



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

VEZİRKÖPRÜ MESLEK YÜKSEKOKULU

ÇOCUK BAKIMI VE GENÇLİK HİZMETLERİ
BÖLÜMÜ/ ÇOCUK GELİŞİMİ PROGRAMI

TEMEL MATEMATİK

ASAL SAYILAR

4. Hafta

özenilen üniversite

ASAL SAYILAR ~ POZİTİF TAM BÖLENLER VE FAKTÖRİYEL

ASAL SAYI: 1 ve kendisinden başka bölene olmayan 1 den büyük sayılara asal sayı adını veriyoruz.

Asal olmayan 1 den büyük sayılara bileşik sayı adını veriyoruz.

Asal sayılar: $\{2, 3, 5, 7, \dots\}$

- En küçük asal sayı 2 dir.
- Asal sayılar sonsuz tanedir.
- Asal sayıları veren bir formül yoktur. Ancak aşağıda belirtilen şekilde asal olup olmadığını belirleyebiliriz.

• Mesela 143 sayısı için

$\sqrt{143} \cong 11,9$ olduğundan bu değere kadar olan asal sayılar yazılır.

$\underbrace{2, 3, 5, 7, 11}$

143 hiç birine bölünmezse asal sayıdır. ama 143 sayısı 11 ile bölündüğünden asal sayı değildir.

• Mesela 97 sayısı için

$\sqrt{97} \cong 9,8$ olduğundan bu değere kadar olan asal sayılar yazılır.

$\underbrace{2, 3, 5, 7}$

97 hiç birine bölünmediğinden asal sayıdır.

- Asal sayılardan sadece biri çifttir, o da "2" dir.
- Asal sayıların çarpanları kendisi ve 1 dir.

$$x \cdot y = 37$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 37 \\ 37 \ 1 \\ -1 \ -37 \\ \hline -37 \ 1 \end{array}$$

1) x ve y doğal sayılardır.

$$x^2 = 4y^2 + 29 \quad \text{ise} \quad x+y \text{ nedir?}$$

$$x^2 - 4y^2 = 29$$

$$\underbrace{(x-2y)}_1 \cdot \underbrace{(x+2y)}_{29} = 29$$

$$x-2y=1$$

$$x+2y=29$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 2x=30 \Rightarrow x=15 \\ y=7 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x=15 \\ y=7 \end{array} \right\} x+y=22$$

2) $a, b \in \mathbb{N}^+$

$$a^2 - b^2 = 41 \quad \text{ise} \quad a \cdot b \text{ nedir?}$$

$$\underbrace{(a-b)}_1 \cdot \underbrace{(a+b)}_{41} = 41$$

$$a-b=1$$

$$+ \quad a+b=41$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline 2a=42 \Rightarrow a=21 \\ b=20 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} a=21 \\ b=20 \end{array} \right\} a \cdot b = 420$$

3) x ve y sayma sayılarıdır.

$$(x-3y) \cdot (x+y+2) = 23 \quad \text{olduğuna göre}$$

$$x-y \text{ nedir?}$$

$$\underbrace{(x-3y)}_1 \cdot \underbrace{(x+y+2)}_{23} = 23$$

$$\begin{array}{r} - \quad x-3y=1 \\ x+y=21 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} -x+3y=-1 \\ x+y=21 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4y=20 \Rightarrow y=5 \\ x=16 \end{array}$$

$$16-5=11$$

4) x, y, z asal sayılardır.

$$(x-y) \cdot z = 23 \quad \text{ise} \quad x+y+z \text{ toplamı nedir?}$$

$$\underbrace{(x-y)}_1 \cdot \underbrace{z}_{23} = 23$$

$$x-y=1 \Rightarrow 3+2+23=28$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \downarrow \\ 3 \ 2 \end{array}$$

• **Aralarında asal sayılar:** 1 den başka ortak böleni olmayan iki veya daha fazla sayıya aralarında asal sayılar adını veriyoruz.

• Sayıların aralarında asal olması için asal olmalarına gerek yoktur.

$$(3, 7)$$

$$(3, 11)$$

$$(12, 7)$$

$$(3, 6, 11)$$

:

NOT: a ile b aralarında asal ve x ile y aralarında asal ise

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$a = x$$

$$b = y \text{ dir.}$$

5) a ile b aralarında asal ve $\frac{a}{b} = \frac{48}{56}$

ise a+b nedir?

$$\frac{a}{b} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=6 \\ b=7 \end{array} \right\} 6+7=13$$

6) (a-b) ile (3a+b) aralarında asal ve

$$\frac{a-b}{3a+b} = \frac{9}{51} \text{ ise } a, b \text{ nedir?}$$

$$\frac{a-b}{3a+b} = \frac{3}{17} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a-b=3 \\ 3a+b=17 \end{array} \right\} \begin{array}{l} + \\ 4a=20 \Rightarrow a=5 \quad b=2 \\ a \cdot b = 10 \end{array}$$

7) (x+3y) ile (2x-y) aralarında asal iki doğal sayıdır.

$$\frac{x+3y}{2x-y} = \frac{78}{30} \text{ ise } x+y \text{ nedir?}$$

$$\frac{x+3y}{2x-y} = \frac{78}{30} = \frac{13}{5} \Rightarrow \begin{array}{l} -2/x+3y=13 \\ 2x-y=5 \\ -7y=-21 \Rightarrow y=3 \\ x=4 \\ x+y=7 \end{array}$$

• BÖLEN SAYISI:

a, b, c farklı asallar, m, n, k pozitif tam sayılar olmak üzere

$$A = a^m \cdot b^n \cdot c^k$$

$$\text{Pozitif tam bölen sayısı: } (m+1) \cdot (n+1) \cdot (k+1)$$

$$\text{Negatif tam bölen sayısı: } (m+1) \cdot (n+1) \cdot (k+1)$$

$$\text{Tam bölen sayısı: } 2 \cdot (m+1) \cdot (n+1) \cdot (k+1)$$

• A'nın pozitif tam bölenlerinin toplamı:

$$\frac{1-a^{m+1}}{1-a} \cdot \frac{1-b^{n+1}}{1-b} \cdot \frac{1-c^{k+1}}{1-c}$$

ya da:

$$(1+a+a^2+\dots+a^m) \cdot (1+b+b^2+\dots+b^n) \cdot (1+c+c^2+\dots+c^k)$$

• Tam bölen sayıları toplamı daima sıfırdır.

• Pozitif tam bölenler çarpımı: $\frac{A \cdot B \cdot C}{2}$

• A'dan küçük ya da A'ya eşit olan A ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını $A(x)$ ile ifade edersek:

$$A(x) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{c}\right)$$

A'dan küçük ya da A'ya eşit olan A ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların toplamı: $\frac{A}{2} \cdot A(x)$

• **Pozitif tek bölen:** Asal çarpanlarına ayrıldıktan sonra tabanı çift olan atılır ve geride kalanların pozitif bölen sayısına bakılır.

• **Pozitif çift bölen:** Pozitif tam bölenlerden pozitif tek bölenler çıkarılarak bulunur. ya da 2 parantezine alınarak hesaplanır.

$$A = 2 \cdot (x)$$

pozitif bölen sayısı

8) 120 sayısının

a) Pozitif tam bölen sayısı kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ \text{P.B.S} = 4 \cdot 2 \cdot 2 \\ = 16 \end{array}$$

b) Tam bölen sayısı kaçtır?

$$2 \cdot 16 = 32$$

c) Asal bölen sayısı kaçtır?

$$\{2, 3, 5\} \Rightarrow 3 \text{ tane dir.}$$

d) Asal bölenlerin toplamı nedir?

$$2+3+5=10$$

e) Asal olmayan pozitif tam bölen sayısı kaçtır?

$$16 - 3 = 13$$

f) Asal olmayan tam bölen sayısı kaçtır?

$$32 - 3 = 29$$

g) Pozitif tam bölenlerin toplamı kaçtır?

$$\begin{aligned} &= \frac{1-2^4}{1-2} \cdot \frac{1-3^2}{1-3} \cdot \frac{1-5^2}{1-5} \\ &= \frac{-15}{-1} \cdot \frac{-8}{-2} \cdot \frac{-24}{-4} = 15 \cdot 4 \cdot 6 = 360 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ya da } &(1+2+2^2+2^3) \cdot (1+3^1) \cdot (1+5^1) \\ &= 15 \cdot 4 \cdot 6 \\ &= 360 \end{aligned}$$

h) Asal olmayan pozitif tam bölenlerin toplamı nedir?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pozitif tam bölen} \\ \text{toplamı} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{asal bölenlerin} \\ \text{toplamı} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= 360 - 10 \\ &= 350 \end{aligned}$$

i) Asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı nedir?

$$\begin{array}{r} 120 \\ \hline 120 \\ -2 \\ \hline 118 \\ -3 \\ \hline 115 \\ -4 \\ \hline 111 \\ -5 \\ \hline 106 \\ \hline 106 \\ -6 \\ \hline 100 \\ -7 \\ \hline 93 \\ -8 \\ \hline 85 \\ -9 \\ \hline 76 \\ -10 \\ \hline 66 \\ -11 \\ \hline 55 \\ -12 \\ \hline 43 \\ -13 \\ \hline 30 \\ -14 \\ \hline 16 \\ -15 \\ \hline 1 \\ -16 \\ \hline 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \\ -8 \\ -9 \\ -10 \\ -11 \\ -12 \\ -13 \\ -14 \\ -15 \\ -16 \end{array} \right\} -10$$

j) Pozitif tek bölen sayısı nedir?

$$2 \cdot 5 \cdot 3^1 \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4$$

k) Tek bölen sayısı nedir?

$$2 \cdot 4 = 8$$

negatiflerde var.

l) Pozitif çift bölen sayısı kaçtır?

$$120 = 2 \cdot (60)$$

$$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \Rightarrow \text{P.B.S} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

m) Asal olmayan pozitif çift bölen sayısı nedir?

$$12 - 1 = 11$$

asal olan
ve çift olan bir
tane sayı var (2)

n) Pozitif tam sayı bölenlerinden kaç tanesi 6'nın katıdır?

$$120 = 6 \cdot (20)$$

$$20 = 2^2 \cdot 5^1 \Rightarrow \text{P.B.S} = 3 \cdot 2 = 6$$

- 9) $6 \cdot 5^x$ sayısını bölebilen 40 tane pozitif tam sayı olduğuna göre x nedir?

$$3^1 \cdot 2^1 \cdot 5^x$$

$$2 \cdot 2 \cdot (x+1) = 40$$

$$4 \cdot (x+1) = 40$$

$$x+1 = 10 \Rightarrow x = 9$$

- 10) $\underbrace{400 \dots 0}_{n \text{ tane}}$ sayısının 70 tane tam böleni varsa n kaç olmalıdır?

$$2^2 \cdot 10^n = 2^2 \cdot 5^n \cdot 2^n = 2^{n+2} \cdot 5^n$$

$$2 \cdot (n+3) \cdot (n+1) = 70$$

$$\underbrace{(n+3)}_7 \cdot \underbrace{(n+1)}_5 = 35$$

$$n = 4$$

- 11) $8^n \cdot 30$ sayısının asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 65 ise n kaçtır?

$$2^{3n} \cdot 3^1 \cdot 2^1 \cdot 5^1 = 2^{3n+2} \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

$$(3n+2) \cdot 2 \cdot 2 = 68$$

$$(3n+2) \cdot 4 = 68$$

$$3n+2 = 17$$

$$3n = 15 \Rightarrow n = 5$$

- 12) n bir doğal sayıdır.

$12 \cdot 20^n$ sayısının 144 tane tam böleni varsa n kaçtır?

$$2^2 \cdot 3^1 \cdot 2^{2n} \cdot 5^n \Rightarrow 2^{2n+2} \cdot 3^1 \cdot 5^n$$

$$2 \cdot (2n+3) \cdot 2 \cdot (n+1) = 144$$

$$(2n+3) \cdot (n+1) = 36$$

$$2n^2 + 5n + 3 = 36$$

$$2n^2 + 5n - 33 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2n \\ +11 \\ -3 \end{array} \Rightarrow n = \frac{-11}{2}$$

$$n = 3$$

- 13) $x, y \in \mathbb{N}^+$

$x \cdot 48 = y^3$ ise $x+y$ en az kaçtır?

$$\begin{array}{r} 48 \\ 24 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ \end{array}$$

$$x \cdot 2^4 \cdot 3^1 = y^3$$

$$2^2 \cdot 3^2$$

😊 sağ taraf bir sayının kübü olduğundan sol tarafında küpü ifade- lere tamamlamak lazım!

$$x = 36$$

$$2^6 \cdot 3^3 = y^3 \Rightarrow (2^2 \cdot 3)^3 = y^3$$

$$\Rightarrow y = 12$$

$$x+y = 48$$

- 14) $x, y \in \mathbb{N}^+$

$360 \cdot x = y^2$ ise $x+y$ en az kaçtır?

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot x = y^2$$

$$2^1 \cdot 5^1$$

$$x = 10 \text{ ve } 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = y^2$$

$$(2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = y^2$$

$$\Rightarrow y = 60 \quad x+y = 70$$

- 15) x ve y doğal sayılardır.

$90 \cdot x = (y+3)^3$ ise y en az kaçtır?

$$3^2 \cdot 5^1 \cdot 2^1 \cdot x = (y+3)^3$$

$$5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^1$$

$$3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (y+3)^3$$

$$(3 \cdot 5 \cdot 2)^3 = (y+3)^3$$

$$30^3 = (y+3)^3$$

$$y+3 = 30$$

$$y = 27$$

FAKTÖRİYEL

1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına $n!$ adını veriyoruz.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

⋮

16) $\frac{14! + 13!}{15! + 14!}$ işleminin sonucu nedir?

$$\frac{14 \cdot 13! + 13!}{15 \cdot 14! + 14 \cdot 13!} = \frac{13! (14 + 1)}{13! \cdot 14 \cdot (15 + 1)} = \frac{15}{14 \cdot 16} = \frac{15}{224}$$

17) $\frac{12! - 11!}{10! + 9!}$ işleminin sonucu nedir?

$$\frac{12 \cdot 11! - 11!}{10 \cdot 9! + 9!} = \frac{11! (12 - 1)}{9! \cdot (10 + 1)} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9! \cdot 11}{9! \cdot 11} = 110$$

18) $\frac{(n+1)! - 2 \cdot n!}{(n+1)! + n!}$ işleminin sonucu nedir?

$$\frac{(n+1) \cdot n! - 2 \cdot n!}{(n+1) \cdot n! + n!} = \frac{n! \cdot (n+1 - 2)}{n! \cdot (n+1 + 1)} = \frac{n-1}{n+2}$$

19) $\frac{(n+1)! - 2 \cdot (n-1)!}{n! - (n-1)!} = 7$ ise n kaçtır?

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)! - 2 \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)! - (n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)! - 2 \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot (n-1)}$$

$$\frac{(n+2) \cdot (n-1)}{(n-1)} = 7$$

$$n+2 = 7 \Rightarrow n = 5$$

20) a ve b birer pozitif tam sayıdır.

$$\frac{a!}{b!} = 30 \text{ ise } a+b \text{ nin alacağı değerler nedir?}$$

$$a! = 30 \cdot b!$$

$$a! = 30 \cdot 29! \Rightarrow \begin{cases} b=29 \\ a=30 \end{cases} \Rightarrow a+b=59$$

$$a! = 6 \cdot 5 \cdot 4! \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow a+b=10$$

21) $1! + 2! + 3! + \dots + 50!$ toplamının birler basamağında hangi rakam vardır?

$$1+2+6+24+120+720+\dots$$

5 ve 5 ten sonrasının sonu hep sıfırdır.

$$= 1+2+6+24 = 33$$

22) $0! + 1! + 2! + \dots + 150!$ toplamının 28 ile bölümünden kalan nedir?

$$1+1+2+6+24+120+720+5040+\dots$$

içinde 7 ve 4 olduğundan 28 ile tam bölünür.

$$\begin{array}{r} 874 \overline{) 28} \\ \underline{-84} \\ 034 \\ \underline{-28} \\ 6 \end{array}$$

23) $A = 11!$ olmak üzere

$11! + 10! + 9!$ toplamının A çnsinden değeri nedir?

$$11 \cdot 10 \cdot 9! + 10 \cdot 9! + 9! = 9! \cdot (110 + 10 + 1)$$

$$= 9! \cdot 121 = \frac{A}{11 \cdot 10} \cdot 121$$

$$A = 11 \cdot 10 \cdot 9! \Rightarrow 9! = \frac{A}{11 \cdot 10} = \frac{11A}{110}$$

NOT :) a bir asal sayı ve $b, x, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$n! = a^x \cdot b$ ifadesinde x 'in olabileceği en büyük değer sorulduğunda n sayısı a ve a 'nın kuvvetlerine bölünür ve oluşan bütün bölümler toplanır.

$$\begin{array}{r} n \mid a \\ \textcircled{k} \mid a \\ \textcircled{l} \mid a \\ \textcircled{m} \mid a \\ \textcircled{n} \mid a \\ \dots \mid a \\ \textcircled{2} \end{array}$$

x 'in en büyük değeri: $k + l + m + n + \dots + 2$

24) $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ve $24! = 3^a \cdot b$ ise a 'nın olabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değeri nedir?

$$\begin{array}{r} 24 \mid 3 \\ \textcircled{8} \mid 3 \\ \textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{en fazla: } 10 \\ \text{en az: } 1 \end{array}$$

$\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ değerlerinin hepsini alır.

25) $x, y \in \mathbb{Z}^+$ ve $23! = 4^x \cdot y$ ise x 'in en büyük değeri nedir?

$$23! = 2^{2x} \cdot y$$

$$\begin{array}{r} 23 \mid 2 \\ 11 \mid 2 \\ 5 \mid 2 \\ 2 \mid 2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (2x)_{\max} = 19 \\ \Rightarrow x = 9 \text{ (en fazla)} \end{array}$$

26) $x, y \in \mathbb{Z}^+$ ve $30! = 8^x \cdot y$ ise x 'in alacağı en büyük değer kaçtır?

$$30! = 2^{3x} \cdot y$$

$$\begin{array}{r} 30 \mid 2 \\ 15 \mid 2 \\ 7 \mid 2 \\ 3 \mid 2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (3x)_{\max} = 26 \\ \Rightarrow x = 8 \end{array}$$

27) $x, y \in \mathbb{N}^+$ ve $24! = 3^x \cdot y$ ise x 'in alacağı değerler toplamı nedir?

$$\begin{array}{r} 24 \mid 3 \\ 8 \mid 3 \\ 2 \end{array}$$

$$x \text{ en fazla: } 10$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

28) $x, y \in \mathbb{N}^+$ ve $45! = 15^x \cdot y$ ise x en fazla kaçtır?

$$45! = 3^x \cdot 5^x \cdot y$$

;) daima tabanı büyük olana bölünür.

$$\begin{array}{r} 45 \mid 5 \\ 9 \mid 5 \\ 1 \end{array}$$

$$x = 10 \text{ (en fazla)}$$

29) $\frac{44!}{3^x \cdot 5^y}$ ifadesinin sonucu bir tam sayı olduğuna göre $x + y$ en fazla kaçtır?

$$\begin{array}{r} 44 \mid 3 \\ 14 \mid 3 \\ 4 \mid 3 \\ 1 \end{array}$$

$$x = 19$$

$$\begin{array}{r} 44 \mid 5 \\ 8 \mid 5 \\ 1 \end{array} \quad y = 9$$

$$x + y = 28$$

30) $57!$ sayısının sonunda kaç tane sıfır vardır?

$$57! = 10^x \cdot y$$

$$57! = 5^x \cdot 2^x \cdot y$$

$$\begin{array}{r} 57 \mid 5 \\ 11 \mid 5 \\ 2 \end{array}$$

$$x = 13 \text{ (13 tane sıfır vardır)}$$

31) $63! - 1$ sayısının sonunda kaç tane dokuz vardır?

$$63! = 10^x \cdot y$$

$$63! = 5^x \cdot 2^x \cdot y$$

$$\begin{array}{r} 63 \overline{) 5} \\ 12 \overline{) 5} \\ 2 \end{array}$$

$63!$ 'ın sonunda 14 tane sıfır vardır.
 $63! - 1$ 'in sonundada 14 tane dokuz vardır.

32) $30!$ sayısı 4 tabanında yazılırsa sonunda kaç tane sıfır vardır?

$$30! = 4^x \cdot y$$

$$30! = 2^{2x} \cdot y$$

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 2} \\ 15 \overline{) 2} \\ 7 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 2} \\ 1 \end{array}$$

$$(2x)_{\max} = 26$$

$$x = 13 \text{ (13 tane sıfır olur)}$$

KAYNAKLAR

Matematik Ders Notları - Ayşe Yıldırım & Ceyhan Yavuz
<http://calameo.download/003359034eff296032d3c> (Eriřim 23.08.2018)

http://www.buders.com/DOKUMAN/bukaynak/matematik_calisma_sorulari/denklem_kurma_problemleri_calisma_kagidi_1.pdf (Eriřim 14.04.2017)

Temel Matematik – Basri ÇELİK – Dora Basım Yayın