinat sisteminin orijini O , öklid uzayında tanımlanan ortogonal çatının orijini P_0 ile çakışmıştır. Eksenleri de ortogonal sistemi tanımlayan birim vektörlerle çakışmıştır.

Bu sistemde bir P noktasının konumu O noktadan her bir koordinat eksenine inilen dik boyları ile belirlenir ve noktanın dik (kartezyen) koordinatları olarak adlandırılırlar. (X,Y,Z) kartezyen koordinatları $+\infty$ ve $-\infty$ arasında değer alabilir.



Bu durumda kartezyen koordinat sisteminde üç boyutlu uzayın herhangi bir P noktasının konumu,

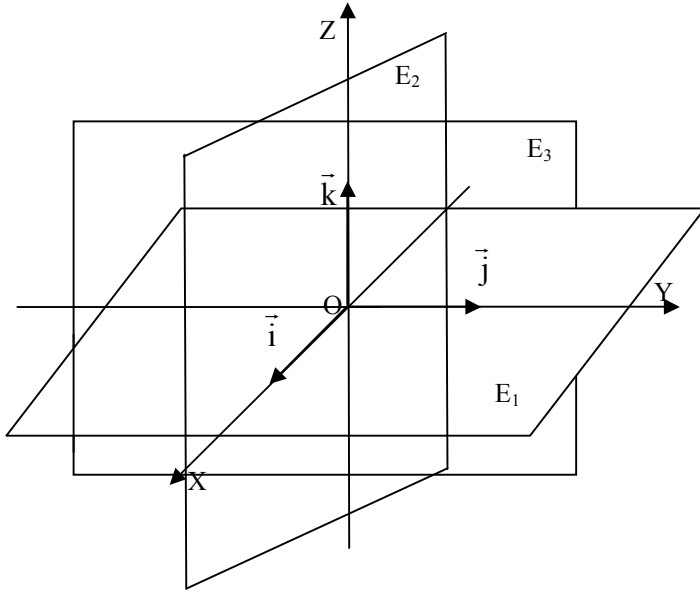
$$\vec{r} = \overline{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (2)$$

vektörel bağıntısı ile elde edilir.

Kartezyen koordinat sistemleri Z ekseninin etrafında döndürüldüğünde X ve Y eksenleri 90° açı ile çakışiyorsa sağ sistem, 270° açı ile çakışiyorsa sol sistem olarak adlandırılır. Bu iki sistem arasındaki fark sadece bir sistemdeki eksenin yönü pozitifken diğerinde negatif olmasıdır. Bu durum kartezyen koordinat sisteminde yansıma olarak adlandırılır. Kartezyen koordinat sisteminde eksenlerin tanımladığı düzlemler daima birbirine diktir. Üç boyutlu uzayda herhangi bir P noktasının konumu kartezyen koordinatlarla belirlendiğinde bu düzlemlere göre de konumu belirlenmiş olur.

Kartezyen koordinat sistemleri üç boyutlu uzayda eksen parametrelerinin sabit ve değişken alınmaları durumuna göre birbirinden farklı konumda E_1 , E_2 , E_3 gibi üç farklı düzlem yüzey oluştururlar. Bu yüzeyler eksenlerin ikisini içinde

bulundurur ve diğer eksene dik olur. Bu yüzeylerden $E_1 = xoy$ düzlemi kartezyen koordinat sisteminin asal düzlemi, $E_2 = xoz$ düzlemi birinci ana düşey düzlemi ve $E_3 = yoz$ düzlemi ise ikinci ana düşey düzlemi olarak adlandırılır.



- **Eğrisel Koordinat Sistemleri**

Eğrisel koordinat sistemlerinde (u_1, u_2, u_3) koordinatları, (X, Y, Z) Kartezyen koordinatlarına dönüşümü olan, üç boyutlu uzayın her bir noktası için daima birbirinden farklı ve tek değerli parametrelerdir. (u_1, u_2, u_3) parametrelerinin seçimine göre birçok farklı eğrisel koordinat sistemi tanımlanabilir. Bu koordinat sistemlerinin sahip olduğu ortak koordinat çatısında bir P noktasının Kartezyen ve Eğrisel koordinat parametrelerine göre,

$$\vec{r} = \overline{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) \quad (3)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

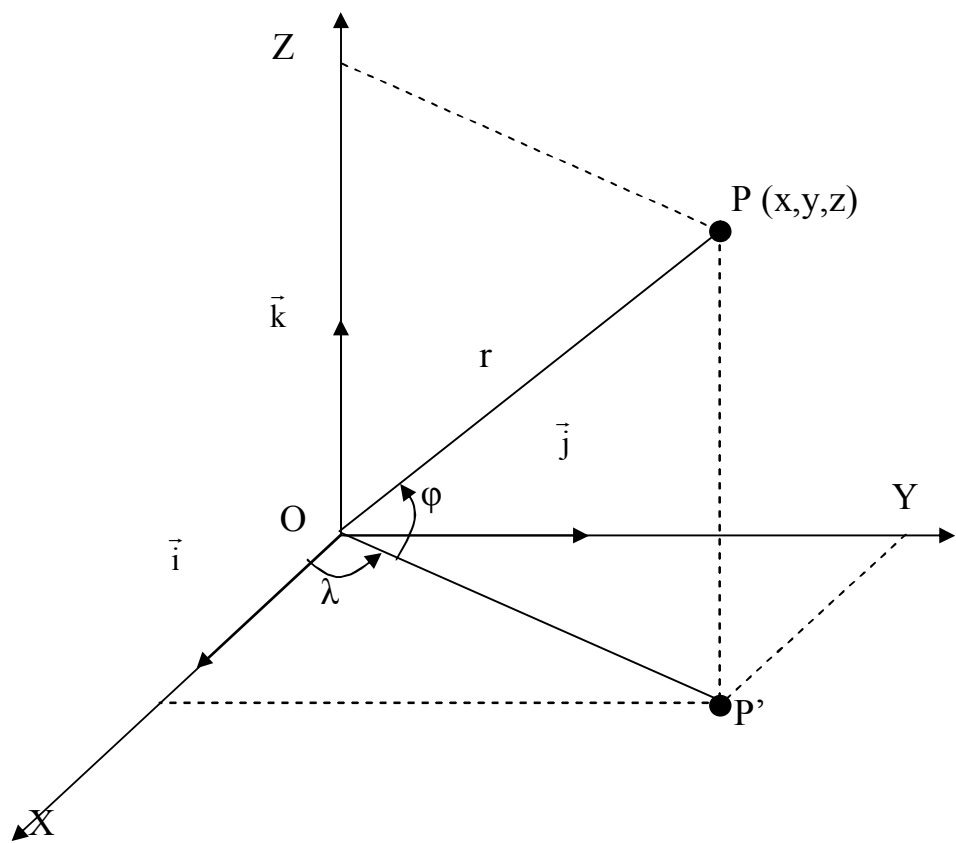
Üç boyutlu uzayda u_1, u_2, u_3 parametrelerinin seçimine bağlı olarak eğrisel koordinat sistemleri aşağıdaki isimlerle adlandırılırlar.

- Küresel Koordinat Sistemi
- Silindirik Koordinat Sistemi,
- Toroidal Koordinat Sistemi,
- Parabolik Silindirik Koordinat Sistemi,
- Ekliptik Silindirik Koordinat Sistemi,
- Paraboloidal Koordinat Sistemi,
- Yayık (Prolate) Sferoidal Koordinat Sistemi,
- Yassı (oblate) Sferoidal Koordinat Sistemi,
- Elipsoidal Koordinat Sistemi,
- Bipolar Koordinat Sistemi.

Bu koordinat sistemlerinin her biri aynı ortogonal koordinat çatısına sahip olmalarına rağmen, kullanılan parametrelerin matematiksel ve geometrik farklılıkları nedeniyle üç boyutlu uzayda farklı koordinat sistemleri olarak karşımıza çıkarlar. Bu koordinat sistemlerinden Küresel koordinat sistemi ve Elipsoidal koordinat sistemi burada açıklanacaktır.

- **Küresel Koordinat Sistemi :**

Konum parametresi olarak açı ve uzunlukların alındığı küresel koordinat sistemleri astronomi ve jeodezi gibi bilim dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu koordinat sistemindeki bir noktanın koordinatları (φ, λ, r) ile tanımlıdır.



$$\text{PO}P' = \varphi \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\Pi$$

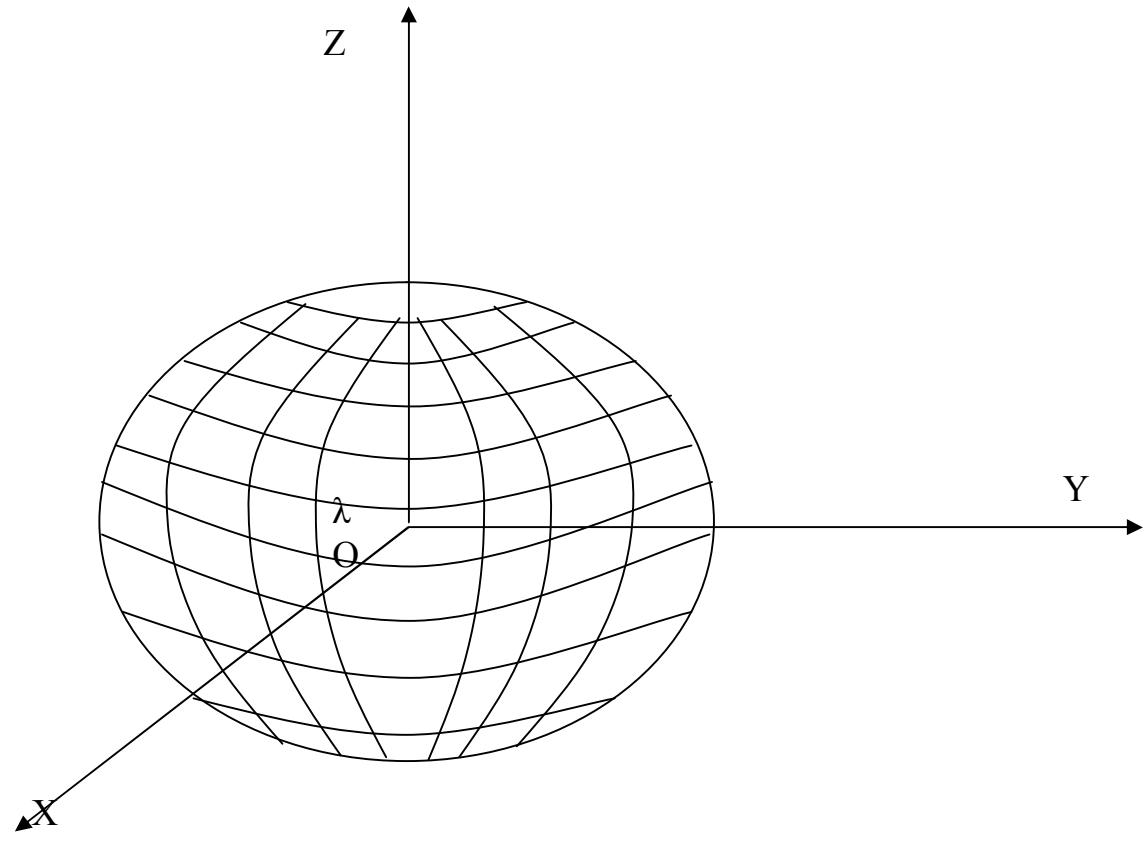
$$\text{xOP}' = \lambda \quad ; \quad 0 \leq \lambda \leq 2\Pi$$

$$\overrightarrow{\text{OP}} = r \quad ; \quad r \geq 0$$

Bu değerler P noktasını küresel koordinatları olmakta ve pozitif yönleri x,y,z kartezyen koordinat sisteminin kartezyen eksenlerinin pozitif yönünü göstermektedir. Üç boyutlu uzayda P noktasına ait küresel koordinatlar ile kartezyen koordinatlar arasındaki ilişki;

$$\begin{aligned}x &= r \cos\varphi \cos\lambda & , & & r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\y &= r \cos\varphi \sin\lambda & , & & \lambda &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \\z &= r \sin\varphi & , & & \varphi &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\end{aligned}$$

Bu şekilde tanımlanan küresel koordinat sisteminde; (φ, λ, r) küresel koordinat parametrelerinden birinin değişken diğerlerinin sabit seçilmesi durumunda farklı geometrik yapıda koordinat sistemleri oluştururlar. r parametresinin değişken olması durumunda aynı merkezli iç içe küreler; λ parametresinin değişken olması durumunda Z -ekseninin r yarıçaplı küreyi kestiği noktalarda (küresel kutup noktalarında) birleşen büyük daire (meridyen) yayları; φ parametresinin değişken olması durumunda λ değişken yaylarını dik olarak kesen eğriler (küçük daire yayları) meydana gelmektedir.



• **Kartezyen ve Küresel Koordinat Sistemleri Arasındaki Dönüşüm:**

Üç boyutlu uzayda bir P noktasının yer vektörü kartezyen koordinatları cinsinden;

$$\vec{r} = \overline{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$$

eşitliğiyle verilir. Ayrıca bu noktanın küresel ve kartezyen koordinatları arasında;

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = r \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = r \sin \varphi$$

fonksiyonel ilişkisi mevcuttur.

Bu bağıntılar göz önüne alınarak üç boyutlu uzayda herhangi bir P noktasına ait \vec{r} yer vektörünün küresel koordinatlar cinsinden ifadesi;

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$