



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

VEZİRKÖPRÜ MESLEK YÜKSEKOKULU

ÇOCUK BAKIMI VE GENÇLİK HİZMETLERİ
BÖLÜMÜ/ ÇOCUK GELİŞİMİ PROGRAMI

TEMEL MATEMATİK

KÖKLÜ SAYILAR

11. Hafta

özenilen üniversite

Köklü Sayılar # $\sqrt[n]{x} = \sqrt{x}$

Kareköklü Sayılar:

$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$	$16^2=256$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$	$17^2=289$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$	$18^2=324$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$	$19^2=361$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$	$20^2=400$

Sayıların Kök Dışına Çıkarılması:

$$\begin{aligned}\sqrt{1} &= 1 \\ \sqrt{4} &= 2 \\ \sqrt{9} &= 3 \\ \sqrt{16} &= 4\end{aligned}$$

Karekökün içindeki sayı, bir sayının karesi ise, karesi olan sayı dışarı aynen çıkar.

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{12} &= \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{18} &= \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{20} &= \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{48} &= \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

Karekökün içindeki sayı bir kök dışına çıkabilen diğeri çıkarılabilecek iki çarpan olarak ayrılır. Karesi olan sayı dışarı çıkar. Diğeri içinde kalır.

Not: Bazı sayıları ayırmakta zorluk çekersek, OBEB-OKEK deki gibi çarpanlarına ayırırız.

Örnek: $\sqrt{96} = ?$

Gözüm:

$$\sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6} \quad \text{veya}$$

$$\sqrt{96} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$$

Örnek: $\sqrt{6300} = ?$

$$\text{Gözüm: } \sqrt{63 \cdot 100} = \sqrt{9 \cdot 7 \cdot 100} = 3 \cdot 10 \cdot \sqrt{7} = 30\sqrt{7}$$

Not: Reel sayılarda karekökün içi negatif olamaz. Aynı zamanda tüm çift dereceli kökler içinde aynı durum söz konusudur.

$$\begin{aligned}\sqrt{-2} &\notin \mathbb{R} & \sqrt[6]{-1} &\notin \mathbb{R} \\ \sqrt[4]{-7} &\notin \mathbb{R} & \sqrt[8]{-4} &\notin \mathbb{R}\end{aligned}$$

Not: Tek dereceli tüm köklü sayılar reel sayıdır.

$$\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7} \in \mathbb{R}$$

Not: $\sqrt[n]{a^n}$ ifadesinde,

n çift ise sonuç $|a|$ olur.
 n tek ise sonuç a

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$$

$$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$$

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3$$

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$$

$$\sqrt[4]{-2^4} \notin \mathbb{R}$$

Hatırlatma:

$$(-2)^4 \neq -2^4$$

$$\begin{aligned}(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) &\neq -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &\quad +16 \qquad \qquad -16\end{aligned}$$

Köklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma

Derecesi ve içi aynı olan köklü sayıların katsayıları arasında toplama ve çıkarma yapılır.

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} - c\sqrt{x} + d\sqrt{y} = (a-c)\sqrt{x} + (b+d)\sqrt{y}$$

Örnek: $\sqrt{48} + 2\sqrt{75} - \sqrt{147} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt{16 \cdot 3} + 2\sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{49 \cdot 3} = 4\sqrt{3} + 2 \cdot 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = (4+10-7)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

2008-ÖSS: $3\sqrt{8} + 2\sqrt{2} - (\sqrt{8} + \sqrt{2}) = ?$

Çözüm:

$$3 \cdot \sqrt{4 \cdot 2} + 2\sqrt{2} - (\sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{2}) = 3 \cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2} + \sqrt{2})$$

$$6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - (3\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

1999-ÖSS-İPT: $\sqrt{(-4)^2} - \sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt{25} = ?$

Çözüm:

$$|-4| - (-3) + 5 = 4 + 3 + 5 = 12$$

1995-ÖSS: $\sqrt{9} + \sqrt{(-4)^2} - \sqrt{(-5)^2} = ?$

Çözüm:

$$3 + |-4| - |-5| = 3 + 4 - 5 = 2$$

1990-ÖSS: $\sqrt{(-4)^2} - \sqrt{4^2} - (-2)^3 = ?$

Çözüm:

$$|-4| - |-4| - (-8) = 4 - 4 + 8 = 8$$

1982-ÖSS: Aşağıdaki irrasyonel sayılardan

hangisinin yaklaşık değeri bilinirse $\sqrt{432}$ değeri kolaylıkla bulunabilir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

Çözüm:

$$\sqrt{432} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

↓
13 bilinirse

Köklü Sayılarda Çarpma ve Bölme:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y} \quad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

$$* \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$* \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$* x\sqrt{a} \cdot y\sqrt{b} = x \cdot y \sqrt{a \cdot b}$$

$$* \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$* \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$$

$$* 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} = 6\sqrt{12} = 6 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a^2 \cdot b$$

$$(2\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{5}) = 4 \cdot 5 = 20$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$(5\sqrt{3})^2 = 25 \cdot 3 = 75$$

2007-ÖSS: $(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 + 2\sqrt{10} + 3 = ?$

Çözüm:

$$(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}) + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{10} + 3$$

$$= 2 - 2\sqrt{10} + 5 + 2\sqrt{10} + 3 = 10$$

2005-ÖSS: $\frac{\sqrt{4,44} + \sqrt{9,99}}{\sqrt{111}} = ?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{\frac{444}{100}} + \sqrt{\frac{999}{100}}}{\sqrt{111}} = \frac{\sqrt{4,44}}{\sqrt{100}} + \frac{\sqrt{9,99}}{\sqrt{100}}$$

$$= \frac{2\sqrt{111} + 3\sqrt{111}}{10} = \frac{5\sqrt{111}}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{111}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

2003-ÖSS: $\sqrt{10} \cdot (\sqrt{6,4} + \sqrt{0,4}) = ?$

Çözüm:

$$\sqrt{10} \cdot \left(\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}} \right) = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{8+2}{\sqrt{10}} \right) = 10$$

2003-ÖSS: $a = \sqrt{2} + 1$ ise $a(a-1) \cdot (a-2) = ?$

Çözüm:

$$(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}-1) = \sqrt{2} (2 - (\sqrt{2}+1)) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

1997-ÖSS: $\frac{\sqrt{40} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{80}} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt{\frac{40 \cdot 18}{80}} = \sqrt{9} = 3$$

1996-ÖSS: $\frac{\sqrt{0,48} - \sqrt{0,27}}{\sqrt{1,47}} = ?$

Çözüm:

$$\frac{\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{100}} - \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{100}}}{\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{100}}} = \frac{\frac{\sqrt{16 \cdot 3}}{10} - \frac{\sqrt{9 \cdot 3}}{10}}{\frac{\sqrt{49 \cdot 3}}{10}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{10}}{\frac{7\sqrt{3}}{10}} = \frac{\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{7}$$

1991-ÖSS: $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{0,16} + \sqrt{0,36}} = ?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{36}}{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} + \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}}} = \frac{6}{\frac{4}{10} + \frac{6}{10}} = \frac{6}{\frac{10}{10}} = 6$$

1983-ÖSS: $\sqrt{0,25} - \sqrt{121} + \sqrt{1,44} = ?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} - 11 + \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} - \frac{11}{10} + \frac{12}{10} = \frac{17-110}{10} = 9,3$$

Eşlenik (Paydanın Rasyonel Yapılması)

Payda Tek Terimli ise,

Paydadaki köklü ifade ile kesir genişletilir.

$$\bullet \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\bullet \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Payda $x+\sqrt{y}$ ya da $x-\sqrt{y}$ biçiminde ise eşlenikleri ile çarpılır.

$$\bullet \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{-1} = -(1+\sqrt{2})$$

$$\bullet \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{6-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2}{4-2} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

2010-YGS: $\frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = ?$

Çözüm:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{6\sqrt{3}}{3} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} + 1$$

2010-YGS: Hangisi rasyonel sayıdır?

A) $\sqrt{2}+1$ B) $2\sqrt{2}-1$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ E) $\frac{2\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-3}$

Çözüm: A, B ve C şıklarında köklü ifadeler yok edilemeyeceğinden cevap olamazlar.

D: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1} = 2-\sqrt{2}$ cevap olamaz.
E: $\frac{2\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-3} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3(\sqrt{2}-1)} = \frac{2}{3}$ cevap E şıkkı.

2009-ÖSS: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = ?$

Çözüm:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}+1)}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}{1} = -2$$

2001-ÖSS: $\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = ?$

Çözüm: Paydalar eşitlenirse,

$$\frac{\frac{2-1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

1998-ÖSS: $\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} = ?$

Çözüm:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

1996-ÖSS: $\frac{3}{3+2\sqrt{2}} + \frac{3}{3-2\sqrt{2}} = ?$

Çözüm:

$$\frac{3}{3+2\sqrt{2}} + \frac{3}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3(3-2\sqrt{2}) + 3(3+2\sqrt{2})}{9-8} = \frac{3(3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2})}{1} = 3 \cdot 6 = 18$$

1994-ÖSS: $a = \sqrt{6}+1, b = \sqrt{6}-1, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = ?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1} + \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1} = \frac{(\sqrt{6}+1)^2 + (\sqrt{6}-1)^2}{6-1} = \frac{6+2\sqrt{6}+1+6-2\sqrt{6}+1}{5} = \frac{14}{5}$$

1987-ÖSS: $\sqrt{49} + \sqrt{0,9} = ?$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = \frac{7+3}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

1992-ÖSS: $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$ ise b nin

a türünden değeri nedir?

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{ab}, \frac{a+b}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}, a+b = ab$$

$$a = ab - b, a = b(a-1), b = \frac{a}{a-1}$$

Köklerin Derecelerini Eşitlemek:

$$\sqrt[n]{x} \Rightarrow \sqrt[m \cdot n]{x^m}$$

Kökün derecesi ve kökün içi aynı kuvvetle çarpılabilir.

$$\sqrt[m \cdot p]{x^{m \cdot n}} \Rightarrow \sqrt[m]{x^{p \cdot n}} = \sqrt[p]{x^n}$$

Kökün içi ve derecesi sadeleştirilebilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} &= \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} &= \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32} \\ \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} &= \sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{72} \end{aligned}$$

Köklü Sayılarda Sıralama:

- * Köklerin dereceleri eşitlenebilir.
- * Köklerin içi eşitlenebilir.

Örnek: $a = \sqrt{3}, b = \sqrt[4]{2}, c = \sqrt[3]{3}$ ise a, b, c yi sıralayın?

Çözüm:

- * Köklerin dereceleri 12 de eşitlenir.

$$a = \sqrt[12]{3^6}, b = \sqrt[12]{2^3}, c = \sqrt[12]{3^4}$$

$$3^6 > 3^4 > 2^3 \text{ old. } a > c > b$$

2011-YGS: $x = \sqrt[3]{4}, y = \sqrt[4]{8}, z = \sqrt[5]{16}$

x, y, z yi sıralayın?

Çözüm:

- * Köklerin dereceleri 60 ta eşitlenir.

$$x = \sqrt[60]{2^8} = \sqrt[60]{(2^2)^4} = \sqrt[60]{2^{40}}$$

$$y = \sqrt[60]{2^9} = \sqrt[60]{(2^3)^3} = \sqrt[60]{2^{45}}$$

$$z = \sqrt[60]{2^4} = \sqrt[60]{(2^4)^2} = \sqrt[60]{2^{48}}$$

$$2^{48} > 2^{45} > 2^{40} \text{ old } z > y > x$$

2011-LYS: $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ ise x ne olabilir?

A) $\frac{1}{2}$, B) $\frac{3}{2}$, C) $\frac{4}{3}$, D) $\frac{7}{4}$, E) $\frac{6}{5}$

Çözüm: $(\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2$, $2 < x^2 < 3$

A) $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \in (0,1)$ D) $(\frac{7}{4})^2 = \frac{49}{16} \in (3,4)$

B) $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \in (2,3)$ E) $(\frac{6}{5})^2 = \frac{36}{25} \in (1,2)$

C) $(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9} \in (1,2)$

Kökli Sayıların Üslü Olarak Yazılması

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Örnek:

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

2007-ÖSS: $3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27} = ?$

Çözüm:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

1998-ÖSS: $3\sqrt{\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

1997-ÖSS: $\sqrt[4]{0,0256} \cdot \sqrt[3]{(0,008)^{-1}} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt[4]{\frac{256}{10.000}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{8}} = \sqrt[4]{\frac{4^4}{10^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{10^3}{2^3}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{2} = 2$$

Örnek: $\frac{\sqrt{4^{x+1}}}{\sqrt[3]{2^{x-6}}} = 16$ ise x kaçtır?

Çözüm: $\frac{2^{\frac{x+1}{2}}}{2^{\frac{x-6}{3}}} = 2^4$, $2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{x-6}{3}} \cdot 2^4$

$$\Rightarrow 2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{x-6}{3} + 4} \Rightarrow x+1 = \frac{x-6}{3} + 4$$

$$x-3 = \frac{x-6}{3} , 3x-9 = x-6 , 2x = 3 , x = \frac{3}{2}$$

Örnek: $\frac{\sqrt[5]{3^{5x-10}}}{\sqrt{9^{2x-1}}} = \frac{1}{27}$ ise $x = ?$

Çözüm:

$$\frac{3^{\frac{5(x-2)}{5}}}{3^{\frac{2(2x-1)}{2}}} = \frac{1}{3^3} , 3^{x-2} = 3^{2x-1} , 3^{x+1} = 3^{2x-1}$$

$$\Rightarrow x+1 = 2x-1 , x = 2$$

1983-ÖSS: $\frac{\sqrt{9^{3x+1}}}{\sqrt[3]{9^{x-3y}}} = 27$ ise $y = ?$

Çözüm:

$$\frac{3^{\frac{3(x+1)}{2}}}{3^{\frac{3(x-3y)}{3}}} = 3^3 , 3^{x+1} = 3^{x-3y+3} , 3^{x+1} = 3^{x-y+3}$$

$$\Rightarrow x+1 = x-y+3 , y = 2$$

Katsayının Kök içine Alınması:

$$\sqrt[n]{a \cdot x} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{x}$$

Örnek:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

$$2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{32 \cdot 2} = \sqrt[5]{64}$$

Örnek: $2\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{36a}$ ise $a = ?$

Çözüm:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 12} = \sqrt[3]{36a} , 8 \cdot 12 = 36a , a = \frac{8}{3}$$

örnek: $2\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{x}$ ise x kaçtır?

çözüm:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{27 \cdot x}, \quad 8\sqrt[3]{3} = 27\sqrt[3]{x}, \quad x = \frac{8}{9}$$

örnek: $3\sqrt{2} = \sqrt{2x}$ ise x kaçtır?

çözüm:

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{(2x)^2}, \quad 4 = 8x^2, \quad \frac{1}{2} = x^2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1991-ÖYS: $x \cdot \sqrt{0.4} = 1$ ise $x = ?$

çözüm:

$$\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{10}} = \sqrt{1}, \quad x^2 \cdot \frac{4}{10} = 1, \quad x^2 = \frac{10}{4}, \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

İç içe kökler:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[k]{x}}} = \sqrt[n \cdot m \cdot k]{x}$$

$$\sqrt[n]{x^m y} = \sqrt[n \cdot m]{x^m y}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^a y^b z}} = \sqrt[m \cdot n]{x^a y^b z}$$

örnek:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{16}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[18]{2^6 \cdot 2^2} = \sqrt[18]{2^8} = \sqrt{2}$$

2000-ÖSS: $3\sqrt[5]{2x} = 3\sqrt[5]{2 \cdot 3}$

çözüm:

$$\sqrt[5]{2^5 \cdot x} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5}, \quad \sqrt[5]{2^5 \cdot x} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5}$$

$$\Rightarrow 2^5 \cdot x = 2^5 \cdot 3^5, \quad x = 3^5$$

* $x, y \in \mathbb{R}^+, x > y, a = x+y, b = x \cdot y$ ise

$$\sqrt{a+2b} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

örnek: $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = ?$

çözüm:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3-1} = \sqrt{3-1}$$

örnek: $\sqrt{10+2\sqrt{21}} = ?$

çözüm:

$$\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{7+3}$$

örnek: $\sqrt{5-2\sqrt{4}} = ?$

çözüm:

$$\sqrt{5-2\sqrt{4}} = \sqrt{3-1}$$

örnek: $\sqrt{4+\sqrt{15}} = ?$

çözüm:

$$\sqrt{4+2\sqrt{\frac{15}{4}}} = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5+3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10+6}}{2}$$

1995-ÖYS: $\sqrt{6-2\sqrt{5}}, \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ sayılarının aritmetik ortalaması nedir?

çözüm: Aritmetik Ortalama = $\frac{\text{Terimlerin Toplamı}}{\text{Terim Sayısı}}$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}, \sqrt{6+2\sqrt{5}} \quad A.O = \frac{\sqrt{5-1} + \sqrt{5+1}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

1990-ÖYS: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = ?$

çözüm:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1 \Rightarrow 2$$

Not: $\sqrt[n]{f(x)}$ ifadesinde,

n tek ise ifade daima reel sayıdır.
 n çift iken $f(x) \geq 0$ için reel sayıdır.

Örnek: $\sqrt{3x-9} + \sqrt[4]{7-x}$ ifadesi reel sayı
 ise x hangi aralıktadır?

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} 3x-9 \geq 0, \quad x \geq 3 \\ 7-x \geq 0, \quad x \leq 7 \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq 3, \quad [3, 7]$$

Örnek: $A = \frac{\sqrt{x-4} + 4x}{3x + \sqrt{4-x}}$ reel sayı ise $A = ?$

Çözüm:

$x-4 \geq 0$ ve $4-x \geq 0$ old. $x=4$ olur. $x=4$ için,

$$A = \frac{\sqrt{0} + 16}{12 + \sqrt{0}} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Alıştırıcılar:

1) $\sqrt{\frac{4}{9} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

2) $\sqrt{\frac{9}{25} - \frac{6}{35} + \frac{1}{49}} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right)^2} = \left|\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right| = \frac{16}{35}$$

3) $\sqrt{100 \cdot 102 + 1} = ?$

Çözüm: $n=100$ denirse

$$\sqrt{n \cdot (n+2) + 1} = \sqrt{n^2 + 2n + 1} = \sqrt{(n+1)^2} = \sqrt{101^2} = 101$$

4) $\sqrt[3]{2007 \cdot 1990 - 2006 \cdot 1991} = ?$

Çözüm:

$a=1990$, $b=2006$ denirse

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(b+1) \cdot a - b(a+1)} &= \sqrt[3]{ab+a-ab-b} \\ &= \sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{1990-2006} = \sqrt[3]{-16} \end{aligned}$$

5) $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = ?$

Çözüm: $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+1) - \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

$$= \sqrt{3} + 1$$

6) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}} = ?$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})} &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

7) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = m$ ise $\sqrt{x+5} + \sqrt{x}$ in m cinsinden değeri nedir?

Çözüm:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = m$$

$$x \sqrt{x+5} - \sqrt{x} = n$$

$$x+5-x = m \cdot n, \quad 5 = m \cdot n, \quad n = \frac{5}{m}$$

8) $\sqrt{7} - \sqrt{2} = A$ ise $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ in A cinsinden değeri nedir?

Çözüm:

$$\sqrt{7} - \sqrt{2} = A$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{2} = B$$

$$7-2 = A \cdot B, \quad 5 = A \cdot B, \quad B = \frac{5}{A}$$

9) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^x = 4$ ise $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^x$ kaçtır?

Cözüm:

$$\begin{aligned} (\sqrt{7}+\sqrt{3})^x &= 4 \\ x \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{3})^x &= A \\ 4^x &= 4A, \quad A = \frac{4^x}{4}, \quad A = 4^{x-1} \end{aligned}$$

İç içe Sonsuz Kökler:

Tekrar edilen kısma x denilip, x 'e eşitlenerek işlem yapılır.

Örnek: $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}}}$

Cözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt{30+x} &= x, \quad 30+x = x^2 \\ x^2 - x - 30 &= 0, \quad (x-6) \cdot (x+5) = 0 \\ x &= -6 \quad x = 6 \quad x \neq -5 \end{aligned}$$

Örnek: Aynı soruyu kısa yoldan çözünüz?

Cözüm: İç içe sonsuz köklerde toplama ve çıkarmada verilen sayı ardışık iki tamsayının çarpımı olarak yazılıyorsa toplamada büyük olanı, çıkarmada ise küçük olanı alınır.

$$\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}} = 6$$

Örnek: $\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\dots}}} + \sqrt{42+\sqrt{42+\dots}} = ?$

$$\begin{aligned} \sqrt{72-\sqrt{72-\dots}} &+ \sqrt{42+\sqrt{42+\dots}} \\ 9 \quad 8 & \quad 7 \quad 6 \end{aligned}$$

Çıkarmada küçük, toplamada büyük olanı aldık.

$$8+7=15$$

Örnek: $\sqrt{27:\sqrt{27:\sqrt{27:\dots}}} = ?$

Cözüm:

$$\sqrt{27:x} = x, \quad \sqrt{\frac{27}{x}} = x, \quad \frac{27}{x} = x^2, \quad x^3 = 27, \quad x = 3$$

Not: $\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \dots}}} = \sqrt[n]{a}$
 $\sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \dots}}} = \sqrt[n]{a}$

Pratik yol:

$$\sqrt{27:\sqrt{27:\dots}} = \sqrt[24]{27} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Örnek: $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}} = ?$

Cözüm:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2\sqrt{2 \cdot x}} &= x \\ \sqrt[6]{8x} &= x \\ 8x &= x^6, \quad x^6 - 8x = 0, \quad x(x^5 - 8) = 0 \\ \Rightarrow x &\neq 0, \quad x^5 = 8, \quad x = \sqrt[5]{8} \end{aligned}$$

1975-Üss: $2\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\dots}}} - \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\dots}}} = 6$,
 $a \in \mathbb{R}^+$ ise a kaçtır?

Cözüm:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a} - \sqrt[3]{a} &= 6 \\ 2a - \sqrt{a} &= 6, \quad 2a - 6 = \sqrt{a} \\ (2a-6)^2 &= (\sqrt{a})^2, \quad 4a^2 - 24a + 36 = a \\ 4a^2 - 25a + 36 &= 0 \\ 4a &\begin{matrix} \nearrow -9 \\ \searrow -4 \end{matrix} \quad 4a-9=0 \Rightarrow a = \frac{9}{4} \\ a-4 &= 0 \Rightarrow a=4 \\ a = \frac{9}{4}, \quad 2a-6 &= \sqrt{a} \text{ denk. sağlamaz.} \\ a=4, \quad \text{denklemi sağlar.} \\ a &= 4 \end{aligned}$$

KAYNAKLAR

Matematik Ders Notları - Ayşe Yıldırım & Ceyhun Yavuz
<http://calameo.download/003359034eff296032d3c> (Eriřim 23.08.2018)

http://www.buders.com/DOKUMAN/bukaynak/matematik_calisma_sorulari/denklem_kurma_problemleri_calisma_kagidi_1.pdf (Eriřim 14.04.2017)

Temel Matematik – Basri ÇELİK – Dora Basım Yayın