2.3. Koordinat Sistemleri Arasındaki Dönüşüm Modelleri

Herhangi bir dik koordinat sistemine göre koordinatları belli olan noktaların başka bir koordinat sistemindeki koordinatlarının hesaplanması işlemine "Koordinat Dönüşümü (Transformasyon)" denmektedir. Koordinat dönüşümü farklı bir koordinat sisteminde yapılmış haritaların yeni seçilen bir sisteme göre yeniden çizilmesi, uydu ölçmeleriyle belirlenen koordinatların ülke koordinat sistemindeki karşılıklarının hesaplanması vb. problemlerin çözümünde kullanılır. Dönüşüm ile noktaların fiziksel yerlerinde herhangi bir değişiklik olmaz. Sadece noktaların koordinatları bir sistemden diğerine dönüştürülür.

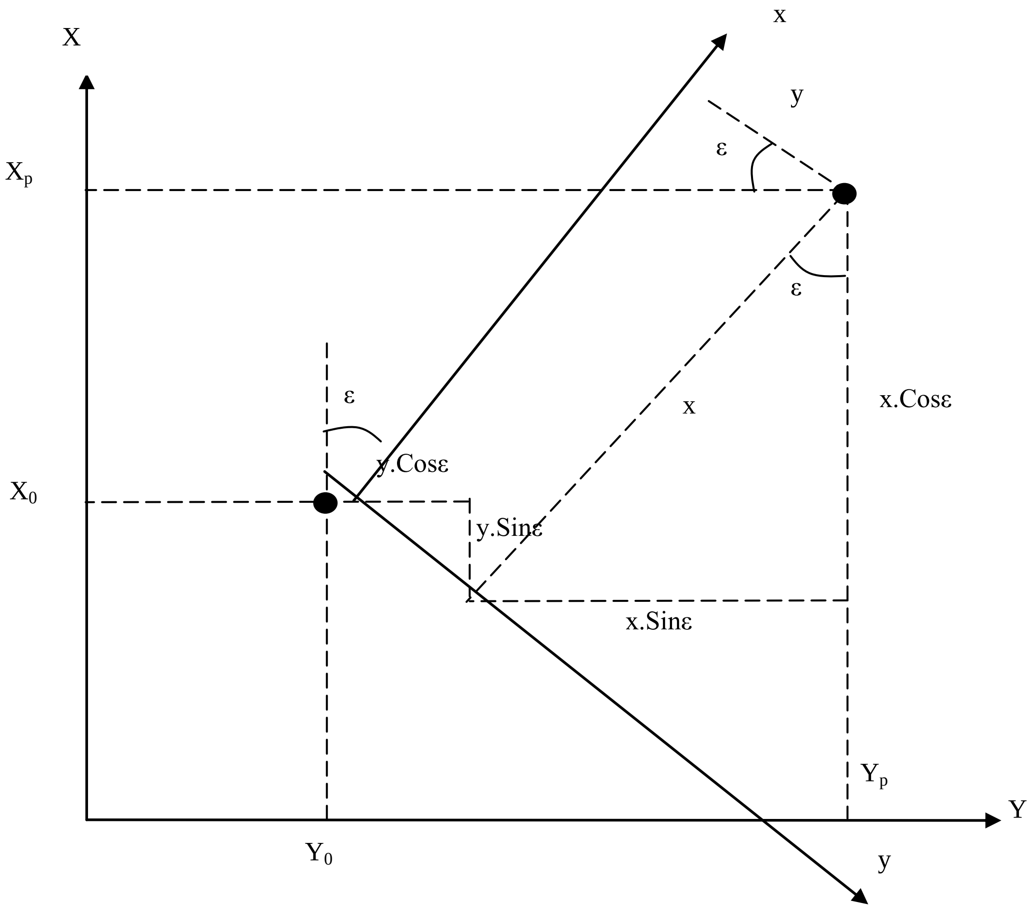
Koordinat dönüşümleri jeodezide sıkça karşılaşılan bir uygulamadır. Çeşitli koordinat sistemlerinde üretilmiş nokta koordinatları arasındaki ilişkiyi tam olarak kurabilmek ve datum birliği sağlamak için koordinat dönüşümü yapılır. Koordinat sistemleri arasındaki dönüşümler dönüşüm sonrası aynı kalan, değişmeyen geometrik özelliklere göre şu şekilde sınıflandırılabilir.

- **Benzerlik Dönüşümü:** Benzerlik dönüşümü ile yapılan koordinat dönüşümü sonunda geometrik şekil korunur. Benzerlik dönüşümü sonrası ikinci koordinat sisteminde oluşan şekil, ilk koordinat sistemindeki şeklin büyütülerek veya küçültülerek oluşturulmuş şekli gibidir. Koordinat sistemleri arasında öteleme, dönüklük ve tüm eksenlerde aynı olan ölçek katsayıları ile bağlantı sağlanır. Koordinat eksenlerindeki ölçek değişimi aynı olduğu için daha çok elimizde ölçülen koordinatları olan iki sistem arasındaki dönüşümde kullanılan bir yöntemdir.

- **Afin Dönüşümü:** Afin dönüşümünde; doğrudaşlık, paralellik özellikleri korunur, açılar ve dolayısıyla şekil değişir, yöne bağlı olarak ölçek değişir. Bir doğru üzerindeki doğru parçalarının karşılıklı oranları sabit kalır. Film, kağıt ve benzeri maddeler üzerindeki çizimler üzerinden alınan koordinatların dönüşümünde kullanılan bir yöntemdir.

- **Projektif Dönüşüm:** Dönüşümlerin en genel hali projektif dönüşümdür. Bu dönüşümde; doğrudaşlık özelliği korunur, bir doğru üzerindeki doğru parçalarının karşılıklı oranları sabit kalır. Daha çok fotoğraflar üzerinden alınan koordinatların dönüşümünde kullanılan bir yöntemdir.

İki Boyutlu Benzerlik Dönüşümü : İki boyutlu benzerlik dönüşümü iki boyutlu dik koordinat sistemleri arasındaki ilişkiyi ifade eder. Burada koordinat eksenlerinin dik ve her iki eksende de aynı ölçek faktörü olduğu kabul edilir. Benzerlik dönüşümünde geometrik şekillerin benzerliği korunur. Düzgün geometrik şekillerin kenarları aynı oranda küçülür ya da büyür. Açıların mutlak değerleri değişmez kalır. Şekiller dönüşümden sonra esas şekle benzerler.



$$\left.\begin{aligned} Y_p - Y_0 &= x\mathrm{Sin}\,\varepsilon + y\,\mathrm{Cos}\varepsilon \\ X_p - X_0 &= x\mathrm{Cos}\,\varepsilon - y\,\mathrm{Sin}\varepsilon \end{aligned}\right\} \begin{aligned} Y_p &= Y_0 + x\mathrm{Sin}\,\varepsilon + y\,\mathrm{Cos}\varepsilon \\ X_p &= X_0 + x\mathrm{Cos}\,\varepsilon - y\,\mathrm{Sin}\varepsilon \end{aligned}$$

k ölçek faktörü varsa;

$$X_p = X_0 + k.x\mathrm{Cos}\,\varepsilon - k.y\,\mathrm{Sin}\varepsilon$$

$$Y_p = Y_0 + k.x\mathrm{Sin}\,\varepsilon + k.y\,\mathrm{Cos}\varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} Cos\varepsilon & -Sin\varepsilon \\ Sin\varepsilon & Cos\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

İkinci sistemdeki koordinatlar

Yeni Dönüştürülmüş Koordinatlar

İkinci sistemin orjin koordinatları

Ölçek

Dönüklük Matrisi

Bu eşitlikte $k.\mathrm{Cos}\varepsilon = a$, $k.\mathrm{Sin}\,\varepsilon = b$, $X_0 = c$, $Y_0 = d$ olarak alınırsa

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ eşitliği bulunur.

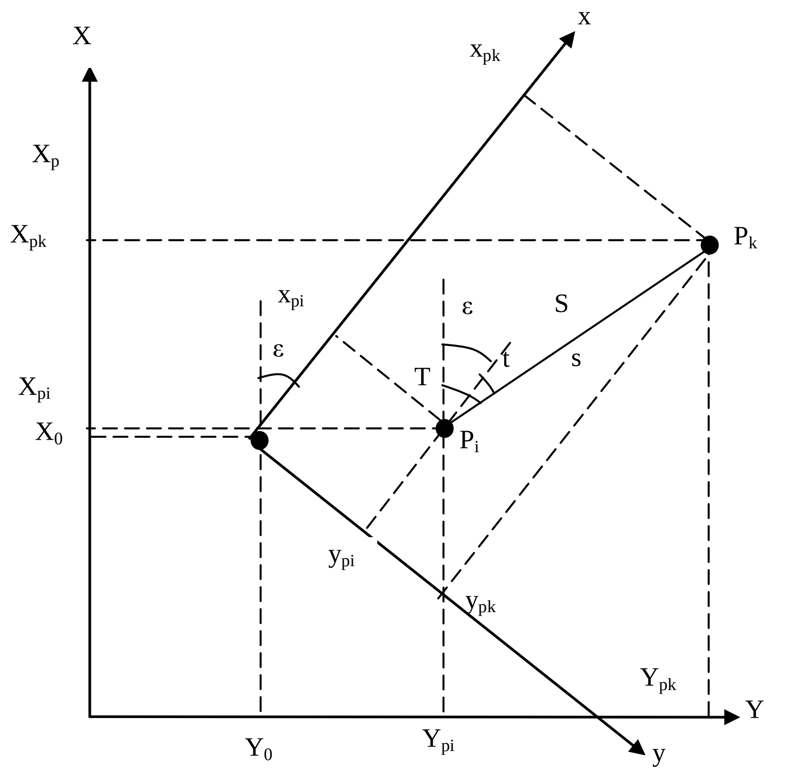
İki koordinat sistemi arasındaki dönüklük;

$$\tan\varepsilon = \frac{ySin\varepsilon}{yCos\varepsilon} = \frac{ySin\varepsilon}{yCos\varepsilon} = \frac{a}{k}\frac{k}{b} = \frac{a}{b}$$

Ölçek faktörü ise;

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{k^2 Cos^2\varepsilon + k^2 Sin^2\varepsilon} = \sqrt{k^2\left(Cos^2\varepsilon + Sin^2\varepsilon\right)} = k$$

Buradaki çözümde a, b, c, d yada başka bir şekilde k, ε, X_p, Y_p gibi dört adet bilinmeyen vardır. Çözüm için en az 4 bilinene yani 2 nokta koordinatına ihtiyaç olur. Çözümde direk koordinat değerlerinin kullanılması nedeniyle büyük değerlerle uğraşılmak istenmiyorsa koordinatlar ötelenerek çözüm yapılabilir.



X,Y sistemindeki uzaklık S
x,y sistemindeki uzaklık s ise ölçek faktörü

$$k = \frac{S}{s}$$

X,Y sistemindeki semt T
x,y sistemindeki semt t ise dönüklük

ε = T - t

$$\mathrm{a} = \mathrm{k.Cos}\varepsilon = \frac{S}{s} Cos(T - t) = \frac{S}{s}(CosTCost + SinTS\,\mathrm{int})$$

$$\mathrm{a} = \frac{S}{s}\left(\frac{\left(X_{p_k} - X_{p_i}\right)}{S}\frac{\left(x_{p_k} - x_{p_i}\right)}{s} + \frac{\left(Y_{p_k} - Y_{p_i}\right)}{S}\frac{\left(y_{p_k} - y_{p_i}\right)}{s}\right), \quad \mathrm{a} = \frac{S}{s}\left(\frac{\left(X_{p_k} - X_{p_i}\right)\left(x_{p_k} - x_{p_i}\right) + \left(Y_{p_k} - Y_{p_i}\right)\left(y_{p_k} - y_{p_i}\right)}{S.s}\right) =$$

$$a = \frac{\left(X_{p_k} - X_{p_i}\right)\left(x_{p_k} - x_{p_i}\right) + \left(Y_{p_k} - Y_{p_i}\right)\left(y_{p_k} - y_{p_i}\right)}{s^2}$$

Aynı şekilde; $b = \dfrac{\left(Y_{p_k} - Y_{p_i}\right)\left(x_{p_k} - x_{p_i}\right) - \left(X_{p_k} - X_{p_i}\right)\left(y_{p_k} - y_{p_i}\right)}{s^2}$

Eşitlikleri bulunur.

$\Delta X = X_{p_k} - X_{p_i}$, $\Delta Y = Y_{p_k} - Y_{p_i}$, $\Delta x = x_{p_k} - x_{p_i}$, $\Delta y = b = y_{p_k} - y_{p_i}$ yazılırsa;

$$a = \frac{\Delta X \Delta x + \Delta Y \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad b = \frac{\Delta Y \Delta x - \Delta X \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Denetim için;

$$\begin{aligned} [X] &= n.c + a[x] - b[y] \\ [Y] &= n.d + b[x] + a[y] \end{aligned}$$ n dönüşümde kullanılan nokta sayısı

Örnek :

NN	y	x	Y	X
18	57257.77	54871.79	105689.54	103708.90
12	58977.85	55323.35	107408.52	104164.59
A	56571.26	56164.43	*104999.93*	*104999.88*
B	58770.79	54300.55	*107203.92*	*103141.31*
C	59648.70	56340.50	*108076.92*	*105183.36*

I. yol:

$$\begin{aligned} X_p &= c + a.x - b.y \\ Y_p &= d + b.x + a.y \end{aligned}$$ eşitliğiyle;

103708.90 = a.54871.79 – b. 57257.77 + c

104164.59 = a.55323.35 –b. 58977.85 + c

105689.54 = b.54871.79 + a.57257.77 + d

107408.52 = b.55323.35 + a.58977.85 + d

yazılır ve çözülürse;

a = 0.999991416 b= -0.002403304 c = 48699.97 d = 48564.14

II. yol:

$\Delta x = 451.56$ $\Delta X = 455.59$ $\Delta y = 1720.08$ $\Delta Y = 1718.98$

a = 0.999991416 b= -0.002403304 c = 48699.97 d = 48564.14

Örnek :

NN	y	x	Y	X
A	5038.73	1635.56	25289.38	14754.71
B	5299.57	1663.53	25159.74	14526.70
101	5094.02	1642.80	*25262.96*	*14705.61*
102	5136.98	1644.79	*25239.49*	*14669.59*
103	5214.76	1633.53	*25184.92*	*14163.04*

a = -0.584028 b= 0.811512

$\Delta x = 27.97$ $\Delta X = -228.01$ $\Delta y = 260.84$ $\Delta Y = -129.64$

S = 262.29m. s = 262.34m.

k = 0.999820199 $\varepsilon = -60.2869^{g}$

Eğer her iki sistemde de koordinatı verilen nokta sayısı 2’den fazla ise bilinmeyenler dengelemeli olarak bulunur.

$$a = \frac{[xX]+[yY]}{[xx]+[yy]}, \qquad b = \frac{[xY]-[yX]}{[xx]+[yy]}$$

$$c = X_0 = \frac{[X]-a[x]+b[y]}{n}, \quad d = Y_0 = \frac{[Y]-b[x]-a[y]}{n},$$

Örnek :

NN	y	x	Y	X
18	57257.77	54871.79	105689.54	103708.90
12	58977.85	55323.35	107408.52	104164.59
15	56571.26	56164.43	*104999.93*	*104999.88*
16	58770.79	54300.55	*107203.92*	*103141.31*
Σ	231577,67	220660,12	425301,91	416014,68

Σ/n	57894,418	55165,03	106325,478	104003,67
18	-636,65	-293,24	-635,94	-294,77
12	1083,43	158,32	1083,04	160,92
15	-1323,16	999,40	-1325,55	996,21
16	876,37	-864,48	878,44	-862,36

$[xX]$=1853020,46, $[xY]$=-1726198,54, $[yY]$= 4102022,43 $[yX]$=-1711880,78

$[xx]$ = 1857180,95 $[yy]$= 4097920,55

a = 0,99999016, b = -0,002404285

c = $X_0 = \dfrac{[X]-a[x]+b[y]}{n}$ = 48699,98829; d = $Y_0 = \dfrac{[Y]-b[x]-a[y]}{n}$ = 48564,26231

k = 0,999993 ; $\tan\varepsilon = \dfrac{a}{b}$ ise $\varepsilon = \operatorname{atan}\left(\dfrac{a}{b}\right)$