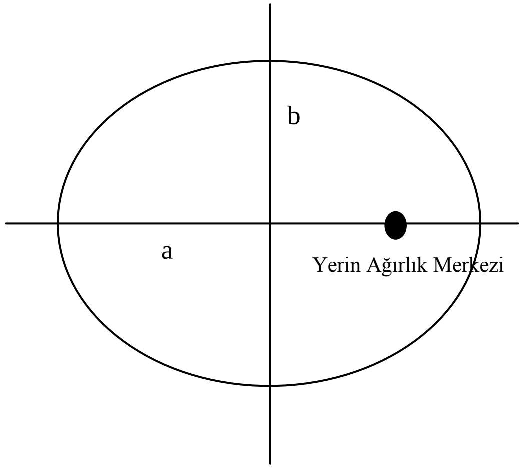
Kepler Kanunları

Nokta konumlarının belirlenmesi için bilgi alınan uyduların yörüngelerinin ve bu yörüngedeki konumlarının bilinmesi gerekir. Uydu yörüngeleri ve bu yörüngedeki hareketlerini belirlemek için Kepler kanunlarından yararlanılır.

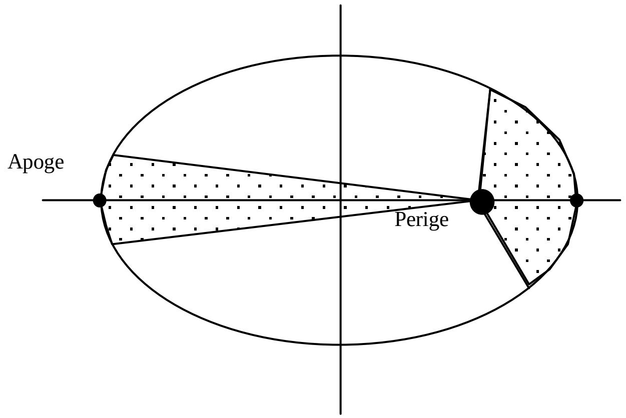
Kepler kanunları,

- Uydu yörüngesi odak noktalarının birinde yerin ağırlık merkezinin bulunduğu bir elipstir.



a : Uydu yörüngesinin büyük yarı ekseni,
b: Uydu yörüngesinin küçük yarı ekseni,

- Uydunun yer merkezli konum vektörü yörüngede eşit zaman içinde yörünge üzerinde eşit alanı tarar. Bunun anlamı uydunun hızı değişkendir. Uydu yere yakın noktada (perige) hızlı, yere uzak noktada (apoge) yavaştır.



a : Uydu yörüngesinin büyük yarı ekseni,
b: Uydu yörüngesinin küçük yarı ekseni,

- Uydunun yörüngesini bir kere dolaşması için geçen sürenin karesi T^2 yörüngenin büyük yarı ekseninin küpü a^3 ile doğru orantılı ve sabittir.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\eta^2}{\mu} = \text{sabit},$$

$\mu = G.m = 3986*10^{14}\ m^3/sn^2$

Genelde yörünge zamanı peryot T, ortalama hareketi η aşağıdaki şekilde verilebilir.

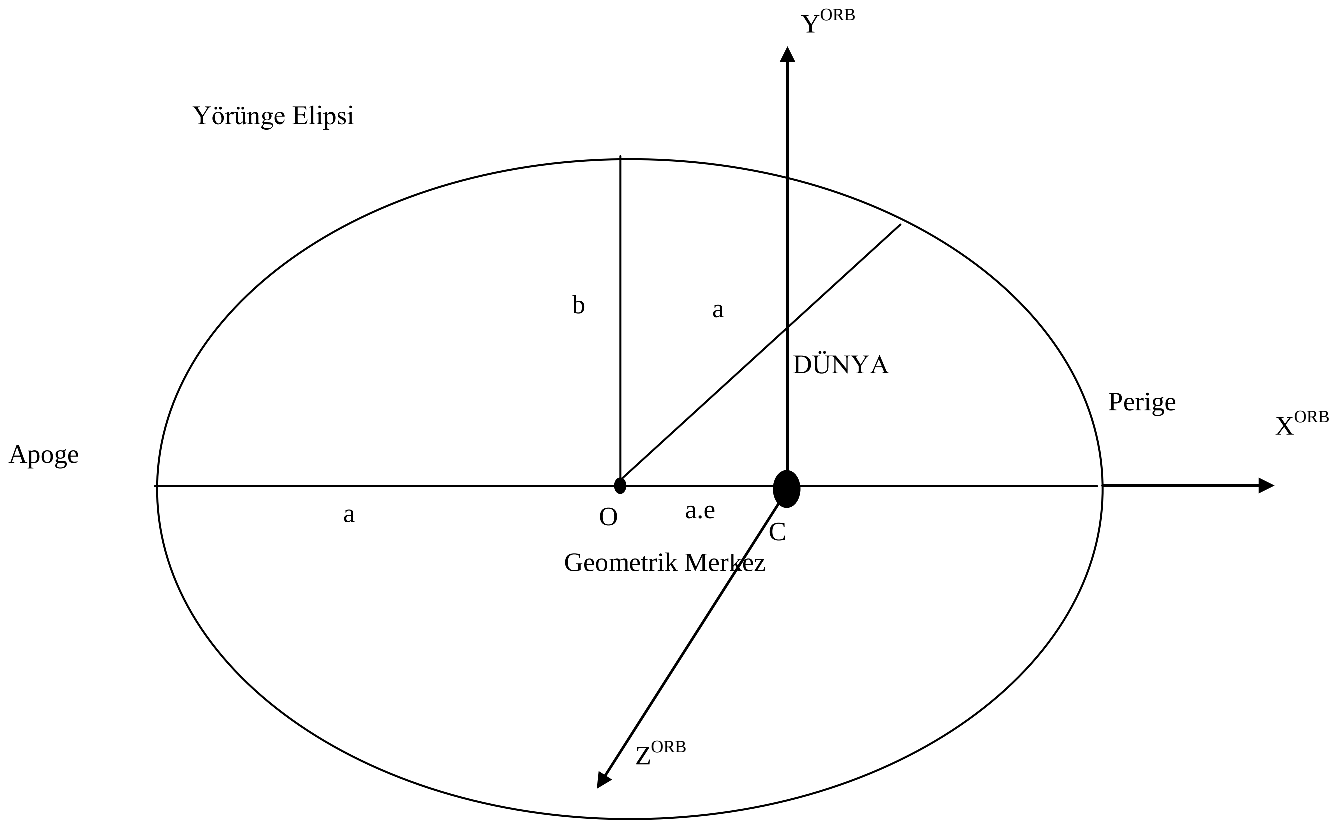
$\eta = 2\Pi / T$ ise $\eta^2 = 4\Pi^2 / T^2$ ise $\eta^2 a^3 = \mu$

Yörünge (Orbital) Koordinat Sistemi

Bu koordinat sistemleri dünyanın etrafında belli bir yörüngede dolaşan uyduların koordinatlarının belirlenmesi için kullanılırlar. Dünya güneşin etrafında bir elips çizerek dolaşır. Aynı şekilde uydularda dünyanın etrafında bir elips çizerek dolaşırlar. Bu elipse yörünge elipsi denir ve odak noktalarından birinde merkezlenmiş çekim kuvveti bulunan cisimlerin izlediği yol olarak tanımlanır.

Yörünge elipsinde uydunun dünyaya en yakın olduğu nokta perige, en uzak olduğu nokta ise apoge noktası olarak adlandırılır. Perige ve apoge noktaları yörünge elipsinin büyük ekseni üzerinde ve büyük yarıeksenin yörünge ile kesişim noktalarında bulunurlar. Perige ve apoge noktalarının belirlediği eksene apside ekseni denir.

Uydunun dünya etrafındaki hareketi aşağıdaki gibidir.



Y^ORB
Yörünge Elipsi
b
a
DÜNYA
Perige
X^ORB
Apoge
a
O
a.e
C
Geometrik Merkez
Z^ORB

Yörünge koordinat sistemi, belli bir yörüngede dolaşan uyduların koordinatlarının tanımlanması için kullanılır. Uydu yörünge koordinat sisteminin orijini dünyanın gravite merkezidir. Birinci ana düzlemi, yörünge elipsinin belirlediği düzlemdir. Z^{ORB} ekseni olarak, odak noktalarının birinde dünyanın bulunduğu yörünge elipsinde artı yönü başucu noktasındaki dik eksen alınır. X^{ORB} ekseni, yörünge elipsi düzleminde bulunan ve apoge ve perige noktalarının belirlediği doğrultu ile çakışıktır ve artı yönü perige noktasına dönüktür. Y^{ORB} ekseni ise bu iki eksene dik olan ve sağ el kuralına uyan eksendir.

Uydu yörünge koordinat sisteminde, elips yörünge üzerinde hareket eden bir uydunun konumu,

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ORB} = r \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\, f \\ \mathrm{Sin}\, f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\mathrm{Cos}E - e) \\ a\sqrt{(1 - e^2)}\,\mathrm{Sin}E \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Burada a elipsin büyük yarıekseni, b elipsin küçük yarıekseni f gerçek anomali açısı, E eksantrik anomali, e birinci eksentrisitedir ve aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

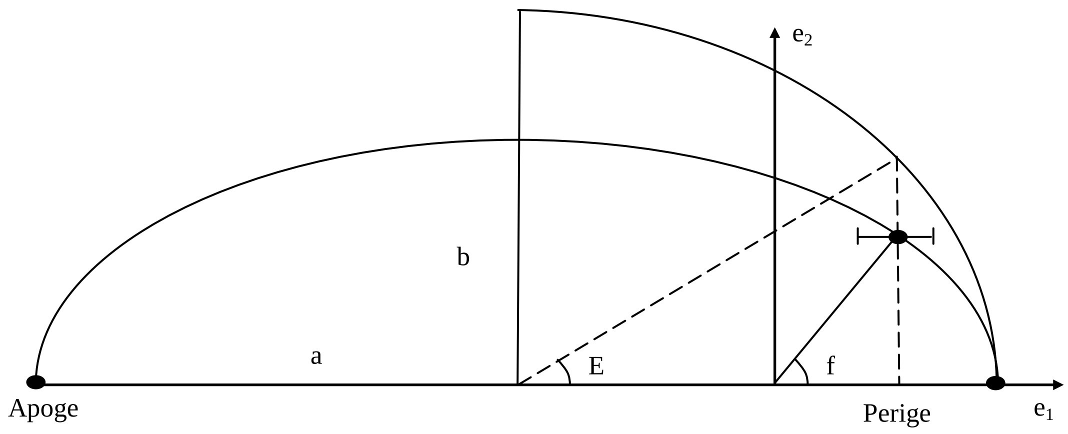
Açılım koordinat sisteminin bir alt koordinat sistemi olan 2. ekvator koordinat sisteminin orjini de dünyanın ağırlık merkezidir. Uyduların koordinat sistemlerini elde etmek için Kepler kanunlarından ve kepler uydu yörünge elemanlarından faydalanılır.

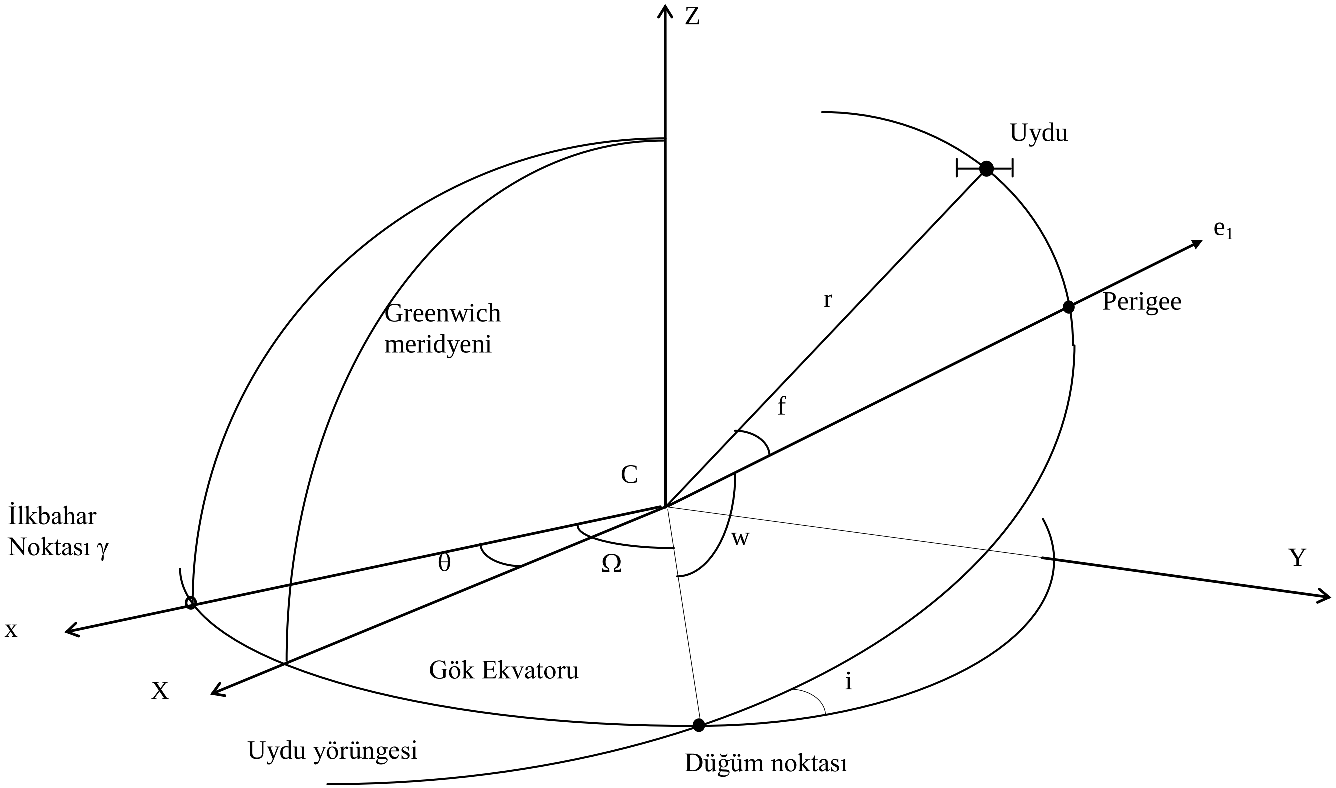
Bir uydunun yörünge içerisindeki konumu açısal bir ifade olan anomaliler ile belirlenir. Bunlar;

1- Ortalama Anomali M(t)

2- Gerçek Anomali f(t)

3- Eksentrik Anomali E(t)




Z
Uydu
e_1
r
Perigee
Greenwich
meridyeni
f
C
İlkbahar
Noktası γ
w
θ
Ω
Y
x
X
Gök Ekvatoru
i
Uydu yörüngesi
Düğüm noktası

Bir uydunun yörüngesinin ve uydunun bu yörünge üzerindeki konumunun belirlenmesi için 6 parametreye ihtiyaç vardır.

Ω: Düğüm noktasının; ilkbahar noktasından itibaren, gök ekvatoru düzleminde düğüm noktasına kadar olan açıdır,

i : Yörünge düzleminin eğim açısı,

ω : Perige noktasının argümanı, Bu açı yörünge düzlemindedir,

a : Yörünge elipsinin büyük yarı ekseni,

e : Yörünge elipsinin eksentrisitesi,

T_0 : Perigeden uydunun geçiş zamanı (t_{0_e})

Bu parametrelerden;

Ω, i : Yörünge düzlemini belirleyen parametreler,

a, e : Elipsoidin büyüklüğünü belirleyen parametreler,

ω : Perige noktasının yerini belirleyen parametre,

f : Yörüngede uydunun konumunu belirleyen parametredir

Bu 6 parametre biliniyorsa uydunun yörüngesi ve uydunun yörüngedeki yeri biliniyor demektir. Bu parametreler ile düzgün bir elips tarif edilse bile uydunun yörüngesi yerin çekim kuvveti, güneş patlamaları vb. nedenler sebebiyle bozulabilir.

Kepler uydu yörünge parametrelerinden faydalanılarak uydu yörünge koordinat sistemi ile aynı orjine sahip olan 2. ekvator koordinat sistemi arasındaki dönüşüm yapılabilir. Dönüşüm için uydu yörünge koordinat sistemi önce Z^{ORB} ekseni etrafına $R_Z(-\omega)$ kadar, daha sonra X^{ORB} ekseni etrafında $R_X(-i)$ kadar ve en son olarak Z^{ORB} ekseni etrafında $R_Z(-\Omega)$ kadar döndürülür.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AP} = R_Z(-\Omega) R_X(-i) R_Z(-\omega) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ORB}$$

Yersel dik koordinat sistemi ile 2. ekvator koordinat sistemi arasındaki ilişki X eksenleri arasındaki farklılık olan GAST açısı kadardır. Bu nedenle dönüşümde 2. ekvator koordinat sistemi Z ekseni etrafında GAST kadar döndürülmelidir.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_3(GAST)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AP}, \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos(GAST) & Sin(GAST) & 0 \\ -Sin(GAST) & Cos(GAST) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AP}$$

Bu eşitlik yukarıda yerine yazılırsa yersel doğal dik koordinat sistemi ile yörünge koordinat sistemi arasındaki dönüşüm bağıntısı ve ters dönüşüm bağıntısı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_Z(GAST)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AP} = R_Z(GAST)R_Z(-\Omega)R_X(-i)R_Z(-\omega)\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ORB}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ORB} = \left[R_Z(GAST)R_Z(-\Omega)R_X(-i)R_Z(-\omega)\right]^{-1}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$